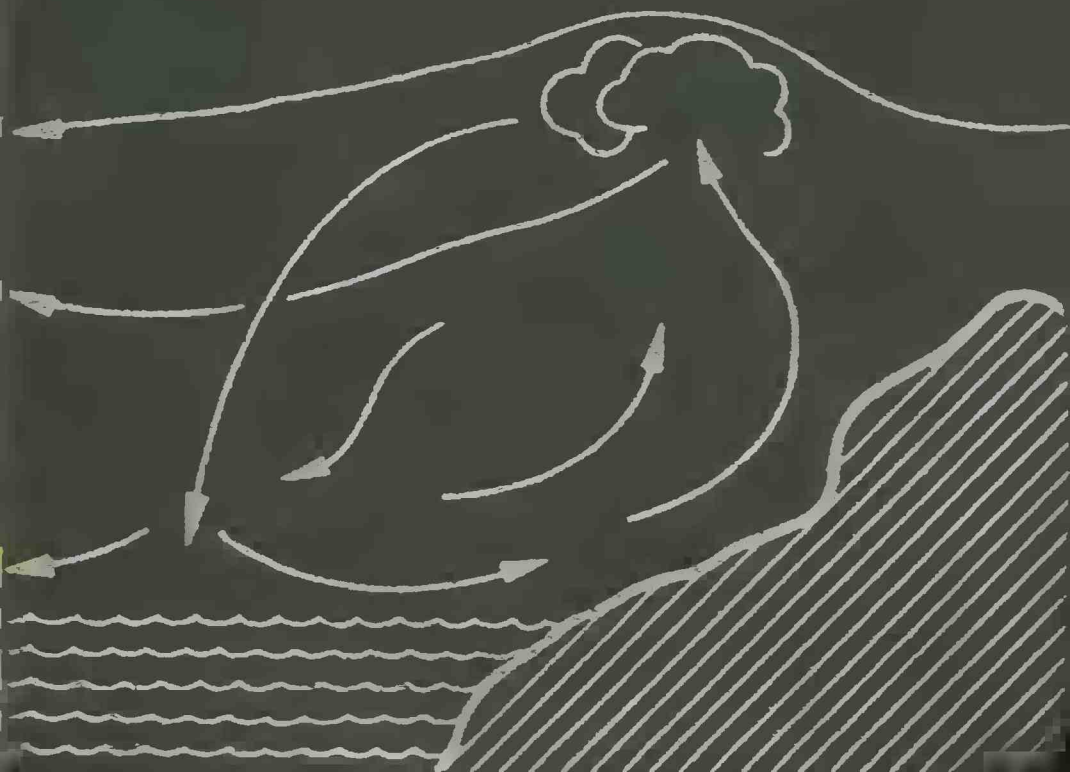


Р. Скорер

АЭРО-  
ГИДРО-  
ДИНАМИКА  
ОКРУЖАЮЩЕЙ  
СРЕДЫ



# ENVIRONMENTAL AERODYNAMICS

**R. S. SCORER**

Professor of Theoretical Mechanics  
Department of Mathematics,  
Imperial College of Science and Technology,  
University of London

Ellis Horwood Limited  
Publisher Chichester

Halsted Press: a Division of  
John Wiley & Sons

NEW YORK · LONDON · SYDNEY · TORONTO  
1978

Р. Скорер

АЭРОГИДРО-  
ДИНАМИКА  
ОКРУЖАЮЩЕЙ  
СРЕДЫ

Перевод с английского  
канд. физ.-мат. наук  
В. А. ХОХРЯКОВА и Л. К. ЭРДМАНА

под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук  
А. Я. ПРЕССМАНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1980

Первый в своем роде курс аэрогидродинамики, построенный применительно к нуждам специалистов, связанных с исследованием и защитой окружающей среды. В нем рассмотрены вопросы вихревых движений в рамках теории ламинарных гидродинамических течений, а также турбулентные процессы в верхних и нижних слоях атмосферы. Большое внимание уделено силам плавучести и циркуляционным эффектам. Оригинальная постановка проблемы сочетается с простотой изложения и математической строгостью.

Ярко выраженная практическая направленность делает книгу ценным пособием для широкого круга специалистов: метеорологов, экологов, инженеров коммунального хозяйства, авиационщиков, а также физиков, химиков и математиков, занимающихся прикладными исследованиями.

*Редакция литературы по новой технике*

1703040000

С  $\frac{20303-170}{041(01)-80}$  170-80

© 1978 R. S. Scorer/Ellis Horwood,  
Publishers

© Перевод на русский язык, «Мир», 1980



## Предисловие редактора перевода

В наш век усилившегося антропогенного воздействия на окружающую природную среду все большее значение приобретают методы расчета и прогнозирования состояния атмосферы, влияния атмосферных явлений на биосферу и результатов взаимодействия атмосферных явлений и технологической деятельности человека. Настоящая книга профессора Лондонского университета Р. С. Скорера в этом смысле уникальна: она представляет собой курс механики жидкостей и газов, построенный применительно к нуждам специалистов различных отраслей, чья деятельность непосредственно связана с состоянием окружающей среды: гидростроителей, авиаторов, биологов, химиков, метеорологов, архитекторов, экологов и т. д.

Автор рассматривает окружающую среду и, в частности, атмосферу прежде всего как среду обитания человека, а не просто как объект, который можно бесконечно эксплуатировать. Именно это обстоятельство предопределяет и комплекс теоретических вопросов, которым уделяется главное внимание, и совокупность рассматриваемых прикладных задач. Поэтому в книге подробно рассматриваются силы плавучести и циркуляционные эффекты, доминирующие на открытом воздухе, т. е. явления, которым традиционно уделяется мало внимания в обычных курсах по механике жидкостей. Автор при этом находит новые методические приемы, позволяющие достаточно ясно и просто изложить эти сложные теоретические вопросы.

Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена изложению фундаментальной теории, вихревым движениям и волнам. Здесь рассматриваются как чисто теоретические вопросы, так и разнообразные приложения, относящиеся преимущественно к динамической метеорологии. Следует отметить интересное использование понятия вторичной завихренности и энциклопедически полное рассмотрение различных ветровых систем. Во второй части основное внимание уделяется турбулентным явлениям, образованию облаков и процессам рассеяния. В частности, рассмотрены и проанализированы различные подходы к описанию турбулентности, процессов образования

облаков и осадков, переноса и разбавления загрязняющих веществ в атмосфере, полета птиц и миграции насекомых.

Некоторые оценки и подходы автора на первый взгляд кажутся парадоксальными, однако он умело и нередко с большим чувством юмора рассеивает многие устоявшиеся заблуждения в понимании физики явлений, протекающих у поверхности нашей планеты. Оригинальность мышления автора, доступность изложения при сохранении математической строгости, глубина анализа целого ряда важных явлений в атмосфере, определенная практическая направленность делают книгу Р. С. Скорера ценным пособием для широкого круга специалистов во многих отраслях науки и народного хозяйства.

Д-р физ.-мат. наук *А. Я. Прессман*

## Предисловие

Двадцать лет назад, в то время, когда проблемы загрязнения атмосферы, планеризма и других приложений гидромеханики к изучению окружающей среды стали привлекать пристальное внимание, автором была написана книга *Natural Aerodynamics* — предшественница данной книги. С тех пор еще больший интерес проявился к мезомасштабной метсорологии (которую я предпочитаю именовать аэрогидродинамикой окружающей среды), что произошло не только из-за ее важных приложений в авиации, но также вследствие того, что люди начали рассматривать окружающую среду именно как среду обитания, столь же необходимую для жизни, как и другие привычные условия, а не как объект грубой эксплуатации. В высшей школе курсы физики, связанной с окружающей средой, претерпели существенный сдвиг: в результате уяснения сложности явлений прежняя прелесть строгости изложения их упрощенных механизмов оказалась утраченной, и я надеюсь, что эта новая книга поможет преподавателям вузов вернуться к ней в своих новых курсах.

Все мы так или иначе имеем дело с явлениями механики жидкости в масштабах, сравнимых с размерами человеческого тела, города или страны. Излагаемые в существующих учебниках гидродинамические модели для всех явлений такого рода сильно отличаются от реальной среды, так как в них уделяется весьма малое внимание силам плавучести и вихревым движениям, которые как раз и преобладают в аэрогидродинамике окружающей среды. По этой причине многие теоретики и прикладные специалисты стали считать эти проблемы слишком сложными и соответственно их избегать. Однако уже имеются блестящие лабораторные эксперименты и теоретические рассуждения в этой области, которые вполне могут быть включены в стандартные университетские курсы.

Первые две главы настоящей книги содержат основные сведения из классической гидродинамики, которые понадобятся инженерам и физикам, приступающим к исследованию проблем окружающей среды. В гл. 3, содержащей сведения о вихревых движениях в жидкости, дано упрощенное изложение концепции

вторичных течений. Это изложение делает ее доступной и полезной для многих читателей, обычно ограничивающихся лишь качественным рассмотрением полей давления и ускорения, которые не обеспечивают необходимой достоверности и не позволяют прогнозировать ход процесса.

В гл. 4 обсуждены детали динамической метеорологии, обусловленные вращением Земли. Я надеюсь, что приведенный обзор ветровых систем будет полезен для инженеров, географов и всех тех, кто интересуется «кухней» погоды.

Гл. 5 и 6 по необходимости насыщены математическими выкладками, так как в них обсуждаются точно определенные волновые явления и процессы образования крупных облачных валов в атмосфере. Эти явления приобретают все возрастающую важность для специалистов в областях авиации, океанографии и физической метеорологии; вместе с тем они привлекательны с чисто математической точки зрения, хотя все еще не изучены с исчерпывающей полнотой.

В гл. 7 рассмотрен механизм турбулентности с точки зрения, отличной от общепринятых статистических и феноменологических подходов, которые, как правило, малоприменимы к процессам в свободной атмосфере. Эта глава служит как бы введением к гл. 8 и 9, в которых рассматриваются турбулентные процессы в природных условиях и содержатся сравнительно простые, но эффективные методы анализа, и к гл. 10, в которой эти методы применены к описанию процессов рассеяния атмосферных примесей. В гл. 11 рассмотрены атмосферные процессы, в которых важную роль играет конденсация облачных капель. В связи с этим более отчетливо выступает тот факт, что, хотя Земля и является оранжево-синей планетой с голубой атмосферой, половина ее поверхности скрыта белыми облаками, которые доминируют в общей картине движения воздушных масс.

Последняя глава, хотя и является краткой, касается тех аспектов аэродинамики окружающей среды, которые весьма перспективны в отношении развития существующей системы знаний в ближайшем будущем. Если материалы этой главы смогут заинтересовать инженеров или физиков смежными областями биологии, то одна из ее главных целей будет достигнута.

Содержание гл. 3, 5 и 6 вместе со специальными вопросами из гл. 1 и 2 является стержнем одного лекционного курса, так же как содержание гл. 7—10 — другого, которые в разных вариациях читались автором на протяжении двух последних десятилетий и в литературе не имеют аналогий. Гл. 1, 2 и 4 могут представлять интерес для специалистов по физике атмосферы, которые и в гл. 11 могут найти рассмотрение многих

рансе не освещавшихся вопросов. Словом, автор надеется, что данная книга окажется полезным пособием для различных специалистов, занимающихся исследованиями в области окружающей среды. Быть может, многие географы, обладающие интуицией в понимании природных процессов, заинтересуются математическими методами их исследования.

Проблемы окружающей среды сейчас привлекают внимание ученых и инженеров разных специальностей, и многие специалисты испытывают определенные трудности при попытках извлечь полезные для себя сведения из традиционных книг по механике жидкости. Я надеюсь, что эта новая книга поможет им лучше понять процессы в свободной атмосфере.

Я с большой признательностью отмечаю поддержку многих студентов, ведущих исследования вместе со мной. В книге имеются ссылки на многие их работы, а для меня их сотрудничество всегда было источником вдохновения. Я также должен подчеркнуть, что работам профессоров Ф. Ладлэма, С. Ий и Р. Лонга эта книга обязана в большей мере, чем об этом можно было бы заключить по приведенным ссылкам.

*Р. С. Скорер*

Импириал колледж, Лондон,  
февраль 1977 г.



## Введение

Часто совершенно случайные события помогают открыть новую область исследований. Канонада Великого сражения во Фландрии могла быть слышна в Британии вне «мертвой зоны», а падение Тунгусского метеорита в 1908 году произошло именно тогда, когда стали применяться первые чувствительные барографы, и вот результат: оба эти события вызвали долговременный интерес к изучению нагретых слоев в стратосфере. Полстолетия спустя развитие фотохимии, стимулированное исследованиями лос-анджелесского смога, способствовало ускорению первых шагов в изучении состава стратосферы и, в частности, озона, связанного с образованием высоких нагретых слоев.

Недавно большой интерес вызвали весьма простые модели, описывающие возможное воздействие человеческой деятельности на количество озона в атмосфере, и многие умозрительные предсказания пагубных последствий антропогенного воздействия способствовали проведению интенсивных программ измерений малых химических составляющих атмосферы. Первые же сообщения о результатах таких измерений выявили тот факт, что распределения всех составляющих, содержание которых подвержено большим вариациям, зависят от таких локальных свойств движения воздушных масс, о которых имеется лишь очень скудная информация, особенно для стратосферы. В любой другой период более трезвого подхода к проблемам окружающей среды подобные события не привлекли бы к себе столь пристального внимания общественности, и наука могла бы спокойно развиваться в атмосфере более обоснованных гипотез.

Исследования поведения стай саранчи навели на мысль, что и у многих других насекомых и птиц имеются интересные особенности поведения в полете, составляющие важную часть механизма выживания этих видов. Многие явления в области аэродинамики окружающей среды были обнаружены планеристами. В это же время развитие радиолокационной техники позволило обнаружить и исследовать такие невидимые явления, как крупные волновые процессы в атмосфере и термики,

что в свою очередь способствовало появлению на летательных аппаратах радаров, использующих эффект Доплера, и ЭВМ, позволяющих определять непосредственно в полете траектории воздушных масс и даже небольшие ветровые порывы. Сейчас уже известна связь между этими явлениями и зонами концентрации многих видов летающих насекомых и птиц, которые также определяются с помощью радаров. Таким образом, изучение полей плотности в атмосфере в значительной степени связано с энтомологическими исследованиями, а изучение морских бризов пролило новый свет на исследования образа жизни некоторых видов насекомых.

Практически никогда нельзя заранее сказать, к какому результату приведут те или иные исследования. Мы живем в весьма динамичную эпоху. Известны прогнозы, согласно которым природа трагически обречена, и многие аспекты человеческой деятельности оказываются неприемлемыми ввиду суровых ограничений, налагаемых на них простыми прогностическими моделями, особенно когда они применяются для описания бесконечно сложной внешней среды. Этого и следует ожидать, поскольку упрощенные модели позволяют получать теоретические результаты только для искусственно выделенных фундаментальных механизмов.

В настоящее время нередко также попытки оценки вероятности разрушительных последствий человеческой деятельности в эпоху истощенных почв, загрязненных вод и грандиозных смогов в городах. Современная эпоха может рассматриваться, с одной стороны, как период быстрого экономического развития и роста благосостояния, а с другой — как цепь самоубийственных акций, явившихся следствием необузданной алчности людей. Определенно нам следует много сделать для того, чтобы исправить допущенные отклонения, и в то же время сохранить те возможности, которые дает нам материальный прогресс.

Стратосфера в настоящее время является благодатным объектом для различных догадок и предположений, так как наши знания достаточны для того, чтобы выдвигать правдоподобные фантазии, и одновременно слишком скудны, чтобы разработать всеобъемлющую и обоснованную теорию. С тропосферой дело обстоит иначе, поскольку мы хорошо представляем себе ее быстротекущие процессы кругооборота и мощные восстановительные механизмы. Тем не менее еще в XIX столетии многие формы облаков были «объяснены» совершенно фантастическим образом на основе популярных тогда выводов из электростатики, а немногим более десятилетия назад один известный физик уверенно заявил, что водородная бомба должна влиять на погоду, и публика, как всегда, была готова поверить, что именно человеческая деятельность является при-



чиной того, что она была склонна рассматривать как климатические аномалии.

Только после того, как численные расчеты на ЭВМ подтвердили, что капельные облака имеют сильную тенденцию к коагуляции с переходом к образованию мороси или дождя, многие специалисты по физике облаков позволили себе поверить в то, что рядовые метеорологи уже давно знали. В течение нескольких десятилетий с земли и с самолетов они многократно наблюдали, что дождь может выпадать из облака, у которого нет ни одной части, имеющей температуру ниже точки замерзания.

Типичным для нашего времени является недавно сделанное предположение о том, что лос-анджелосский смог может, а следовательно, и должен быть устранен распылением различных примесей в воздухе. Однако лишь знание гидродинамических условий, необходимых для протекания такого процесса, возможно, умерит пыл сторонников этой идеи, доказав невозможность ее реализации.

Универсальные рецепты «изготовителей дождя», «защитников от града» и других деятелей подобного толка, которые пытаются извлечь ренту из научных реальностей, всегда впечатляют членов законодательных органов, плановиков и хозяйственников. Однако контракты и даже субсидии на научные работы не должны зависеть как от выдвигания фантастических проектов, так и от отсутствия определенных доказательств того, что сложная природа легко готова подчиниться человеческой прихоти. Частные факты, вообще говоря, ничего не доказывают, но при соответствующем отборе статистические данные выглядят весьма впечатляюще. Убеждение в том, что буйство ураганов может быть умерено засевом облаков соответствующими реактивами, было в основном таким же заблуждением, как и недавняя вера в то, что если распылить достаточное количество йодистого серебра в атмосфере, то, возможно, дожди разом прекратятся навсегда и повсюду. Псевдонаучные проекты, связанные с распылением сажи над арктическими льдами или тропическими морями и покрытием песков Сахары ячейками фотоэлементов, чтобы разрешить мировой энергетический кризис, не учитывают того факта, что плоды таких грандиозных усилий могут быть сведены на нет снежной или песчаной бурей либо штормом.

В настоящее время период экстравагантных проектов и веры во всемогущество техники, по-видимому, проходит. Тем не менее за последнее время мы получили много новых сведений об окружающем нас мире, и среди прочего то, что этот мир принадлежит не только нам. Можно, конечно, восхищаться выдающимися достижениями спектроскопистов и инженеров,

которые снабдили нас прекрасными снимками Земли, полученными с помощью спутников и содержащими несметное количество детальной информации. Все же банальные грезы об универсальном благополучии увядают, и человечество скоро начнет уделять большее внимание тому, как жить в тесном согласии с природой. Можно надеяться, что будет предпринято больше попыток проникнуть в суть вещей, как это всегда делали настоящие ученые, вместо того, чтобы скользить по поверхности явлений, поскольку эпоха научно-технического и экономического прогресса заставляет задуматься о месте людей в окружающем их мире. Исследования движений воздушных масс, описанные в этой книге, касаются важного динамического фона жизни на Земле. При этом нельзя забывать, что состав атмосферы практически целиком определяется биологическими процессами в биосфере, от которой человечество составляет лишь малую часть, и жизнь многих видов животных и растений целиком зависит от движений воздуха.

# Часть I

## Общая теория, завихренность и волны

---

### Глава 1

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

##### 1.1. Безвихревое движение и реальные жидкости

В классической теории безвихревого движения несжимаемой жидкости существует несколько теорем, которые играют большую роль при изучении реальных жидкостей. Эти теоремы прекрасно изложены во многих учебниках, и здесь мы затронем их только вкратце и в менее ортодоксальной манере. Предполагается, что в невязкой жидкости действующими силами являются только массовые, такие, как сила тяжести, и давление жидкости, которое действует по нормали к любой поверхности. Вязкость же вызывает возникновение сил, которые действуют вдоль поверхности. Для вычисления силы, обусловленной давлением, мы рассмотрим результирующую силу, действующую на массу жидкости, ограниченную поверхностью  $S$ . Для этой поверхности вводится элементарный вектор  $d\mathbf{S}$ , по модулю равный площади элемента поверхности  $dS$ , перпендикулярный к этому элементу и направленный вовне. Если  $\mathbf{l}$  — единичный вектор в заданном направлении, то составляющая силы в этом направлении, действующая на жидкость, ограниченную поверхностью  $S$ , и обусловленная давлением на элемент этой поверхности, равна  $(-p\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S})$ , где  $p$  — давление жидкости. Суммарная сила, действующая на поверхность в этом направлении, будет, следовательно, равна

$$-\int_{\text{пов}} \mathbf{l} \cdot p d\mathbf{S} = -\int_{\text{об}} \text{div}(\mathbf{l}p) d\tau = -\mathbf{l} \cdot \int_{\text{об}} \text{grad } p d\tau, \quad (1.1.1)$$

где  $d\tau$  — элемент объема, а интегралы берутся либо на полной поверхности, либо по ограниченному этой поверхностью объему. Здесь мы использовали теорему Гаусса—Остроградского, а именно для любого векторного поля  $\mathbf{A}$   $\int_{\text{об}} \text{div } \mathbf{A} d\tau$  равен

$\int_{\text{пов}} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S})$ , и имеет место тождество  $\text{div}(\rho \mathbf{l}) = \mathbf{l} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{ div } \mathbf{l}$ , последний член которого равен 0, поскольку вектор  $\mathbf{l}$  — постоянный.

Выражение (1.1.1) представляет только компоненту силы в направлении  $\mathbf{l}$ , следовательно, суммарный вектор силы, действующей на объем жидкости, равен

$$-\int_{\text{пов}} \rho d\mathbf{S} = -\int_{\text{об}} \text{grad } \rho d\tau. \quad (1.1.2)$$

Отсюда видно, что сила, действующая в точке на единичный объем, равна  $-\text{grad } \rho$ .

Закон движения Ньютона, который мы считаем точным для механики жидкости в земных условиях (хотя бы потому, что в данное время неосуществимы измерения, которые позволили бы обнаружить какие-либо отклонения от него), гласит, что скорость изменения импульса в направлении  $\mathbf{l}$  равна сумме сил, действующих в том же направлении. В соответствии с этим получаем, если  $\rho$  — плотность жидкости (масса на единицу объема), а  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости:

$$\int_{\text{об}} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}) \rho d\tau = -\int_{\text{пов}} \mathbf{l} \cdot \rho d\mathbf{S} + \int_{\text{об}} \mathbf{l} \cdot g\rho d\tau. \quad (1.1.3)$$

В этом выражении  $d/dt$  обозначает производную по времени, взятую в системе координат, связанных с движущейся точкой, которую часто называют материальной или лагранжевой производной, а  $\rho d\tau$  — элемент массы при интегрировании. Предполагается, что объем и поверхность соответствуют частицам вещества, которые движутся вместе с жидкостью, а в уравнении (1.1.3) производная импульса в направлении  $\mathbf{l}$  приравнивается силам, действующим в этом направлении. Мы ограничиваем массовые силы только гравитационными, которые в единичном объеме равны  $g\rho$ . Существуют и другие массовые силы, такие, как электромагнитные, которые необязательно пропорциональны массе, но в настоящей книге мы их не рассматриваем. Выражение (1.1.3) определяет компоненту в направлении  $\mathbf{l}$  выражения

$$\int_{\text{об}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho d\tau = -\int_{\text{об}} \text{grad } \rho d\tau + \int_{\text{об}} g\rho d\tau,$$

а поскольку объем выбирался произвольно, то подынтегральные выражения должны быть равны, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \rho + g. \quad (1.1.4)$$

Из общей формы уравнения движения выведем уравнение гидростатики. Так как ускорение равно 0, а сила тяжести действует в направлении, противоположном градиенту гравитационного потенциала  $gz$ , то выражение (1.1.4) принимает вид

$$\text{grad } p = \rho \text{ grad } (-gz), \text{ или} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho. \quad (1.1.5)$$

В любой ситуации, связанной с действием тяжести, мы будем всегда считать, что координата  $z$  направлена вертикально вверх.

В следующем разделе мы введем несколько математических тождеств, которые будут использоваться в дальнейшем. Тождество (1.2.7) может быть записано в форме

$$\text{div } (\varphi \text{ grad } \varphi) = \varphi \text{ div grad } \varphi + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi; \quad (1.1.6)$$

это выражение можно проинтегрировать, используя теорему Гаусса—Остроградского, откуда получаем

$$\int_{\text{пов}} \varphi \text{ grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{об}} \text{div } (\varphi \text{ grad } \varphi) d\tau = \\ = \int_{\text{об}} \varphi \nabla^2 \varphi d\tau + \int_{\text{об}} (\text{grad } \varphi)^2 d\tau. \quad (1.1.7)$$

С целью установления условий, которые должны быть наложены для того, чтобы поле движения жидкости было определено однозначно, предположим, что в данной ситуации возможны два поля скоростей, которые мы обозначим через  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ . Если  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$  и во всех точках рассматриваемой области заданы  $\text{div } \mathbf{v}$  и  $\text{rot } \mathbf{v}$  так, что они равны  $\text{div } \mathbf{v}'$  и  $\text{rot } \mathbf{v}'$  соответственно, то для всей области должны быть справедливы равенства

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ и } \text{rot } \mathbf{u} = 0. \quad (1.1.8)$$

Второе из них означает, что существует потенциал  $\varphi$ , такой, что  $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ ; тогда из первого равенства следует

$$\text{div } \mathbf{u} = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.1.9)$$

для всех точек области.

Предположение, что  $\text{div } \mathbf{v}$  и  $\text{rot } \mathbf{v}$  заданы всюду, позволяет избавиться в выражении (1.1.7) от первого члена в правой части. Если при некоторых условиях, наложенных на граничную поверхность  $\mathcal{S}$ , левая часть в (1.1.7) становится равной 0, то член  $\int_{\text{об}} (\text{grad } \varphi)^2 d\tau$  также окажется равным 0; это означает,

что  $\text{grad } \varphi$  должен всюду по модулю равняться 0, так что  $\mathbf{v}$  будет равно  $\mathbf{v}'$ . Можно, следовательно, попытаться установить, какие именно граничные условия обеспечивают единственность поля течения. Позднее мы рассмотрим, почему полезно предполагать, что  $\text{div } \mathbf{v}$  и  $\text{rot } \mathbf{v}$  равны 0.

Если составляющая  $\mathbf{u}$  в направлении  $d\mathbf{S}$ , нормальном к поверхности, равна 0, то интеграл  $\int_{\text{пов}} \varphi \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{пов}} \varphi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  будет, очевидно, равен 0; это эквивалентно утверждению, что на границе жидкости задана нормальная составляющая  $\mathbf{v}$ . И наоборот, если граница состоит из единственной поверхности и всюду на ней задана тангенциальная составляющая скорости  $\mathbf{v}$ , то аналогичная составляющая  $\mathbf{v}'$  будет такой же, а тангенциальная составляющая  $\mathbf{u}$  равна 0. Следовательно, тангенциальная составляющая  $\text{grad } \varphi$  равна 0 на всей поверхности, так что  $\varphi$  на поверхности постоянно. Если поверхность состоит более чем из одной части, то  $\varphi$  может иметь различные, но постоянные значения на каждой из частей поверхности. В случае единственной поверхности получаем

$$\int_{\text{пов}} \varphi \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = \varphi \int_{\text{пов}} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = \varphi \int_{\text{об}} \text{div grad } \varphi \, d\tau = 0,$$

используя теорему Гаусса—Остроградского, а затем соотношение (1.1.9). Это как раз тот результат, который требовался, и мы получаем *теорему Кельвина о единственности*, которая гласит:

*Если  $\text{div } \mathbf{v}$  и  $\text{rot } \mathbf{v}$  заданы во всех точках области, а во всех точках границы заданы либо нормальная составляющая  $\mathbf{v}$ , либо, если граница состоит из единственной поверхности, тангенциальная составляющая  $\mathbf{v}$ , то  $\mathbf{v}$  определяется единственным образом.*

Если нормальная составляющая  $\mathbf{v}$  задана во всех точках границы, но  $\text{div } \mathbf{v}$  и  $\text{rot } \mathbf{v}$  не заданы, то, чтобы понять, что из этого вытекает, рассмотрим энергию движения.

Пусть  $T$  — кинетическая энергия движения со скоростью  $\mathbf{v}$ , для которого  $\text{div } \mathbf{v}$  и  $\text{rot } \mathbf{v}$  всюду равны 0, а  $\mathbf{v}'$  — скорость реального движения, имеющего кинетическую энергию  $T'$ . Считая, что  $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$  и что плотность жидкости всюду постоянна и равна 1, получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\text{об}} u^2 \, d\tau = \int_{\text{об}} (v'^2 - v^2) \, d\tau - 2 \int_{\text{об}} \mathbf{v} \mathbf{u} \, d\tau = \\ &= 2T' - 2T - 2 \int_{\text{об}} \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{u} \, d\tau. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , поскольку  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  везде. Следовательно,

$$\begin{aligned} T' - T &\geq \int_{\text{об}} \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{u} \, d\tau = \int_{\text{об}} \text{div} (\varphi \cdot \mathbf{u}) \, d\tau - \int_{\text{об}} \varphi \, \text{div } \mathbf{u} \, d\tau = \\ &= \int_{\text{пов}} \varphi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\text{об}} \varphi \, \text{div } \mathbf{u} \, d\tau = - \int_{\text{об}} \varphi \, \text{div } \mathbf{v}' \, d\tau, \quad (1.1.10) \end{aligned}$$

поскольку составляющая  $\mathbf{u}$ , нормальная к  $S$ , равна 0, так как  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}$  имеют одни и те же нормальные составляющие на поверхности  $S$ . Если  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  везде, то правая часть в (1.1.10) равна 0 и  $T' \geq T$ . Разница между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  состоит в том, что  $\mathbf{v}'$  может иметь ненулевую завихренность; если это не так, то  $\text{rot } \mathbf{v}' = 0$ , и из теоремы единственности вытекает, что  $\mathbf{v}'$  совпадает с  $\mathbf{v}$ . Если  $\mathbf{v}'$  отличается от  $\mathbf{v}$  в какой-либо точке, где  $\text{rot } \mathbf{v}' \neq 0$ , то  $u^2$  будет в этой точке положительно и  $T' > T$ . Теперь мы можем сформулировать *теорему Кельвина о минимуме кинетической энергии*:

*Из всех течений несжимаемой жидкости, для которых  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  и на границе задана нормальная составляющая скорости, единственное безвихревое течение обладает кинетической энергией, которая меньше, чем у любого другого течения, удовлетворяющего тем же граничным условиям.*

Эта теорема не выполняется в случае сжимаемой жидкости, поскольку в этом случае плотность входит в подынтегральное выражение в качестве переменной величины и выражение (1.1.10) получить не удастся.

Если  $\text{div } \mathbf{v}' \neq 0$  (жидкость сжимаема), то  $\text{div } \mathbf{v}'$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, так что последний интеграл в (1.1.10) может быть как положительным, так и отрицательным, исключая случай, когда  $\varphi$  не меняется, а  $\mathbf{v}$  равна 0, поскольку в этом случае безвихревое течение сводится к состоянию покоя и никакое другое течение не может иметь меньшей кинетической энергии. Рассмотрение интеграла в (1.1.10) осложняется в дальнейшем именно тем, что плотность сжимаемой жидкости не постоянна. Существенным моментом является то, что при распространении звуковых волн в жидкости кинетическая энергия может быть как больше, так и меньше той энергии, которую имело бы безвихревое движение несжимаемой жидкости, удовлетворяющее тем же самым граничным условиям. В этой книге мы будем лишь эпизодически встречаться с течениями сжимаемой жидкости, так что в большинстве случаев  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , но часто будем рассматривать вихревые течения, когда  $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ .

Если течение невязкой несжимаемой жидкости не приобретает завихренности, то любое движение, начинающееся за счет

движения границ, должно быть безвихревым (поскольку начальное состояние покоя — безвихревое) и иметь наименьшую возможную кинетическую энергию.

Представим сначала, что течение возникает от внезапного толчка со стороны границы. В разд. 1.4 мы увидим, что действие вязкости проявляется в передаче завихренности через жидкость от границы таким же образом, как тепло передается от горячей поверхности. Это означает, что если завихренность в жидкости первоначально отсутствует, то потребуется конечное время, чтобы она распространилась посредством вязкости. Когда граница передает жидкости внезапный импульс, то всюду, за исключением очень тонкого слоя у границы, сохраняется безвихревое течение. При этом жидкость как бы скользит вдоль границы, подвергаясь действию заданной нормальной составляющей скорости.

В течение бесконечно малого отрезка времени  $\Delta t$  внутри жидкости создается очень большое давление  $P$  с очень большими градиентами. Создается конечное «импульсное давление»  $\Pi$ , равное  $P\Delta t$ , и в течение времени  $\Delta t$  устанавливается конечная скорость  $v$ . При этом изменение количества движения равно импульсу на поверхности, ограничивающей жидкость, так что, рассматривая составляющую в направлении  $I$ , получаем

$$\int_{об} I \cdot v \rho d\tau = - \int_{пов} III \cdot dS = - \int_{об} \text{div} (III) d\tau = -I \cdot \int_{об} \text{grad} \Pi d\tau. \quad (1.1.11)$$

Так как уравнение (1.1.11) выполняется для любой выбранной в жидкости поверхности и для любого направления, то мы имеем

$$\rho v = -\text{grad} \Pi, \quad \text{или} \\ v = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \Pi. \quad (1.1.12)$$

Последнее выражение равно  $\text{grad} \phi$  в том случае, когда  $\text{rot} \phi$  от него равен 0. Используя (1.2.8), можно показать, что это может быть тогда, когда равенство

$$\text{grad} \Pi \cdot \text{grad} \frac{1}{\rho} = 0 \quad (1.1.13)$$

выполняется везде. Это возможно лишь в единственном случае, когда поверхности  $\Pi = \text{const}$  совпадают с поверхностями  $\rho = \text{const}$ . Такое совпадение было бы весьма искусственным. Следовательно, течение является безвихревым, если плотность



$\rho$  постоянна; при этом скорость и импульсное давление связаны соотношениями

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \text{ и } \varphi = -\Pi/\rho, \quad (1.1.14)$$

и, таким образом, течение, устанавливающееся за счет ударного воздействия границ, будет безвихревым.

Теперь мы подошли к теореме Кельвина о циркуляции. Она применима к невязким, хорошо перемешанным жидкостям, находящимся под действием консервативных массовых сил. Это означает, что силы имеют потенциал (наиболее важным примером является сила тяжести  $\mathbf{g} = -\text{grad } gz$ ) и что жидкость изэнтропическая. Последнее условие означает, что состояние жидкости не изменится, если поменять местами какие-либо две частицы. Простейшими примерами такой жидкости являются несжимаемая жидкость постоянной плотности и сжимаемая жидкость при адиабатическом движении (жидкость, частицы которой имеют одну и ту же потенциальную температуру, или энтропию). Циркуляция по контуру, состоящему из одних и тех же частиц, равна  $\oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$ , а ее полная производная по времени равна

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s}, \quad (1.1.15)$$

где  $d\mathbf{s}$  — векторный элемент дуги контура. Предполагая, что  $\mathbf{v}$  непрерывна, получаем  $(d/dt)d\mathbf{s} = d\mathbf{v}$ , что выражает изменение скорости жидкости вдоль бесконечно малой дуги  $d\mathbf{s}$ , так что последний член в (1.1.15) представляет собой

$$\oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) = \oint d(1/2 v^2) = 0,$$

поскольку  $\mathbf{v}$  непрерывна. Первый член в правой части (1.1.15) с использованием (1.1.4) может быть переписан в следующем виде:

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} - \oint \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.1.16)$$

где, в свою очередь, первый член в правой части равен

$$\oint \text{grad } (gz) \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

поскольку интеграл от градиента любого скалярного поля по замкнутому контуру равен 0. Это эквивалентно утверждению, что поле тяготения есть поле консервативной силы.

Последний член в (1.1.16) может быть переписан в виде

$$\oint \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\rho} \oint \text{grad } p \cdot d\mathbf{s} = 0$$

для случая, когда плотность  $\rho$  постоянна, или

$$\oint \text{grad} \left( \int \frac{dp}{\rho} \right) \cdot ds = 0$$

для случая изэнтропической жидкости, когда предполагается, что для всех ее частиц плотность является одной и той же функцией давления. Следовательно, мы можем написать  $(1/\rho) \text{grad } p = \text{grad } e$ , или  $(1/\rho) dp = de$ , или  $e = \int dp/\rho$ . В результате из (1.1.15) следует, что  $\oint \mathbf{v} \cdot ds$  не меняется со временем при условии, что контур постоянно включает одни и те же частицы. Другими словами, сквозь данный материальный контур всегда проходит одно и то же число вихревых линий, так что вихревые линии движутся вместе с жидкостью.

Если жидкость не изэнтропическая или обладает переменной плотностью, то

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot ds = - \oint \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot ds = \int_{\text{пов}} \text{rot} \left( \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.1.17)$$

где  $ds$  является элементом произвольной поверхности, для которой границей служит рассматриваемый контур. Согласно (1.2.8) имеем

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot ds = - \int_{\text{пов}} \text{grad } \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.1.18)$$

что известно как *теорема Бьеркнеса*. Это выражение связано с соотношением (1.1.13) и устанавливает, что поле давлений в несжимаемой жидкости может создавать циркуляцию только в том случае, когда плотность на поверхности постоянного давления не является постоянной (т. е. когда изопикнические и изобарические поверхности не совпадают). Этот эффект в выражении (1.4.1) будет представлен членом  $\mathbf{R} \times \mathbf{f}$ .

Подводя итоги, можно сказать, что течение жидкости, порожденное движением границ, является безвихревым, если жидкость невязкая и имеет постоянную плотность. Безвихревое движение обладает меньшей кинетической энергией, чем любое другое движение, удовлетворяющее тем же самым граничным условиям, так что увеличение завихренности всегда добавляет энергию, и понятно, почему турбулентность, которая поглощает энергию, так связана с вихревыми течениями. Если жидкость сжимаема, то границы могут перемещаться без немедленного вовлечения в движение всей жидкости, так что она может иметь меньшую энергию. С другой стороны, на движение могут

налагаться волны давления, и жидкость, таким образом, будет иметь кинетическую энергию, даже если границы ее неподвижны, так что сжимаемая жидкость может обладать большей или меньшей энергией, чем несжимаемая, удовлетворяющая тем же самым граничным условиям, если в обоих случаях течения безвихревые.

Такое течение однозначно определено, если только для всех точек жидкости некоторым образом заданы  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ . Это означает, что турбулентность, являющаяся состоянием, слишком сложным для того, чтобы его можно было определить только заданием  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ , может рассматриваться только с привлечением дополнительных предположений или данных.

## 1.2. Обозначения, системы координат, тождества

Для представления векторов через их компоненты обычно используются прямоугольные координаты  $(x, y, z)$ , где ось  $z$  направлена вертикально вверх, если не оговорено противное. Когда это удобно, можно использовать координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ . Таким образом, сила тяжести выражается следующим образом:

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g) = -\operatorname{grad} (gz) = -\nabla (gz). \quad (1.2.1)$$

Полная скорость жидкости может быть записана в виде

$$\mathbf{v} = (u, v, w) = (v_1, v_2, v_3), \quad (1.2.2)$$

а ее  $i$ -я компонента как  $v_i$ . Завихренность определяется выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = (\xi, \eta, \zeta) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (1.2.3)$$

$$\omega_i = (\operatorname{rot} \cdot \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}.$$

Дивергенция скорости равна

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad (1.2.4)$$

а полная производная по времени от величины  $\sigma$ , связанной с элементом жидкости, равна

$$\frac{d\sigma}{dt} = q \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad (1.2.5)$$

где  $t$  — время,  $s$  — расстояние вдоль траектории, а  $q$  — абсолютная величина скорости  $\mathbf{v}$ .

Следующие тождества вводятся здесь без доказательства:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } (1/2q^2) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \quad (1.2.6)$$

$$\text{div}(\sigma \mathbf{v}) = \sigma \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \sigma, \quad (1.2.7)$$

$$\text{rot}(\sigma \mathbf{v}) = \sigma \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } \sigma \times \mathbf{v}, \quad (1.2.8)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.2.9)$$

где  $\nabla^2 \mathbf{v} = (\text{div grad}) \mathbf{v}$ ,

а также  $\text{div}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\omega}$ , (1.2.10)

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v} \text{ div } \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \text{ div } \mathbf{v} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega}. \quad (1.2.11)$$

Последние два тождества верны для двух любых векторных полей  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , хотя мы главным образом будем иметь дело со случаем, когда  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ . Также для любых скаляра  $\sigma$  и вектора  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  всегда имеют место

$$\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{и} \quad \text{rot grad } \sigma = 0. \quad (1.2.12)$$

### 1.3. Уравнения Навье—Стокса

Основной целью настоящего раздела является разъяснение предположений, на которых основаны *уравнения Навье—Стокса*. Эти уравнения наиболее широко используются в механике жидкости, и важно использовать их правильно в тех сложных ситуациях, которые случаются в действительности.

Наиболее фундаментальным предположением, без которого эти уравнения не могут быть получены, является то, что напряжения (силы) в жидкости связаны линейно и мгновенно со скоростями деформации (смещения). Таким образом, удвоенной скорости деформации соответствует удвоенная сила, а жидкость не сохраняет признаков предыдущего движения: силы возникают или исчезают немедленно, как только начинается или прекращается деформирующее движение. Силы вязкости существуют благодаря движению молекул, а это означает, что скорости движения молекул много больше разностей скоростей различных частиц жидкости, что, конечно, выполняется для обычных движений в атмосфере.

Скорость деформации в точке внутри жидкости может быть представлена как скорость изменения углов между тремя (координатными) плоскостями в жидкой частице, которые были взаимно ортогональны в момент начала деформации. Величина  $d\omega/du$  является мерой скорости вращения вокруг оси  $x$  частиц,

расположенных на оси  $y$ . Если добавить к  $\partial v/\partial z$  производную  $\partial w/\partial y$ , которая представляет скорость вращения вокруг оси  $x$  частиц, расположенных на оси  $z$ , то сумма будет равна скорости изменения углов между прямыми линиями, первоначально совпадающими с осями (рис. 1.3.1)  $y$  и  $z$ . Эта величина представляет собой одну из составляющих скорости деформации. Деформация, кроме того, происходит, если жидкость растянута вдоль оси  $y$  или сжата вдоль оси  $z$ ; при этом прямые углы

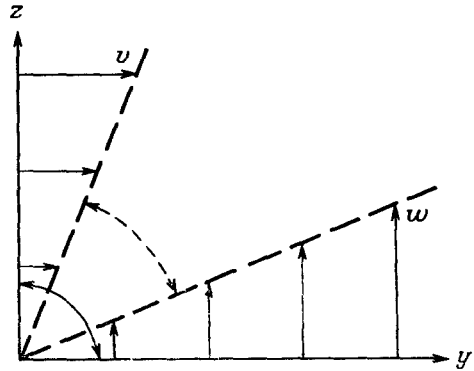


Рис 1.3.1. Скорость деформации жидкой частицы, обусловленная градиентами скорости потока.

также становятся непрямыми. Абсолютные величины этих деформаций равны  $\partial v/\partial y$  и  $\partial w/\partial z$  (рис. 1.3.2). Таким образом, мы имеем следующие шесть величин, необходимых для определения скорости деформации:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= 2 \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= 2 \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= 2 \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 e_{yz} &= e_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & & & (1.3.1) \\
 e_{zx} &= e_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
 e_{xy} &= e_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Завихренность определяется локальной угловой скоростью вращения жидкости и принимается равной ее удвоенной величине. Вращение вокруг оси  $x$  получается изменением знака  $\partial v/\partial z$  в выражении для  $e_{yz}$ . Таким образом,

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.3.2)$$

Деформация, изображенная на рис. 1.3.2, не обладает общим вращением; равным образом могут существовать вращения, не сопровождаемые деформацией. Жесткое вращение (по типу твердого тела) с угловой скоростью  $\Omega$  создает линейную скорость частицы, равную

$$\mathbf{v} = -\Omega \times \mathbf{x}, \quad \text{или} \\ v_i = \Omega_j x_k - \Omega_k x_j. \quad (1.3.3)$$

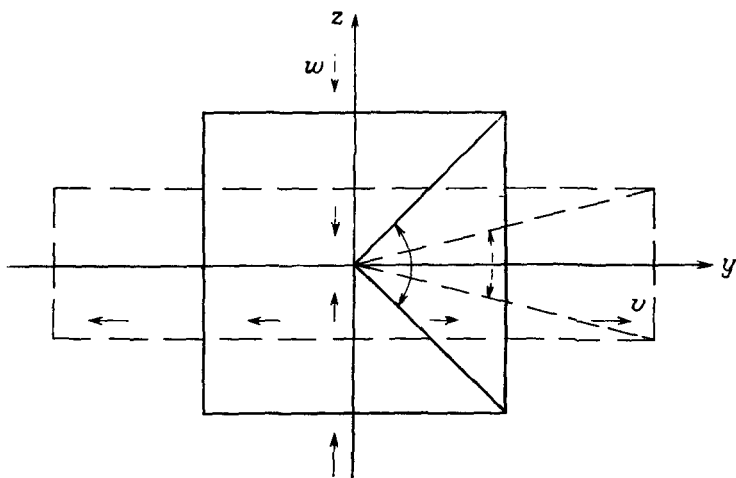


Рис. 1.3.2. Деформация вследствие растяжения или сжатия

Для твердого тела все компоненты  $e_{ij}$  в выражении (1.3.1) равны 0, т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

так что

$$\xi = 2 \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta = 2 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = 2 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.3.4)$$

Так как  $\partial u / \partial x = 0$ , скорость частицы относительно начала координат имеет составляющую вдоль оси  $x$ , равную

$$u = y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 1/2 (y\zeta - z\eta), \quad (1.3.5)$$

если пренебречь членами высшего порядка. Сравнивая это с (1.3.3), видим, что скорость получается такой же, как при жестком вращении с угловой скоростью  $1/2\Omega$ .

Производные скорости, описываемые выражениями (1.3.1), определяют квадратную матрицу 3-го порядка; элементы этой матрицы задаются соотношением

$$a_{ij} = \partial u_i / \partial x_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

которое можно представить в виде суммы симметричной матрицы

$$e_{ij} = 1/2(a_{ij} + a_{ji})$$

и антисимметричной матрицы

$$\sigma_{ij} = 1/2(a_{ij} - a_{ji}),$$

Так как диагональные элементы  $\sigma_{ij}$  равны 0, вектор  $\sigma_{ij}x_j$  будет таким же, как если бы было взято векторное произведение  $\Omega \times x$ , где  $\Omega_i = \sigma_{jk}$ . Таким образом,  $\sigma_{ij}$  представляет компоненты жесткого вращения, наложенного на деформацию, представленную компонентами  $e_{ij}$ . Жесткое вращение не порождает внутренних напряжений, поскольку оно не деформирует жидкость, так что только компоненты  $e_{ij}$  результирующего движения  $a_{ij}$  имеют отношение к напряжениям.

Путем преобразования координат, соответствующего чистому вращению, матрица  $e_{ij}$  может быть приведена к диагональному виду. Это эквивалентно утверждению, что квадратичная поверхность имеет три главные оси, при вращении относительно которых положение поверхности в пространстве сохраняется неизменным, или что полная деформация любого жидкостного элемента полностью описывается суммой деформаций (растяжений или сжатий) относительно указанных трех осей. Это свойство поверхностей второго порядка в пространстве не связано с какими-либо свойствами жидкости. Ниже мы воспользуемся этим соображением.

При задании скорости деформации и вращения жидкости относительно частицы, находящейся в данной точке, с помощью девяти производных компонент скорости мы не накладывали ограничений на то, какого рода движение мы собираемся рассматривать, кроме того, что оно должно быть непрерывным и дифференцируемым. Но если предположить, что напряжения в точке зависят только от этих компонент, то из этого следует, что они определяются ситуацией в ближней окрестности точки, а не явлениями, происходящими на удалении. Таким образом, подразумевается, что скорости деформаций не меняются существенным образом в пределах области, в которой происходят явления, определяющие деформацию. Другими словами, мы пренебрегаем любой зависимостью от пространственных производных скорости выше первого порядка. Это предположение

может оказаться неверным, если первые производные значительно меняются на расстоянии средней длины свободного пробега молекулы. Например, течение вокруг метеора в верхней атмосфере может быть описано неверно, поскольку размер метеора может быть меньше длины свободного пробега.

Чтобы уравнения, которые мы выведем, были в достаточной мере универсальны, величины  $e_{ij}$  не должны быть малы, и предположение об их линейной зависимости от напряжений следует дополнить подобными же допущениями относительно производных напряжения, а также считать, что все составляющие взаимно независимы.

Мы будем предполагать также, что жидкость изотропна; это означает, что у жидкости отсутствуют свойства, зависящие от выбора направления. Поскольку мы будем изучать стратифицированные жидкости, будем полагать, что градиентное движение и градиенты плотности слишком малы, чтобы влиять на линейность соотношений. Это приемлемо, если напряжения возникают на молекулярном уровне, поскольку на расстояниях, во много раз превышающих среднюю длину свободного пробега, стратифицированность не проявляется. Там, например, где сильно нагретая напорная струя втекает в холодную среду, в действительности могут быть очень большие температурные градиенты, но при этом предполагается, что уравнения остаются справедливыми за счет допущения об изменении вязкости в зависимости от температуры без какой-либо локальной анизотропии. Эти допущения неприемлемы в тех случаях, когда турбулентное движение настолько сложно, что о прямом применении этих уравнений не может быть и речи.

Для случая изотропной жидкости удобно вести описание течения относительно главных осей скоростей деформации, обозначив их  $OXYZ$ . В этих координатах

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \quad (1.3.6)$$

Переход от системы координат  $Oxyz$  к системе  $OXYZ$  задается тремя компонентами, которые выбираются таким образом, чтобы удовлетворять уравнениям (1.3.6). В результате скорости деформаций будут полностью выражаться через растяжения или сжатия вдоль этих осей. Тогда напряжения  $p_{ij}$  в соответствии со сделанными предположениями будут определяться уравнениями вида

$$p_{xx} = -p + \frac{1}{2}\lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + \mu e_{xx}, \quad (1.3.7)$$

где зависимость  $p_{xx}$  от  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$  симметрична вследствие изотропности. Символ  $p_{ij}$  представляет компоненту результирующего напряжения в направлении  $i$ , действующую на единичную



площадку, перпендикулярную направлению  $j$ . Для главных осей напряжений

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy}, \quad (1.3.8)$$

и эти оси должны, из соображений изотропности, совпадать с главными осями скоростей деформации.

Таким образом, требуется только два коэффициента вязкости: один,  $\lambda$ , для определения дивергенции, поскольку  $e_{ii} = 2 \operatorname{div} \mathbf{v}$ , и другой,  $\mu$ , для определения эффекта растяжения. Член  $-p$  появляется в уравнении (1.3.7), поскольку известно, что в отсутствие движения существует напряжение, которое мы называем *нормальным давлением*. Отрицательный знак показывает для определенности, что напряжение положительно, когда оно является растягивающим.

Если оси  $Oxyz$  имеют направления, определяемые единичными векторами  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ , изменяющимися от точки к точке относительно главных осей деформации  $OXYZ$ , и если  $\mathbf{V}$  — скорость жидкости, отнесенная к  $OXYZ$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = (\mathbf{l} \cdot \operatorname{grad})(\mathbf{l} \cdot \mathbf{V}) = \\ &= \left( l_1 \frac{\partial}{\partial X} + l_2 \frac{\partial}{\partial Y} + l_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right) (l_1 U + l_2 V + l_3 W) = \\ &= l_1^2 \frac{\partial U}{\partial X} + l_2^2 \frac{\partial V}{\partial Y} + l_3^2 \frac{\partial W}{\partial Z} = \\ &= \frac{1}{2} (l_1^2 e_{XX} + l_2^2 e_{YY} + l_3^2 e_{ZZ}), \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

поскольку

$$\left. \begin{aligned} e_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} = 0, \\ e_{xx} &= 2 \frac{\partial U}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.10)$$

и так далее в соответствии с определением главных осей. Поскольку оси ортогональны, то

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad (1.3.11)$$

так что

$$2 \operatorname{div} \mathbf{v} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_{XX} + e_{YY} + e_{ZZ} \quad (1.3.12)$$

и

$$\begin{aligned} e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = (\mathbf{m} \cdot \operatorname{grad})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad})(\mathbf{m} \cdot \mathbf{V}) = \\ &= m_1 n_1 e_{XX} + m_2 n_2 e_{YY} + m_3 n_3 e_{ZZ} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

в силу соотношения (1.3.10). Аналогичные уравнения имеют место и для  $e_{zx}$  и  $e_{xy}$ .

При получении всех этих соотношений мы положили равными 0 пространственные производные от компонент векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ . Это было сделано потому, что, хотя они и меняются от точки к точке с изменением главных осей, мы рассматриваем производные относительно только двух систем координат, определенных в данной точке и в данный момент времени.

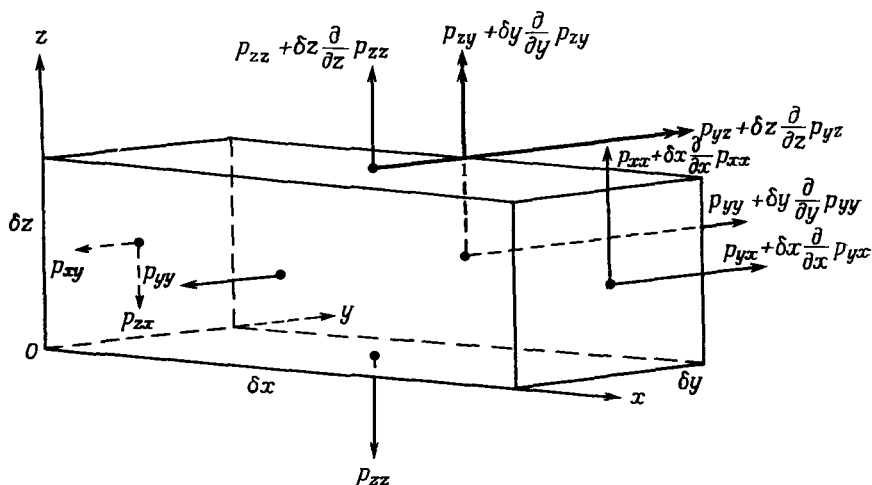


Рис. 1.3.3. Напряжения, действующие в жидкости на грани элементарного прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  и создающие ненулевой момент относительно оси  $Ox$ .

На рис. 1.3.3 изображен прямоугольный параллелепипед со сторонами  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$ , один из углов которого находится в начале координат. Все напряжения с ненулевым моментом относительно оси  $Ox$  обозначены и показаны приложенными к серединам соответствующих граней параллелепипеда. Величины моментов вычислены в предположении, что все силы распределены равномерно по поверхности, на которую они действуют, и что изменение этих сил также равномерно. Поэтому члены, содержащие степени приращений  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  и производные выше первого порядка, опущены как малые величины. Две силы, обозначенные двойными стрелками, создают относительно оси  $Ox$  момент, в этом приближении равный

$$-p_{yz} \delta x \delta y \delta z + p_{zy} \delta y \delta z \delta x, \quad (1.3.14)$$

поскольку все остальные члены в выражении для момента будут более высокого порядка. Указанные члены являются про-

изведением сил, площадей, на которые эти силы действуют, и расстояния от этих площадей до оси  $Ox$ . Сумма всех моментов равна моменту инерции, умноженному на угловое ускорение параллелепипеда. Момент инерции имеет порядок массы параллелепипеда, умноженной на квадрат линейных размеров, т. е.  $(\delta x)^5$ . Поскольку угловое ускорение обязательно конечно, а величина (1.3.14) имеет порядок  $(\delta x)^3$ , то величина суммарного момента должна быть равна 0, иначе ускорение стремилось бы

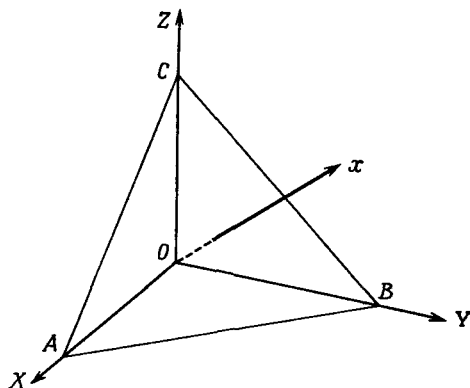


Рис. 1.3.4. Силы, действующие на элементарный тетраэдр  $OABC$ .

Направление  $Ox$  перпендикулярно плоскости  $ABC$

к бесконечности при стремлении к 0 размеров рассматриваемого параллелепипеда.

Следовательно,

$$p_{yz} = p_{zy} \quad (1.3.15)$$

и подобным же образом

$$p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}.$$

Эти же зависимости по аналогичным соображениям справедливы для упругого твердого тела.

Чтобы связать полученные выражения для напряжений с аналогичными выражениями, отнесенными к главным осям, рассмотрим силы, действующие на элементарный тетраэдр (рис. 1.3.4), вершины которого расположены в начале координат и в точках  $A, B, C$  на осях  $OXYZ$ , причем плоскость  $ABC$  перпендикулярна направлению  $Ox$ . Поскольку силы пропорциональны площадям, на которые они действуют, т. е. квадрату линейных размеров, а импульс пропорционален массе, т. е. кубу линейных размеров, результирующая сила должна равняться 0; в противном случае бесконечно малый тетраэдр должен

испытывать бесконечно большое ускорение. Следовательно, составляющие в направлении  $Ox$  находятся в равновесии, так что

$$p_{xx}ABC = l_1 p_{xx}OBC + l_2 p_{yy}OCA + l_3 p_{zz}OAB,$$

(где  $ABC$ ,  $OBC$  и т. д.— площади соответствующих треугольников), а поскольку  $OBC = l_1 ABC$  и т. д. (где  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  — направляющие косинусы и  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ ), то

$$p_{xx} = l_1^2 p_{xx} + l_2^2 p_{yy} + l_3^2 p_{zz}, \quad (1.3.16)$$

и с учетом (1.3.11)

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}. \quad (1.3.17)$$

Последний результат означает, что можно ввести величину, которая называется *средним давлением*, а именно

$$p_m = -1/3(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \quad (1.3.18)$$

Эта величина инвариантна в любой системе координат.

Силы, действующие в направлении  $Oz$  на тетраэдр, изображенный на рис. 1.3.4, также находятся в равновесии, так что

$$p_{xz}ABC = n_1 p_{xx}OBC + n_2 p_{yy}OCA + n_3 p_{zz}OAB,$$

т. е.

$$p_{xz} = l_1 n_1 p_{xx} + l_2 n_2 p_{yy} + l_3 n_3 p_{zz}. \quad (1.3.19)$$

Соотношение (1.3.7) между напряжениями и скоростями деформации может быть переписано в виде

$$p_{xx} = -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu e_{xx}. \quad (1.3.20)$$

Отсюда и из подобных же выражений для  $p_{yy}$  и  $p_{zz}$  теперь можно получить соотношение между напряжением и скоростью деформации в первоначальных координатах  $Oxyz$ . Уравнения (1.3.9) (1.3.16) и (1.3.20) дают

$$\begin{aligned} p_{xx} &= (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + \mu(l_1 e_{xx} + l_2 e_{yy} + l_3 e_{zz}) = \\ &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu e_{xx}. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Поскольку оси перпендикулярны, т. е. скалярное произведение  $l_i n_i = 0$ , подстановка (1.3.20) в (1.3.19) и использование (1.3.13) приводят к

$$p_{xz} = \mu e_{xz}. \quad (1.3.22)$$

Уравнения (1.3.21) и (1.3.22) дают зависимость напряжений  $p_{ij}$  от скоростей деформации  $e_{ij}$ , выраженную через два коэффициента вязкости, которые являются физическими свойствами

жидкости и имеют размерность  $L^2T^{-1}$ . Теперь с использованием (1.3.18) среднее давление запишется в виде

$$\begin{aligned} p_m &= -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = \\ &= -\frac{1}{3}[-3p + 3\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})] = \\ &= p - (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Величина  $p$ , которая выше была названа нормальным давлением, является одной и той же для компонент напряжения в каждом из уравнений (1.3.7) из-за предположения об изотропности жидкости. Когда дивергенция скорости равна 0 и плотность не меняется,  $p_m = p$ . Не существует способа найти какое-либо различие между  $p_m$  и  $p$  в любой ситуации, когда  $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$ , если только коэффициент  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  не является большой величиной. Хотя  $p_m = p$ , когда движения нет, отсюда не следует, что эти величины обязательно всегда равны, поэтому  $p$  и было определено в (1.3.7) как константа. Сейчас мы вывели соотношение (1.3.23), и некоторые авторы делают логическую ошибку, утверждая, что давление  $p$  всегда то же самое, что и  $p_m$ , поскольку его нельзя определить иначе, как указав способ его измерения, отличающийся от способа измерения  $p_m$ . Для определения величины  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  нам необходим либо эксперимент, либо теоретические соображения. Кинетическая теория показывает, что величина  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  равна 0, когда молекулы занимают пренебрежимо малую часть всего объема, и хотя этот довод неприменим для жидкости, это не играет роли, поскольку тогда же очень мала и  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ . Не было предложено какого-либо способа измерений величины  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ . Поэтому обычно теорию развивают в предположении, что эта величина равна 0 и что напряжения и скорость деформации связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu e_{xx}, \\ p_{yz} &= \mu e_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.24)$$

или

$$p_{ij} = -\sigma_{ij} (p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu e_{ij}. \quad (1.3.25)$$

Теперь можно получить уравнение движения жидкости, приравняв полную производную импульса для единичного объема сумме сил, действующих на этот единичный объем. Таким образом, имеем

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}, \quad (1.3.26)$$

где  $\mathbf{F}$  — массовая сила, пропорциональная массе. В нашем случае  $\mathbf{F} = \mathbf{g}$ .

Подставляя (1.3.25) в (1.3.26), получим

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2/3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu e_{ij}). \quad (1.3.27)$$

В случае, когда вязкость  $\mu$  одна и та же для всех точек жидкости и, следовательно, постоянна в последних двух членах, можно написать  $v = \mu/\rho$  и получить

$$\frac{dv_i}{dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2/3 \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.3.28)$$

Величина  $\nu$  называется *кинематической вязкостью*, поскольку относится к движению. Величина  $\mu$  называется *динамической вязкостью* и может быть определена как сила, которая при течении с напряжениями сдвига, по модулю равными единице, действует на единичную площадку в направлении сдвига. В случае плоского движения, в котором  $v_i$  меняется в направлении  $j$ , сила равна  $\mu (\partial v_i / \partial x_j)$  и ориентирована в направлении  $i$ . Если эта сила в свою очередь изменяется в направлении  $j$ , то она порождает силу, действующую на единичный объем в направлении  $i$  и равную  $(\partial / \partial x_j) \mu (\partial v_i / \partial x_j)$  [или  $\mu (d^2 v_i / dx_j^2)$ , если  $\mu$  постоянна по пространству]. Это наиболее важный аспект влияния вязкости на движение, обусловленный изменением тангенциальных напряжений от одной точки жидкости к другой. Указанная сила равна 0, если градиенты скорости линейны.

Часто считается, что в турбулентном течении вихри порождают эффект, подобный эффекту молекулярной вязкости, но большего масштаба. Однако если предположить, что  $\mu$  представляет собой турбулентную вязкость, то следует использовать уравнение (1.3.27), а не (1.3.28), поскольку коэффициент обычно меняется в жидкости от точки к точке. В частности, горизонтальное течение воздуха над землей имеет пограничный слой, в котором и градиент скорости, и степень турбулентности убывают с высотой, причем в одних случаях более важно изменение первой из этих величин, а в других случаях — второй.

Применение данной теории к турбулентным течениям должно производиться с большой осторожностью, поскольку турбулентность, как правило, не изотропна, так что предположения, на которых основываются выведенные уравнения, обычно не выполняются. Это не так существенно, когда скорость всюду имеет одно и то же направление, скажем  $x$ , а ее величина изменяется только в каком-нибудь одном, например вертикальном, направлении, т. е.  $z$ .

Уравнение (1.3.28) может быть переписано в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + 1/3 \nu \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (1.3.29)$$

Это уравнение Навье—Стокса. Оно применимо для движения жидкости с однородными изотропными свойствами вязкости, когда напряжение мгновенно и линейно зависит от скорости деформации. Без вязких членов это — классическое уравнение для невязкой жидкости, а именно уравнение (1.1.4). Наиболее важные для практики вязкие члены уже были упомянуты, а именно те члены, которые порождают тангенциальные напряжения, такие, как  $\nu(\partial^2 v/\partial x^2)$  и  $\nu(\partial^2 w/\partial x^2)$ , которые представляют собой силы, обусловленные переменными градиентами в направлении  $x$  для  $y$ -й и  $z$ -й компонент скорости и действующие на единичный объем жидкости в направлениях  $y$  и  $z$ . Эти силы действуют таким образом, чтобы «выпрямить» профили скорости, и исчезают, когда профили линейны.

С последним членом в (1.3.29) мы не будем особенно часто встречаться в этой книге, поскольку мы едва ли будем рассматривать какие-либо ситуации, когда  $\text{div } v$  не мала, или, более того, имеет значительный градиент в случае, когда вязкость  $\nu$  не пренебрежимо мала или ее турбулентный эквивалент известен с некоторой ошибкой.

## 1.4. Уравнение завихренности

Рассмотренная в разд. 1.1 теорема Кельвина о минимуме кинетической энергии гласит, что из всех течений, удовлетворяющих условиям на заданных твердых границах, безвихревое движение обладает наименьшей кинетической энергией. Более того, оно является единственным и возникает при ударном воздействии границы на жидкость. Если жидкость уже обладает некоторой завихренностью, то ее кинетическая энергия будет больше, но наличие завихренности не увеличивает перенос жидкости. Можно считать, что безвихревое движение переносит массу, а завихренность — кинетическую энергию, причем часто в форме турбулентного процесса, который, впрочем, может и не реализовываться в некоторых случаях. Так, если воду в сосуде помешать ложкой и жидкость будет продолжать движение после того, как ложка вынута, то это значит, что данная масса воды приобрела некоторую завихренность, поскольку в покоем сосуде безвихревое движение отсутствует.

Это рассуждение применимо только к несжимаемым жидкостям постоянной плотности. Когда плотность меняется, движение, устанавливающееся от удара со стороны границ, содержит завихренность, а если жидкость сжимаема, в ней возникают волны. В процессе распространения волн происходят внутренние движения, которые не могут быть однозначно определены движением границ в данный момент. Мы не будем рассматривать

распространение звуковых волн, но обратим внимание на механизмы, создающие завихренность и сопутствующие ей явления. В молочной бутылке возникает сложное движение, если вращать ее ладонями попеременно в противоположных направлениях; движение воздуха в автомашине, резко поворачивающей за угол, начинается как безвихревое, но скоро усложняется и воздух (как и молоко в предыдущем примере) начинает перемешиваться. Перемешивание достигается только вследствие возникновения завихренности.

Вода из конического стакана (или любого другого сосуда с крутыми стенками) может расплескаться при быстром вращении без изменения ориентации стакана по малому кругу в горизонтальной плоскости. В результате такого движения стакана во вращение приходит вся масса жидкости. Для эксперимента с передачей вращения жидкости очень подходит графин или химическая колба. В соответствии с теоремой Кельвина о циркуляции вращение не может быть сообщено жидкости за счет движения границ, тем не менее в рассматриваемом эксперименте при вращательном движении сосуда возникает видимое вращение жидкости. Встряхивание и вращение колбы является излюбленным приемом у химиков, проводящих титрование при интенсивном перемешивании жидкости, когда они хотят дополнительно растворить еще одну каплю реагента во всем объеме жидкости. В этом случае завихренность возникает за счет того, что разрывы скорости на свободной поверхности переходят в глубь жидкости.

Завихренность, таким образом, ассоциируется с турбулентностью и неупорядоченным преобразованием потенциальной энергии в кинетическую энергию, которая не участвует в установившемся макромасштабном переносе жидкости.

В гидравлических системах и устройствах завихренность чаще всего бесполезна, однако она может пригодиться, если нужно что-то перемешивать. Завихренность возникает в течениях за препятствиями, а также при конвекции, когда жидкость нагревается снизу или охлаждается сверху, или когда соль растворяется в более легкой жидкости, будучи внесенной сверху. Уравнение завихренности, которое мы теперь выведем, описывает возникновение завихренности, обозначаемой через  $\text{rot } \mathbf{v}$  или  $\boldsymbol{\omega}$ .

Уравнение движения (1.3.29) может быть записано в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho F - \text{grad } p + \mu (\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \text{grad div } \mathbf{v}),$$

и для случая, когда вязкость  $\mu$  постоянна [иначе необходимо использовать уравнение в форме (1.3.27)], можно, применив к обеим частям операцию  $\text{rot}$ , избавиться от членов с  $p$  и  $\text{div } \mathbf{v}$ ,



которые представлены своими градиентами. Таким образом, для случая, когда единственной массовой силой является сила тяжести, получаем

$$\operatorname{rot} \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \operatorname{rot} (\rho \mathbf{g}) + \mu \operatorname{rot} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Используя тождества (1.2.6), (1.2.8), (1.2.9) и (1.2.12), получим

$$\rho \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \right) + \operatorname{grad} \rho \times \mathbf{f} = \operatorname{grad} \rho \times \mathbf{g} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega},$$

где ускорение жидкости  $d\mathbf{v}/dt$  обозначено через  $\mathbf{f}$ . Операторы  $\operatorname{rot}$  и  $\partial/\partial t$  перестановочны, так что с учетом (1.2.11) можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{\omega} = \\ = \operatorname{grad} \ln \rho \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

откуда, используя (1.2.9), придем к

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (1.4.1)$$

Здесь мы ввели символ  $\mathbf{R}$  для обозначения вектора  $(1/\rho) \operatorname{grad} \rho = \operatorname{grad} \ln \rho$ , который представляет поле плотности. Это — *уравнение завихренности*<sup>1)</sup>, а четыре члена в правой части описывают механизмы, за счет которых меняется завихренность некоторого объема жидкости; левая часть равна полной производной завихренности по времени. Перейдем теперь к рассмотрению этих механизмов.

Смысл первого члена в правой части лучше всего пояснить, перенеся его в левую. При помощи уравнения неразрывности, которое имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.4.2)$$

получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) + \frac{\nu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (1.4.3)$$

которое показывает, что второй член в правой части (1.4.1) представляет механизм, определяющий  $\boldsymbol{\omega}$ , когда  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  равна 0,

<sup>1)</sup> Обычно в литературе по метеорологии это уравнение называют уравнением вихря, но поскольку термин «вихрь» нами будет впоследствии использоваться в другом смысле, то, во избежание путаницы, мы будем продолжать употреблять здесь термин «завихренность», также принятый в гидродинамике.— *Прим. перев.*

или  $\omega/\rho$ , когда  $\text{div } \mathbf{v}$  не равна 0. Нашей целью теперь является выяснение физического смысла членов, находящихся в правой части уравнения (1.4.3), и их роли в образовании завихренности. При адиабатическом течении хорошо перемешанной жидкости плотность  $\rho$  пропорциональна  $r^{1/\nu}$ , так что вектор  $\mathbf{R}$ , коллинеарный  $\text{grad } \rho$ , коллинеарен также и  $\text{grad } p$ . Если на время пренебречь эффектом вязкости, представленным послед-

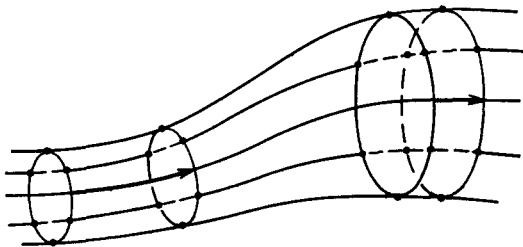


Рис. 1.4.1. Связь между вихревыми линиями, вихревыми трубками и вектором завихренности

ним членом в (1.4.3), то уравнение движения примет вид (1.1.4), т. е.

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{g} - \mathbf{f}, \quad (1.4.4)$$

а в этом случае  $\mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) = 0$ .

Это позволяет обсуждать смысл отдельных членов в уравнении (1.4.1), не рассматривая член с  $\text{div } \mathbf{v}$ , но помня, что при  $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$  результаты, полученные для  $\omega$ , справедливы для  $\omega/\rho$  при условии, что течение адиабатическое, а жидкость хорошо перемешивается.

Мы уже начали обсуждать смысл члена  $(\omega \cdot \text{grad})\mathbf{v}$  после получения формулы (1.1.15), когда было показано, что если жидкость невязкая и либо изэнтропическая (хорошо перемешанная и адиабатическая), либо имеет постоянную плотность, то число вихревых линий, пронизывающих контур, все время состоящий из одних и тех же частиц, будет постоянно. Следовательно, вихревые линии движутся вместе с жидкостью.

Представим себе, что в жидкости имеется множество меченых линий и что они представляют поле вектора  $\mathbf{a}$ , которое определяется этими линиями следующим образом: направление вектора в точке совпадает с направлением касательной к линии, а его абсолютная величина равна количеству линий, проходящих через единичную площадь. С другой стороны, можно пометить вихревые линии таким образом, чтобы расстояние

между двумя последовательными метками равнялось величине  $a$ . Тогда там, где линии отстоят далеко друг от друга, интервалы между метками окажутся небольшими, что указывает на малую абсолютную величину вектора. Для вихревых трубок при такой маркировке объем, заключенный в ней между двумя соседними отметками, постоянен по всей длине трубки (рис. 1.4.1). Естественно, вихревая трубка может быть разме-

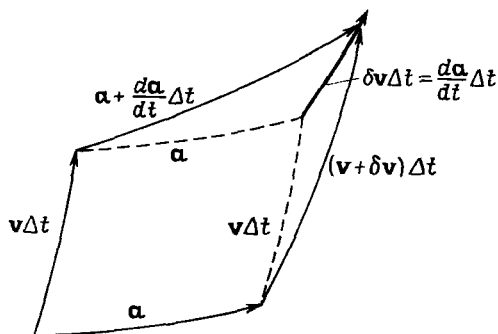


Рис 1.4.2. Адвекция вектора завихренности.

чена таким образом только в случае, если  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ .

Если какое-либо течение обладает нулевой дивергенцией, то объем, занимаемый данным множеством частиц, остается постоянным, так что соотношение между множеством линий тока и определяемым этим множеством векторным полем сохраняется, когда линии тока переносятся вместе с течением. Если вектор  $\mathbf{a}$  рассматривать теперь как отрезок одной из линий тока, то за время  $\Delta t$  его начальная и конечная точки будут смещены полем скоростей на расстояния соответственно  $\mathbf{v}\Delta t$  и  $(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})\Delta t$ , где  $\delta\mathbf{v}$  — разность между скоростями частиц в начале и конце вектора  $\mathbf{a}$  (рис. 1.4.2). Тогда при малом  $\mathbf{a}$

$$\delta\mathbf{v} = (\mathbf{a} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \quad (1.4.5)$$

с точностью до малых высшего порядка. В конце временного интервала  $\Delta t$  вектор  $\mathbf{a}$  станет равным  $\mathbf{a} + (d\mathbf{a}/dt)\Delta t$ , так что его приращение будет равно одновременно  $(d\mathbf{a}/dt)\Delta t$  и  $(\mathbf{a} \cdot \text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v}\Delta t$ . Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = (\mathbf{a} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \quad (1.4.6)$$

представляет собой уравнение изменения векторного поля  $\mathbf{a}$ , определенного в данной жидкости характеристиками ее движения. Это форма уравнения получена из (1.4.1) для  $\boldsymbol{\omega}$ , если жидкость несжимаема, имеет постоянную плотность и невязкая. Для изэнтропической жидкости член с  $\mathbf{R}$  в (1.4.3) обращается в 0, и завихренность должна определяться из

рассмотрения вихревых линий, переносимых жидкостью (либо числом линий, пронизывающих единичную площадку, либо длиной отрезка вихревой трубки, имеющего единичную массу).

Проекция на направление  $x$  первых двух членов правой части уравнения (1.4.1),  $-\omega \operatorname{div} \mathbf{v} + (\omega \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v})$ , равна

$$-\xi \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.4.7)$$

и представляет, следовательно, вклад этих членов в значение производной  $d\xi/dt$ . Первый член в (1.4.7) показывает, что если уже имеется некоторое положительное значение  $\xi$ , составляющей завихренности в направлении  $x$ , то завихренность увеличится, если величина  $\partial v/\partial y + \partial \omega/\partial z$  отрицательна. Это просто отражает тот факт, что если жидкость расширяется или сжимается в плоскостях, перпендикулярных оси  $x$ , то момент инерции относительно этой оси соответственно возрастает или убывает, а в силу закона о сохранении количества движения скорость вращения относительно оси  $x$  также соответственно убывает или возрастает. Этот тип деформации несколько специфичен, и маловероятно, что он будет иметь место; более вероятно, что дивергенция точно или примерно равна 0, а в этом случае  $x$ -компонента вектора завихренности может быть записана в виде

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.4.8)$$

Этим выражением описывается тот факт, что если жидкость испытывает растяжение в направлении оси  $x$ , то она подвергается сжатию в плоскостях, перпендикулярных этой оси. По этой причине принято считать, что *при растяжении вихревых линий абсолютная величина векторов завихренности на них возрастает* (рис. 1.4.1).

Второй и третий члены в уравнении (1.4.7) подобны по структуре, поэтому мы рассмотрим только член

$$\eta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.4.9)$$

который показывает, что если уже существует  $\eta$ , ненулевая компонента завихренности по оси  $y$ , а  $u$ , компонента скорости по оси  $x$ , меняется в направлении  $y$  так, как если бы происходил поворот вихревой линии, первоначально совпадавшей с осью  $y$ , то оба эти фактора порождают составляющую завихренности вдоль оси  $x$  и создают некоторое приращение вели-

чины  $\xi$  (рис. 1.4.3). Возникновение завихренности за счет градиентов плотности описывается выражением

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}). \quad (1.4.10)$$

Оно показывает, что ускорение создает эффект, подобный гравитации, а инерционная и гравитационная массы вещества в данном рассмотрении совпадают. Образующаяся завихренность действует таким образом, чтобы поверхности постоянной

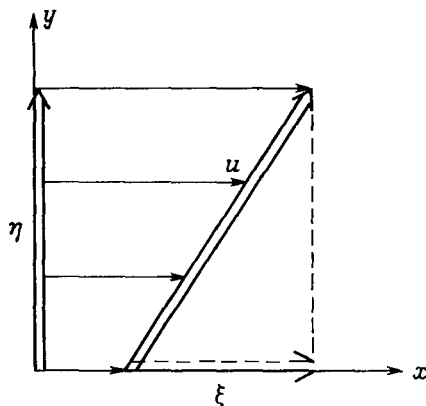


Рис 1.4.3. Поворот вихревых линий в потоке.

плотности в жидкости стали нормальными к вектору  $\mathbf{g} - \mathbf{f}$ . Когда жидкость находится в покое,  $\mathbf{f}$  равно 0 и получается тривиальный результат: негоризонтальные поверхности равной плотности, будучи предоставленными сами себе, стремятся путем поворота принять горизонтальное положение.

Если вектор  $\mathbf{R}$  перпендикулярен поверхностям постоянной плотности, то ось, относительно которой возникает вращение, будет горизонтальна и перпендикулярна одновременно  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{R}$ . Если жидкость испытывает ускорение (например, когда она течет по изогнутой трубе), центробежные силы добавляются к силе тяжести. Если ускорение ориентировано вдоль направления движения, как в тележке, ускоряемой по прямой линии, то жидкость будет вести себя так, как если бы  $\mathbf{g}$  действовало в направлении отвеса, прикрепленного к тележке. Вода в частично наполненном сосуде, находящемся на тележке, будет набегать на заднюю стенку сосуда, когда тележка устремится вперед. В центрифуге или подобной ей вращающейся системе  $\mathbf{g} \ll \mathbf{f}$  и, следовательно, поверхности постоянной плотности стремятся стать цилиндрическими; при этом ось цилиндров практически совпадает с осью вращения.

Возникновение завихренности за счет постоянной вязкости описывается уравнением

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (1.4.11)$$

При этом для каждой компоненты вектора  $\omega$  справедливы соотношения типа

$$\frac{d\xi}{dt} = \nu \nabla^2 \xi. \quad (1.4.12)$$

Это уравнение совпадает по форме с уравнением теплопроводности, где  $\nu$  аналогично коэффициенту теплопроводности, а  $\xi$  — температуре. Эффект вязкости проявляется в таком перераспределении завихренности, при котором ее градиент становится все более близким к линейному. Обычно вектор завихренности в конце концов оказывается распределенным достаточно равномерно, и вращение жидкости становится все более похожим на вращение твердого тела. Когда градиент  $\xi$  увеличивается в направлении  $x$ , поток, переносимый  $\xi$  в указанном направлении, уменьшается (увеличивается в противоположную сторону) и значение  $\xi$  возрастает.

Уравнение (1.4.12) справедливо и в том случае, если вязкость  $\nu$  переменна, но зависит только от  $\rho$ . Если  $\rho$  — постоянная, а  $\mu$  — переменная, то соответствующее уравнение должно выводиться из (1.3.27). Заметим, что проделать это в векторной форме [аналогично тому, как выводилось уравнение (1.4.1)] даже в случае, когда всюду  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , довольно сложно. Случай переменного  $\mu$  реализуется при турбулентном течении, когда напряжения в жидкости порождаются вихрями, интенсивность которых существенным образом меняется по объему жидкости. Рассматривать столь сложный процесс удобнее, если провести все возможные упрощения уравнений применительно к отдельным частным случаям, что и будет предпринято в гл. 7.

## 1.5. Теорема о сохранении вихревых линий на поверхностях постоянной плотности

В случае невязкой жидкости уравнение завихренности имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega \text{ div } \mathbf{v} + (\omega \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}). \quad (1.5.1)$$

Первый член в правой части этого уравнения параллелен вектору завихренности. Второй член представляет изменение вектора завихренности за счет движения вихревых линий в жидкости. Третий член описывает возникновение составляющей

вектора завихренности, перпендикулярной  $\mathbf{R}$ , т. е. принадлежащей поверхности постоянной плотности  $\rho$ . Следовательно, *если в какой-либо момент времени вихревые линии принадлежали поверхностям постоянной плотности, называемым изопикническими поверхностями, то (поскольку вся новая завихренность либо создается на таких поверхностях, либо перемещается вместе с ними) они будут принадлежать этим поверхностям и в дальнейшем.*

Только четыре обстоятельства могут изменить эту ситуацию. Вязкость может породить значительную завихренность, вектор которой не будет принадлежать поверхностям с постоянной плотностью или по каким-либо причинам вектор завихренности в начальный момент может не находиться на них. Свободная поверхность может претерпеть столь резкий изгиб, что возникнут разрывы скорости, которые затем будут диффундировать в толщу жидкости за счет вязкости, или плотность может измениться вследствие нагрева или какого-либо другого воздействия.

Случай, когда и течение, и изопикнические поверхности горизонтальны, является для нас особенно интересным. Если в этом случае вектор завихренности также первоначально горизонтален, то он сохранит ту же ориентацию ниже по потоку. Эта ситуация обычна для атмосферы, поскольку, хотя и существует несомненная вертикальная составляющая вектора завихренности, обусловленная вращением Земли вокруг своей оси, ее величина обычно очень мала по сравнению с горизонтальной составляющей, которая возникает вследствие изменения скорости или направления ветра с высотой.

В атмосфере вдали от подстилающей поверхности завихренность практически целиком генерируется воздействием силы тяжести на градиенты плотности. Это означает, что вектор нового количества завихренности всегда горизонтален и находится на изопикнических поверхностях. Ускорения воды в океане и воздуха в атмосфере возникают в результате малых отклонений плотности от среднего значения в горизонтальных плоскостях, но всегда малы по сравнению с  $g$ , так что членом  $\mathbf{R} \times \mathbf{f}$  обычно можно пренебречь.

Как показано в гл. 5, математическое описание распространения волн в атмосфере столь сложно, что почти все полученные результаты относятся к случаю, когда применима данная теорема и при этом только для двумерного случая. Однако вопреки очевидной специфичности случая, эта теорема тем не менее применима к большинству реальных ситуаций.

Следует отметить, например, что течение воздуха над горизонтальной подстилающей поверхностью приобретает завихренность за счет ее шероховатости, но рассмотренная теорема

сохраняет силу для этой ситуации, поскольку векторы такой завихренности горизонтальны и лежат на поверхностях, вдоль которых происходит течение.

## 1.6. Адиабатические движения в атмосфере

Если  $T$  и  $p$  — температура и давление воздуха, то уравнение состояния имеет вид

$$p = R\rho T, \quad (1.6.1)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная (не следует путать ее с модулем  $\mathbf{R}$ , который обычно обозначается через  $\beta$  или, некоторыми авторами, через  $S$ ). Для адиабатических процессов давление и плотность связаны соотношением

$$p = k_0 \rho^\gamma, \quad (1.6.2)$$

где  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей воздуха, равное примерно 1,4, а коэффициент  $k_0$  постоянен для данного элемента жидкости и остается таким во время движения, хотя в стратифицированной жидкости и меняется по пространству.

Определим потенциальную температуру  $\theta$  и обратную ей величину  $\tau$  соотношением

$$\theta = \frac{1}{\tau} = T \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (1.6.3)$$

где  $p_1$  — стандартное давление, принимаемое обычно в практической метеорологии равным 1000 мбар, что в среднем соответствует давлению на уровне моря. Приведенное давление  $\bar{\omega}$  определяется соотношением

$$\bar{\omega} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (1.6.4)$$

и, таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{1}{\tau} \text{grad } \bar{\omega}. \quad (1.6.5)$$

Поскольку молекулярная вязкость играет пренебрежимо малую роль в атмосфере (за исключением явлений очень малого масштаба, таких, как обтекание дождевых капель, капельных облачков, падающих листьев и т. п.), уравнение движения (1.3.29) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\tau} \text{grad } \bar{\omega}, \quad (1.6.6)$$



а уравнение для вектора завихренности (1.4.1) преобразуется в уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega \operatorname{div} \mathbf{v} + (\omega \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}), \quad (1.6.7)$$

где теперь  $\mathbf{R} = (1/\tau) \operatorname{grad} \tau$ .

Таким образом, при рассмотрении движения воздуха, который представляет собой сжимаемую среду, часто можно использовать результаты, полученные для несжимаемой жидкости, включая и те, которые относятся к завихренности, просто подставляя  $\tau$  вместо  $\rho$ . В тех случаях, когда давление не удается исключить из уравнения, можно заменить  $\rho$  на  $\bar{\omega}$ . Однако этого делать нельзя, если действуют существенно неадиабатические механизмы. В случаях, когда вязкость играет важную роль, такая замена не предусматривалась, поскольку мы обычно не рассматривали сжимаемые жидкости. Эта простая замена символов учитывает тот факт, что при вертикальном перемещении вследствие изменения плотности воздуха под действием его собственной тяжести. Однако при этом необходима некоторая модификация уравнения неразрывности, она будет рассмотрена в гл. 5 [уравнение (5.7.6)].

## 1.7. Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости в стационарном движении

Для невязкой жидкости уравнение установившегося движения имеет вид

$$\operatorname{grad} \frac{1}{2} q^2 - \mathbf{v} \times \omega = -\operatorname{grad} gz - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (1.7.1)$$

где ось  $z$  направлена вертикально. Если теперь подставить

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p &= \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} - p \operatorname{grad} \frac{1}{\rho}, \quad \text{или [см. (1.6.5)]} \\ \frac{1}{\tau} \operatorname{grad} \bar{\omega} &= \operatorname{grad} \frac{\bar{\omega}}{\tau} - \bar{\omega} \operatorname{grad} \frac{1}{\tau}, \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

то получается уравнение

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} q^2 + \frac{\bar{\omega}}{\tau} + gz \right) - \bar{\omega} \operatorname{grad} \frac{1}{\tau} = \mathbf{v} \times \omega \quad (1.7.3)$$

и соответствующее уравнение, содержащее  $p$  и  $\rho$ , которое мы используем в конце раздела.

Пусть первоначально (т. е. где-то выше по течению)  $\tau$  постоянно вдоль линий тока и вихревых линий. Это означает, что существуют изэнтропические поверхности, содержащие оба типа этих линий тока. Для несжимаемой жидкости это соответствует постоянной плотности на линиях тока и вихревых линиях. В таком случае члены  $v \cdot \text{grad}(1/\tau)$  и  $\omega \cdot \text{grad}(1/\tau)$  исчезают. Написав

$$gH = 1/2q^2 + \frac{\bar{\omega}}{\tau} + gz, \quad (1.7.4)$$

из (1.7.3) получим

$$v \cdot \text{grad}(gH) = \omega \cdot \text{grad}(gH) = 0. \quad (1.7.5)$$

Следствием (1.7.5) будет то, что  $gH$  постоянно вдоль вихревых линий и линий тока и поэтому постоянно на поверхностях, содержащих эти линии. Такие поверхности мы назовем поверхностями Бернулли.

Предположение об изэнтропических поверхностях существенно для атмосферы (и по тем же причинам для океана). В тех случаях, когда неприменима изопикническая теорема, т. е. вихревые линии не лежат на изэнтропических поверхностях и не стремятся совпасть с ними в будущем, движение будет почти наверняка нестационарным, и из факта постоянства  $gH$  не удается получить какого-либо полезного результата.

*Теорема Бернулли применима только для обратимых течений*, поскольку она по-существу является утверждением о сохранении энергии и, следовательно, не верна при описании течений вязкой жидкости. Классическим результатом применения этой теоремы для жидкости постоянной плотности, когда  $\text{grad } \tau = \text{grad } \rho = 0$ , является

$$\text{grad}(gH) = v \times \omega, \quad (1.7.6)$$

т. е.  $gH$  постоянно одновременно вдоль вихревых линий и линий тока. Так как  $gH$  необязательно постоянно по всей массе жидкости, то в этом случае всегда существуют поверхности Бернулли и каждая линия тока определяет некоторую поверхность, а именно ту, которая содержит все вихревые линии, проходящие через нее, и наоборот. Таким образом, *любая линия тока, пересекающая одну из вихревых линий, проходящих через заданную линию тока, должна пересечь все такие вихревые линии*. Это положение не выполняется в том случае, когда завихренности нет вообще или когда  $gH$  постоянно для всей массы жидкости. Для хорошо перемешанной жидкости  $\tau$  постоянно, так что давление может быть выражено через  $p$  [см.

рассуждения, следующие за формулой (1.1.16)], и в этом специальном случае

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \int \frac{dp}{\rho}; \quad (1.7.7)$$

таким образом, выражение

$$gH = \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \quad (1.7.8)$$

будет постоянным на поверхности Бернулли. *Этот хорошо известный случай, который можно найти в любых элементарных учебниках, широко используется в теории нестратифицированных сжимаемых жидкостей. Если движение является также безвихревым, то правая часть (1.7.6) становится равной нулю и  $gH$  будет постоянным по всей жидкости.* Кроме того, если течение нестационарное, но безвихревое, можно написать  $v = \text{grad } \varphi$ , и тогда уравнение движения приводит к выражению

$$gH = \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const}, \quad (1.7.9)$$

справедливого для всего объема жидкости. Эти выводы не относятся к течениям стратифицированных или всплывающих масс жидкости, так как их существенной особенностью является наличие значительной завихренности.

## 1.8. Статическая устойчивость

Потенциальная температура, определяемая выражением (1.6.3), может быть записана в виде

$$\theta = \frac{p_1}{R\rho} \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = k_0^{1/\gamma} \frac{p_1^{1/\gamma}}{R}. \quad (1.8.1)$$

*Коэффициент статической устойчивости* определяется как обусловленная архимедовой силой восстанавливающая сила, которая действует на единичную массу жидкости, смещающуюся адиабатически на единичное расстояние в вертикальном направлении. Этот коэффициент положителен, если сила имеет направление, противоположное смещению. В несжимаемой жидкости он равен  $-(g/\rho)(\partial\rho/\partial z)$ , поскольку  $\delta\rho$  представляет собой приращение плотности, равное  $\delta z(\partial\rho/\partial z)$ . Поскольку для газа коэффициент расширения равен  $1/T$ , коэффициент устойчивости может быть выражен через изменение потенциальной

температуры. Таким образом, коэффициент статической устойчивости равен

$$g\beta = -\frac{g}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{g}{\gamma k_0} \frac{\partial k_0}{\partial z}, \quad (1.8.2)$$

причем производные берутся для невозмущенного статического состояния. Величина  $\beta$  положительна, когда потенциальная температура возрастает с высотой.

Температурный градиент, при котором восстанавливающая сила равна нулю, а смещаемый объем жидкости, испытывая адиабатическое расширение, остается неотличимым от окружающей среды, называется *адиабатическим*. Он получается при совместном решении уравнений (1.6.1) и (1.6.2) с уравнением гидростатики (1.1.5). Исключив  $p$  и  $\rho$  и дифференцируя, чтобы найти  $\partial T/\partial z$ , получим выражение

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{(\gamma - 1)g}{\gamma R} = \Gamma, \quad (1.8.3)$$

которое представляет собой константу, определяемую ускорением силы тяжести и свойствами воздуха. Для земной атмосферы на уровне моря эта константа равна 9,86 К/км и может приниматься равной 1 К на 100 м по всей толщине атмосферы с достаточной для практических целей точностью.

Поскольку вертикальный адиабатический градиент не зависит от температуры, это означает, что если атмосфера обладает нейтральной стратификацией, а у поверхности земли температура воздуха составляет около 300 К, то на высоте 30 км должен был бы достигаться абсолютный нуль температуры. Радиационное равновесие между Землей при 300 К и космическим пространством, имеющим температуру 0 К, должно наступать при  $[1/2(300)^4]^{1/4}$  К, т. е. примерно при 250 К, в соответствии с законом Стефана—Больцмана, так что можно заключить, что атмосфера сильно стратифицирована, а температура в стратосфере на высоте 30 км, возможно, доходит до 250 К.

Градиент, при котором воздушная масса при подъеме в стратифицированной атмосфере испытывает адиабатическое охлаждение, будет почти таким же, как в случае хорошо перемешанного атмосферного слоя или слоя с безразличной стратификацией. Разница получается вследствие того, что применительно к выражению (1.8.3) под  $\rho$  понимается не плотность самого перемещаемого элемента, а плотность окружающего воздуха. Однако на практике эта разница не играет особой роли в силу наличия иных погрешностей. Таким образом, объем воздуха не может быстро сместиться в окружающей среде без возникновения разности температур, вызывающей перемешивание, не считая случая, когда причиной такого смещения яв-

ляются волны; в последнем случае вызванные волнами вариации давления малы по абсолютной величине. Поэтому с практической точки зрения мы не сделаем большой ошибки, если во всех случаях будем считать, что не испытывающая перемешивания с окружающей средой вертикально поднимающаяся воздушная масса будет охлаждаться на 1 К через каждые 100 м.

В дальнейшем нам понадобится выражение для плотности перемещаемого элемента. Если  $\rho_0$  — его первоначальная плотность, то для адиабатического вертикального перемещения  $\zeta$  соотношение

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.8.4)$$

выполняется точно, а выражение

$$T = T_0 + \Gamma \zeta \quad (1.8.5)$$

соблюдается приблизительно. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= \left( 1 + \frac{\Gamma}{T} \zeta \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \approx 1 + \frac{\Gamma}{(\gamma-1)T} \zeta = \\ &= 1 - \frac{g}{\gamma R T} \zeta = 1 - \frac{g}{c^2} \zeta, \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

где

$$c = (\gamma R T)^{1/2} \quad (1.8.7)$$

— скорость звука, приблизительно равная 316 м/с. Приближенная формула (1.8.6) пригодна при условии

$$0,3 \frac{g}{c^2} \zeta \ll 1, \quad (1.8.8)$$

левая часть которого задается отношением первого отброшенного члена к последнему используемому. Условие (1.8.8) требует, чтобы для смещения  $\zeta$  выполнялось неравенство  $\zeta \ll 30$  км, и поэтому оно заведомо применимо для вертикальных смещений порядка  $\sim 3$  км, которые в свою очередь больше вертикальных расстояний, для которых в подавляющем большинстве практических ситуаций возникает необходимость применять формулу (1.8.6).

Обычная концепция статической неустойчивости заключается в том, что архимедова сила действует в направлении перемещения, вызывая тем самым ускорение в этом же направлении. Эта теория описывает поведение *всплывающих частиц*. Полезно выразить ту же концепцию в терминах

ротационного смещения. Когда поступательное движение отсутствует, уравнение вектора завихренности принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{g}, \quad \text{или} \quad \frac{d\xi}{dt} = gR \sin \varphi, \quad (1.8.9)$$

где  $\xi$  — компонента вектора завихренности в направлении оси  $x$ , предполагаемая горизонтальной, а  $\varphi$  — угловое смещение локальной вихревой трубки относительно оси  $x$ . Трубка имеет угловую скорость  $1/2\xi$ ; это означает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 1/2\xi \quad \text{и} \quad \frac{d\xi}{dt} = 2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.8.10)$$

Здесь  $R = -\beta = (1/\tau) (\partial\tau/\partial z)$  обозначает абсолютную величину

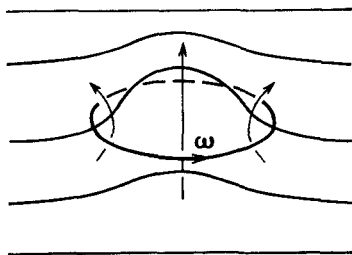


Рис 1.81. Связь между образованием вихревых колец и вертикальным смещением частиц стратифицированной жидкости.

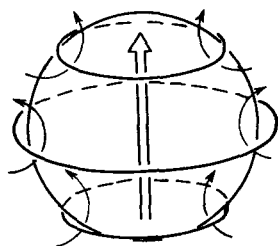


Рис. 1.82 Вихревые кольца, порожденные статической неустойчивостью и вызывающие вертикальное перемещение элементарного объема

вектора  $\mathbf{R}$  в начальном положении равновесия, так что (1.8.9) для малых  $\varphi$  принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{2\tau} \frac{\partial\tau}{\partial z} \sin \varphi = -1/2g\beta\varphi. \quad (1.8.11)$$

Если  $\beta$  отрицательно, а потенциальная температура убывает с высотой, то уравнение (1.8.11) описывает неустойчивое состояние, при котором  $\varphi$  экспоненциально возрастает со временем. Это, конечно, эквивалентно результатам, полученным из анализа вертикального перемещения объемов.

Представленная форма критерия локальной статической неустойчивости показывает, что неустойчивость порождает завихренность и не может существовать, не порождая ее. Вследствие этого происходит явление перемешивания и движение превращается в турбулентное.

Если объем жидкости в среде начинает подниматься вверх (рис. 1.8.1), то можно предположить, что причиной этого является восходящее течение, порожденное горизонтальным

тороидальным вихрем, окружающим рассматриваемый объем. Если данный объем продолжает перемещаться вверх сквозь окружающую среду (рис. 1.8.2), то его движение теперь можно интерпретировать как результат воздействия со стороны расположенных друг под другом вихревых колец, образующихся вокруг него в соответствии с (1.8.9). Движение не остается простым и скоро превращается в хитросплетение мелкомасштабных вихрей, которое сопровождается интенсивным перемешиванием частиц (см. гл. 8); это происходит из-за неустойчивости состояния, при котором любое возмущение поверхности с постоянной потенциальной температурой повсюду порождает завихренность, которая в свою очередь способствует повсеместному возникновению неупорядоченных движений.

## ЯВЛЕНИЯ В ПОТОКАХ ЖИДКОСТИ

## 2.1. Классическая гидродинамика невязкой несжимаемой жидкости

Чтобы продемонстрировать методы классической гидродинамики, а также явления, возникающие в реальных жидкостях, рассмотрим обтекание сферы невязкой жидкостью. Если завихренность отсутствует, то  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , и, следовательно, существует потенциал  $\varphi$ , определяемый выражением

$$\varphi = \int_0^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.1.1)$$

причем

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi. \quad (2.1.2)$$

Начало координат  $O$ , от которого вычисляется интеграл (2.1.1), не имеет значения, так как его смещение означает изменение  $\varphi$  на некоторую постоянную величину. Если жидкость несжимаемая, то  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  и уравнение (2.1.2) приобретает вид

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.1.3)$$

Это — уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости при безвихревом движении.

Уравнением движения будем пользоваться только для расчета давления, представляя его в виде (1.7.9), т. е. в виде уравнения Бернулли.

## 2.2. Источник, диполь, однородный поток и обтекание сферы

Потенциал

$$\varphi = -m/r, \quad (2.2.1)$$

где  $r$  — расстояние от начала координат, определяет скорость  $m/r^2$ , направленную по радиусу от начала координат, т. е. описывает течение, создаваемое источником с интенсивностью (т. е. с объемным расходом)  $4\pi m$ . Если величина  $m$  отрицательна, то имеем сток.



В сферической полярной системе координат  $r, \theta, \lambda$  в осесимметричном случае, когда все величины не зависят от  $\lambda$ , и при измерении  $x$  в направлении  $\theta=0$  потенциал

$$\varphi = Ux = Ur \cos \theta \quad (2.2.2)$$

описывает однородное течение в направлении  $x$  со скоростью  $U$ .

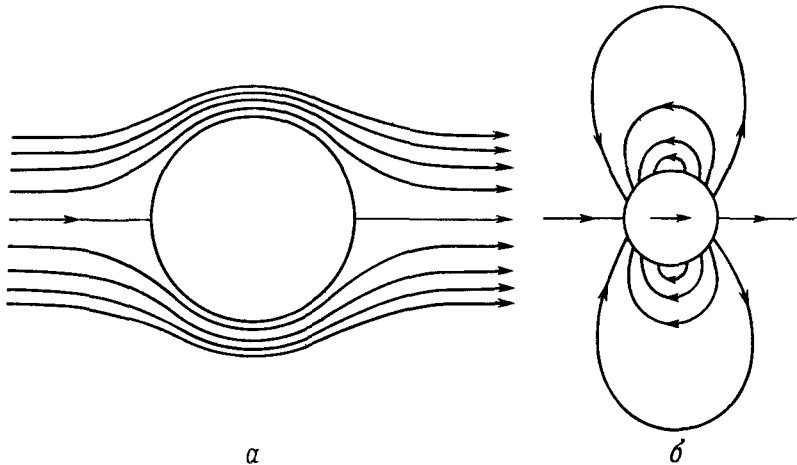


Рис. 2.21. Линии тока в течении около сферы.

$a$  — в плоскости, проведенной через ось симметрии течения;  $b$  — в системе координат, связанной с жидкостью, обтекающей сферу

### Потенциал

$$\varphi = -\mu \cos \theta / r^2. \quad (2.2.3)$$

характеризует течение, создаваемое диполем. Это становится ясно, если заметить, что

$$\delta x \frac{\partial}{\partial x} \frac{m}{r} = -m \delta x \cos \theta / r^2. \quad (2.2.4)$$

Левая часть уравнения (2.2.4) дает потенциал стока  $m/r$  и отрицательного стока  $-m/r$ , удаленного от него на расстояние  $\delta x$  в направлении  $-x$ . Величина  $\mu = m \delta x$  называется *моментом диполя*.

Если теперь сложить потенциалы диполя и однородного течения, то, так как они оба пропорциональны  $\cos \theta$ , получим

$$\varphi = \left( Ur - \frac{\mu}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2.2.5)$$

Отсюда радиальная составляющая скорости равна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left( U + \frac{2\mu}{r^3} \right) \cos \theta \quad (2.2.6)$$

и обращается в нуль при  $r=a$ , если

$$\mu = -Ua^3/2. \quad (2.2.7)$$

Иначе говоря, мы получили условие равенства нулю радиальной составляющей скорости на поверхности сферы  $r=a$ . Поэтому

$$\varphi = U \cos \theta \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \quad (2.2.8)$$

есть потенциал, описывающий обтекание однородным потоком сферы с радиусом  $a$ , помещенной в начале координат. Линии тока такого течения показаны на рис. 2.2.1,  $a$ .

### 2.3. Сила, действующая на сферу.

#### Присоединенная масса

Давление в произвольной точке поверхности неподвижной сферы получим из уравнения (1.7.9), положив  $\rho = \text{const}$ ,  $\partial/\partial t = 0$  и  $q^2 = (\text{grad } \varphi)^2$ . Тогда при  $r=a$  и постоянной скорости имеем

$$p = p_0 - \frac{1}{8}\rho U^2 (5 - 9 \cos^2 \theta). \quad (2.3.1)$$

Давление на поверхности сферы, движущейся ускоренно в покоящейся жидкости, найдем, вычтя из потенциала (2.2.8) потенциал однородного течения:

$$\varphi = Ua^3 \cos \theta / 2r^2. \quad (2.3.2)$$

Линии тока в системе координат, связанной с жидкостью, показаны на рис. 2.2.1,  $b$ .

Производную  $\partial\varphi/\partial t$  можно найти из уравнения (1.7.9), заметив, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = U \sin \theta / r, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -U \cos \theta \quad (2.3.3)$$

в фиксированной точке  $(r, \theta)$  в системе координат, движущейся вместе со сферой со скоростью  $-U$ . Тогда, положив  $r=a$ , получим следующее выражение для давления на поверхности движущейся сферы:

$$p = p_0 - \frac{1}{8}\rho U^2 (5 - 9 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}\rho \dot{U} a \cos \theta. \quad (2.3.4)$$

В уравнениях (2.3.1) и (2.3.4)  $p_0$  — давление на бесконечности в набегающем потоке и в покоящейся жидкости соответ-

ственно. Это давление не дает результирующей силы, действующей на сферу, движущуюся с постоянной скоростью, так как оно одинаково на передней и задней половинах сферы. Этот вывод справедлив для любого тела в безвихревом потоке однородной невязкой несжимаемой жидкости. Однако, если тело движется с ускорением  $\dot{U}$  в покоящейся жидкости, суммарная сила получается интегрированием последнего члена в уравнении (2.3.4) по всей поверхности сферы. В результате получаем

$$F = - \int_0^\pi p \cos \theta 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \dot{U} = \frac{1}{2}M' \dot{U}, \quad (2.3.5)$$

где  $M'$  — масса жидкости, вытесненной сферой.

Величина  $\frac{1}{2}M'$  называется *присоединенной массой сферы*, так как она обусловлена кажущейся инерцией жидкости, приводимой в движение при ускорении сферы.

Когда сфера начинает двигаться из состояния покоя, то сначала движение жидкости является безвихревым [см. (1.1.14)], и сила, действующая на сферу, хорошо описывается уравнением (2.3.5); однако затем, как будет показано ниже, силы вязкости быстро изменяют характер течения.

Многие другие, но не все, формы тел также можно представить распределением источников и стоков. Каждое тело имеет свою собственную присоединенную массу. Присоединенная масса плоской пластинки, движущейся ускоренно в собственной плоскости, равна нулю, однако при движении в направлении нормали к плоскости пластинки ее присоединенная масса велика, так как в движение приводится большое количество жидкости. Вообще говоря, при ускоренном или стационарном безвихревом движении на любое твердое тело, кроме силы, действует момент. В случае сферы он равен нулю вследствие ее симметрии.

Классическая гидромеханика занимается применением указанных выше методов для решения различных задач, описание которых читатель найдет во многих превосходных учебниках.

## 2.4. Струйные течения

Теория струйных течений хорошо изложена во многих монографиях (см., например, Ламб, 1947, § 73—78). В этой теории предполагается, что существует поверхность, для которой выполняются следующие условия: она сходит с острой кромки тела, давление на ней постоянно, жидкость за ней заторможена. Поэтому по другую сторону этой поверхности скорость

постоянна, а сама свободная поверхность тока рассматривается как граница жидкости. Она обязательно является вихревой пеленой, которая, как показано в гл. 6, неустойчива и поэтому далее вниз по потоку нестационарна. Такая свободная поверхность является отправной точкой для изучения следов в рамках классической гидродинамики.

На рис. 2.4.1 приведены примеры струйных течений. Картина сужения струи воды, истекающей из отверстия, вполне соответствует тому, что мы наблюдаем на практике. Можно, например, считать, что в верхней части рис. 2.4.1, в изображено течение воды над плоским дном из-под полупогруженных ворот шлюза. Однако при значительных вертикальных перемещениях силой тяжести обычно пренебречь нельзя. Скорость асимптотически стремится к пределу, как в случае насадка Борда.

Частный случай струйных течений имеем, когда две жидкости разной плотности расположены одна над другой. Потенциал течения между поверхностями, образующими угол  $\alpha$ , определяется выражением

$$\varphi = Ur^{2\pi/\alpha} \cos \frac{2\pi\theta}{\alpha}. \quad (2.4.1)$$

Если одна поверхность является твердой границей с  $\theta=0$ , а другая — поверхностью раздела с жидкостью, имеющей другую плотность и находящейся в состоянии покоя при распределении давления, соответствующем гидростатическому, то давление вдоль свободной границы между жидкостями должно меняться линейно, как  $gz$ . Поэтому при стационарном течении величина  $(\partial\varphi/\partial r)^2$  должна линейно возрастать вдоль  $\theta=\alpha$  согласно уравнению Бернулли, так как давление должно быть одинаковым по обе стороны поверхности раздела. Поэтому имеем

$$r^2 \left( \frac{2\pi}{\alpha} - 1 \right) \sim r, \quad \text{или} \quad \alpha = 2/3\pi. \quad (2.4.2)$$

В соответствии с этим поток легкой жидкости, взаимодействуя с клином тяжелой покоящейся жидкости, повернется на  $60^\circ$  (рис. 2.4.2, а). Струя горячего газа, выходящего из трубы в холодный неподвижный воздух, в первый момент также сузится, развернувшись на тот же угол (рис. 2.4.2, б). Этот вывод справедлив только для непосредственной окрестности угла и неприменим в случаях, когда существенно трение или когда другая жидкость движется.

Из сказанного следует, что поток по обе стороны поверхности раздела между двумя жидкостями, занимающими пространство над плоскостью, может быть безвихревым только в том случае, если одна из жидкостей находится в состоянии

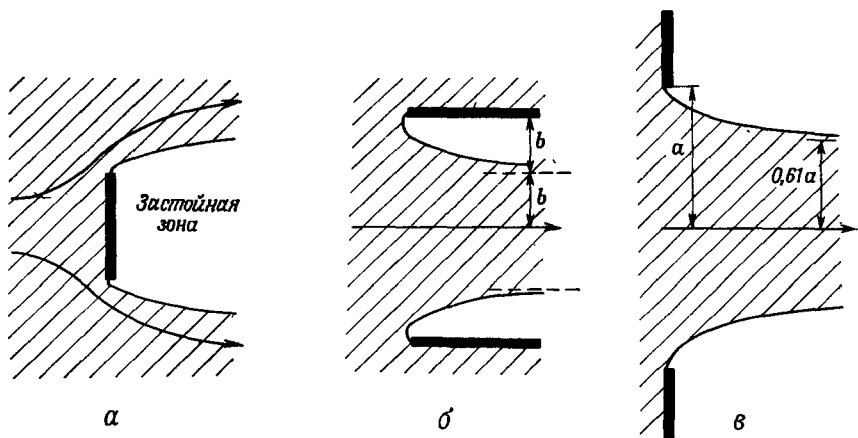


Рис. 2.4.1. Примеры струйных течений.

*a* — свободные линии тока за плоской пластинкой; *b* — истечение через щель с горизонтальными границами (насадок Борда); *в* — истечение через щель в вертикальной стенке (венозное сужение).

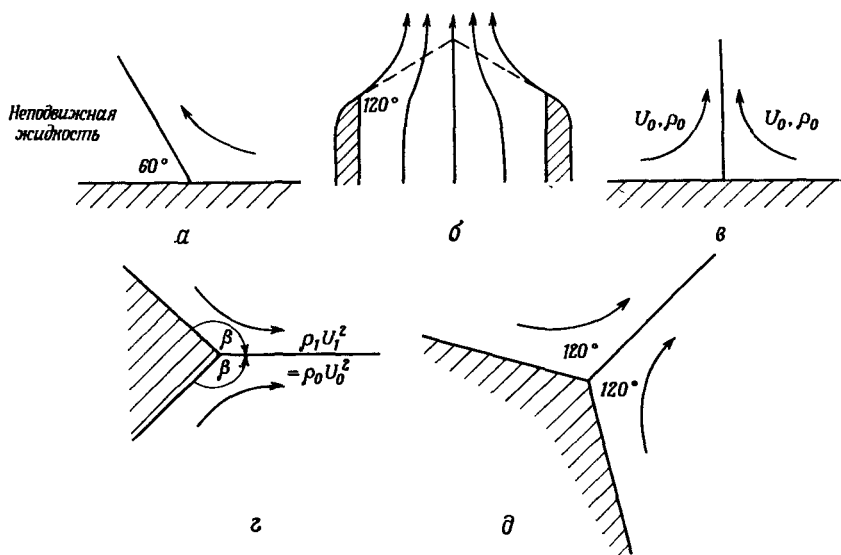


Рис 2.4.2. Примеры течения двух жидкостей.

*a* — течение легкой жидкости вверх по клину неподвижной тяжелой жидкости; *b* — истечение горячего газа из трубы в неподвижный воздух; *в* — граница раздела между двумя жидкостями, перпендикулярная к твердой границе; *г* — слияние двух безвихревых потоков с горизонтальной поверхностью раздела; *д* — слияние безвихревых потоков с наклонной поверхностью раздела.

покою, а угол  $\alpha$  для другой равен  $120^\circ$ . В противном случае жидкости должны иметь одинаковую плотность и скорость, а поверхность раздела должна быть перпендикулярна границе, как показано на рис. 2.4.2, в. Возможен и такой случай, когда поверхность раздела горизонтальна, а углы и  $\rho U^2$  жидкостей по обе стороны от нее одинаковы (рис. 2.4.2, г). Возможна, наконец, ситуация, при которой оба потока поворачиваются на угол  $120^\circ$  (рис. 2.4.2, д).

## 2.5. Поверхность вращающейся жидкости

Форму свободной поверхности жидкости, находящейся в состоянии установившегося вращения относительно вертикальной

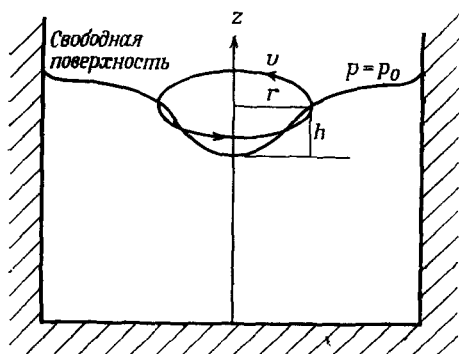


Рис. 2.5.1 Система координат и форма поверхности вращающейся жидкости.

оси, можно найти, если задана тангенциальная (окружная) составляющая скорости  $v$ , так как давление в жидкости, не имеющей вертикальной составляющей ускорения, определяется уравнением гидростатики

$$p = g\rho h + p_0, \quad (2.5.1)$$

где  $h$  — расстояние от поверхности, на которой давление равно  $p_0$  и постоянно. Ускорение жидкости равно  $v^2/r$  (где  $r$  — расстояние от вертикальной оси) и в соответствии с уравнением движения равно  $\rho^{-1}\partial p/\partial r$ .

Таким образом, для жидкости, вращающейся как твердое тело, имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{(r\Omega)^2}{r} \quad \text{и} \quad h = \frac{\Omega^2}{2g} r^2, \quad (2.5.2)$$

т. е. ее поверхность имеет вид параболоида вращения. Здесь  $h$  — высота над центральной точкой поверхности, в которой давление равно  $p_0$ .

Если жидкость совершает безвихревое движение, то циркуляция относительно оси вращения одна и та же при всех значениях радиуса. Следовательно,  $2\pi r v = 2\pi k = \text{const}$  (не зависит от  $r$ ) и  $v = k/r$ , а  $\varphi = k \lg r$ . Тогда получаем, что в этом случае

$$h = h_0 - \frac{k^2}{4gr^2}, \quad (2.5.3)$$

т. е. поверхность жидкости имеет форму воронки, образующейся при стекании жидкости в отверстие, причем  $h_0$  — уровень жидкости на бесконечности. Такую же форму имеет облако в вершине воронки торнадо, когда воздух хорошо перемешан и имеет однородную абсолютную влажность, так как при этом основание облака является поверхностью постоянного давления.

Если чай в чашке привести во вращение, то свободная поверхность вблизи центра стремится приобрести форму параболоида, так как вязкость заставляет жидкость вращаться как единое целое. На больших расстояниях от центра циркуляция становится почти постоянной под действием вторичной циркуляции (см. гл. 3), и поверхность жидкости в вертикальных сечениях, проходящих через ось вращения, становится выпуклой в соответствии с уравнением (2.5.3). У стенки чашки, если она смачиваемая, поверхностное натяжение опять делает поверхность жидкости вогнутой.

## 2.6. Ламинарное течение вязкой жидкости

Напряжение, возникающее в жидкости при чисто сдвиговом (градиентном) течении без растяжения жидкости вдоль линий тока, описывается вторым из уравнений (1.3.24). Оно показывает, что сдвиговое напряжение пропорционально вязкости и величине сдвига.

Если жидкость в цилиндрическом сосуде, обладающая вязкостью  $\mu$ , приводится во вращение относительно вертикальной оси с тангенциальной скоростью  $v$ , равной  $k/r$ , то это движение является безвихревым, так как оно имеет потенциал  $\varphi = k \lg r$ , а момент количества движения цилиндрической оболочки заданной массы и радиуса  $r$  не зависит от  $r$ . Момент касательных напряжений между цилиндрическим объемом жидкости и стенкой сосуда не зависит от  $r$ , так как он пропорционален  $\mu 2\pi r \cdot r (dv/dr)$ .

Такое же распределение скоростей устанавливается около твердого вращающегося цилиндра, помещенного в большой сосуд. Скорость жидкости между двумя твердыми цилиндрами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , вращающимися с угловыми скоростями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , получается сложением скоростей безвихревого движения и вращения твердого тела, при котором в жидкости не возникают касательные напряжения. Таким образом, если течение устойчиво (см., например, разд. 3.10), то

$$v = r\Omega + \frac{k}{r}, \quad (2.6.1)$$

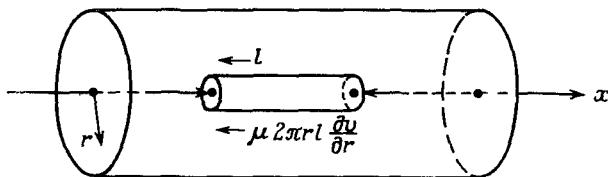


Рис 2.6.1. Силы, действующие на жидкий цилиндрический объем, выделенный в вязком ламинарном течении в трубе.

где

$$k = \frac{r_1^2 r_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{r_2^2 - r_1^2}, \quad \Omega = \frac{r_1^2 \Omega_1 - r_2^2 \Omega_2}{r_1^2 - r_2^2}. \quad (2.6.2)$$

При установившемся течении в трубе постоянного кругового сечения на жидкий цилиндр с радиусом  $r$ , ось которого совпадает с осью трубы (рис. 2.6.1), действует касательное напряжение, равное разности сил давления на его торцах. Поэтому

$$-\pi r^2 l \frac{\partial p}{\partial x} = \mu 2\pi r l \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (2.6.3)$$

или

$$v = v_0 - \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где  $v_0$  — скорость на оси трубы при  $r=0$ . Следовательно, профиль скоростей потока в трубе — параболический. Аналогичным образом можно показать, что стационарное течение между двумя параллельными плоскостями  $z = \text{const}$  также имеет параболический профиль скоростей, описываемый выражением

$$v = v_0 - \frac{z^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.6.4)$$



Если в последнем случае скорость течения на стенках равна нулю, а ширина зазора между ними составляет  $2h$ , то в центре зазора

$$v = -\frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.6.5)$$

Если же зазор очень узок, а течение очень медленное, то силами инерции, представленными в уравнении движения ускорением, можно пренебречь, и уравнение (2.6.5) можно считать всюду локально справедливым, приведя его к виду

$$v = -\kappa \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \text{grad}(-\kappa p). \quad (2.6.6)$$

Поэтому течение в плоскостях, параллельных стенке, безвихревое. Оно одинаково во всех плоскостях, параллельных стенке, но скорость по ширине зазора меняется. Так как безвихревое течение единственно при заданных граничных условиях, то безвихревое обтекание двумерных препятствий можно воспроизвести в зазоре между параллельными пластинками, поместив между ними соответствующее препятствие. Такое устройство называется *ячейкой Хеле—Шоу*. Визуализация линий тока в нем достигается введением подкрашенной жидкости (рис. 2.6.2).

Тот же принцип лежит в основе закона *Дарси* для течения сквозь пористую среду:

$$\mathbf{v} = -\sigma \text{grad } p. \quad (2.6.7)$$

Этот закон справедлив и в трехмерном случае. Предполагается, что указанное течение должно подчиняться закону Дарси, так как оно направлено против градиента давления, пропорционально коэффициенту пористости и достаточно медленное, чтобы оправдать пренебрежение силами инерции. Закон Дарси аналогичен *закону Ома* для тока в проводящей среде — это подтверждается опытами в *электролитической ванне Тейлора*. Линии равного потенциала в проводящей жидкости можно проследить с помощью зонда с изолированным проводником. Следовательно, безвихревое течение около препятствий можно изучать, помещая их модели, изготовленные из изолятора, в ванну между пластинами из проводящего материала, на которые подается некоторая разность потенциалов. Первоначально Тейлор намеревался изучать течение воздуха над неровностями земной поверхности, изготавливая парафиновые модели рельефа. Однако в этом случае аналогия далеко не полная, так как обычно ветер с высотой усиливается и течение нельзя считать безвихревым.

На твердой границе вязкой жидкости ставится условие равенства скорости нулю. Можно считать, что течение около мелких пузырьков воздуха в воде является безвихревым, так

как сдвиговые напряжения в жидкости на границе раздела с газом пренебрежимо малы и здесь вполне применимо граничное условие для невязкой жидкости. Однако, хотя поверхностное натяжение стремится придать поверхности пузырька строго сферическую форму, имеющиеся в воде примеси создают сопротивление движению на его поверхности. Так как согласно уравнению (2.3.1) максимальное давление развивается в перед-

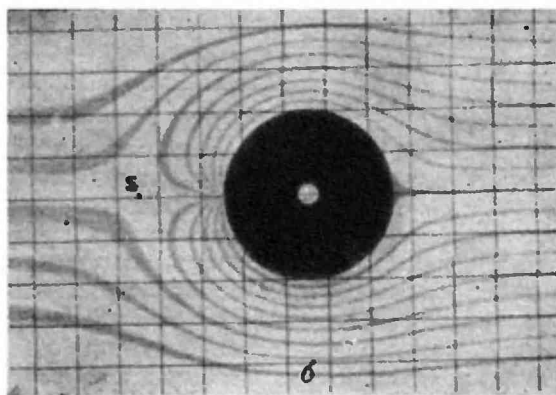
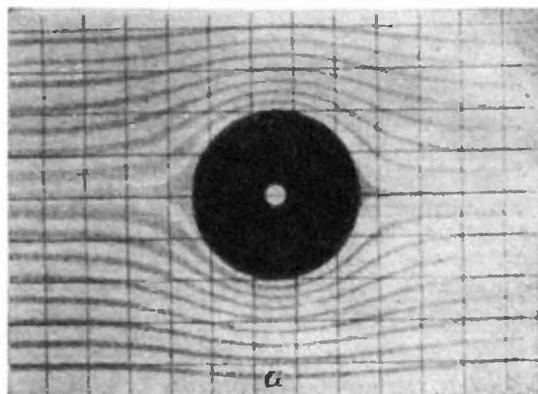


Рис 2.6.2. Течение в ячейке Хеле—Шоу около препятствия в узком зазоре между двумя стеклянными пластинками.

Линии тока, визуализированные подкрашенной жидкостью, показывают, что течение является плоским и безвихревым.

*a* — течение около круглого препятствия. На линиях тока в области малых скоростей краска расплывается шире. Видно, что течение направлено справа налево.

*b* — отсос вблизи задней точки торможения течения, показанного на левом снимке. Отсасывается 0,6 расхода жидкости. Точно так же выглядит снимок течения, набегающего слева на источник и круговой цилиндр, или течения около продолговатого препятствия, очерченного линиями тока, исходящими из точки торможения *S*. Этот случай соответствует уравнению (3.6.1).

ней и задней точках торможения, то сферическая форма, которую пузырек приобретает под действием сил поверхностного натяжения, превращается в слегка сплюснутую.

Есть еще один фактор, который делает течение вязкой жидкости вблизи свободной поверхности отличным от движения невязкой жидкости, хотя на этой границе нет сдвигового напряжения и ограничения на тангенциальную составляющую скорости. Этим фактором является деформация элементов жидкости при безвихревом движении по криволинейным траекториям. В вязкой жидкости при этом возникают сдвиговые напряжения, и течение на свободной границе становится иным. Например, течение вблизи поверхности воронки, образующейся при стоке вязкой жидкости через отверстие, не может быть безвихревым и иметь скорость, пропорциональную  $k/r$ , так как для этого потребуются касательные напряжения. Поэтому за счет снижения скорости на поверхности возникают вторичные токи. Кроме того, существует течение, направленное вниз по поверхности воронки в отверстие стока; такое же течение есть и вблизи дна сосуда (см. гл. 3).

Диссипацию энергии в результате действия сил вязкости в несжимаемой жидкости можно рассматривать с помощью следующего уравнения механизмов процесса:

$$\begin{aligned} & \text{Мощность работы поверхностных сил} + \text{Мощность работы} \\ & \text{нормальных сил, приложенных к поверхности} = \text{Скорость} \\ & \text{увеличения кинетической энергии} + \text{Скорость диссипации} \\ & \text{энергии внутри жидкости.} \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

В случае установившегося безвихревого движения только первый и последний члены этого уравнения отличны от нуля, и скорость диссипации оказывается равной подводу энергии за счет работы поверхностных сил. Поэтому для поддержания безвихревого движения вязкой жидкости с криволинейными границами необходимо, чтобы на нее действовали поверхностные силы, так как жидкие элементы при движении вдоль криволинейных линий тока деформируются.

Если поверхностные силы отсутствуют и нет фиксированных границ, то скорость диссипации энергии пропорциональна квадрату завихренности и для единицы объема равна  $\frac{1}{2}\mu\omega^2$ , где  $\omega$  — величина  $\text{rot } v$ . В то же время это есть скорость диссипации энергии турбулентного движения (см. гл. 7).

## 2.7. Пограничный слой

Выше с помощью уравнения (1.4.12) было показано, что все составляющие завихренности передаются в жидкости посредством вязкости. Если граница жидкости внезапно приводится

в движение по касательной, то жидкость на границе начинает двигаться в том же направлении, а вблизи нее создается завихренность, постепенно распространяющаяся на всю массу жидкости.

Если  $\delta$  — расстояние, на котором жидкость движется со скоростью, равной, допустим, 5% скорости на границе, то эта скорость определяется кинематической вязкостью  $\nu$  (размерность  $L^2T^{-1}$ ), временем  $t$  от момента начала движения и рядом других факторов. Следовательно, чтобы иметь правильную размерность,  $\delta$  должно определяться выражением

$$\delta \sim (\nu t)^{1/2}. \quad (2.7.1)$$

Созданная внезапно в массе жидкости вихревая пелена, если она устойчива, будет диффундировать точно так же (см. гл. 6). Поскольку те же соображения справедливы для расстояния, на котором скорость изменяется в некоторое число раз, то форма профиля скоростей остается неизменной, а его характерный размер растет пропорционально  $t^{1/2}$ .

Примерно так же растет и пограничный слой толщиной  $\delta$  на поверхности плоской пластинки, движущейся в жидкости. Время роста характеризуется расстоянием  $x$  от передней кромки пластинки, отнесенным к скорости ее движения относительно жидкости  $U$ . На рис. 2.7.1 показано, как меняется профиль скоростей в пограничном слое вдоль пластинки в направлении течения. Если мысленно выделить в жидкости прямоугольник  $ABCD$ , движущийся вниз по течению в то время, как в нем нарастает пограничный слой, то, учитывая, что  $t = x/U$ , получим

$$\delta \sim x^{1/2} \nu^{1/2} U^{-1/2}. \quad (2.7.2)$$

На задней кромке пластинки завихренность продолжает диффундировать вовне, однако теперь по разные стороны плоскости пластинки она имеет противоположные знаки и взаимно уничтожается; при этом кривизна профиля скорости меняется на противоположную. На рис. 2.7.2 заштрихованная область представляет потерю потока количества движения в течении, которая определяется силой сопротивления, действующей на пластинку.

Хотя площадь заштрихованного участка профиля скоростей при смещении вниз по потоку остается неизменной, сам профиль расширяется, захватывая все большую часть следа. В действительности течение в следе всегда нестационарно, если число Рейнольдса (разд. 2.8) достаточно велико.

Таким образом, если нет ускорения, то пограничные слои на всех твердых поверхностях в вязкой жидкости растут вниз по потоку. Из рис. 2.7.1 следует, что объемный расход жидкости

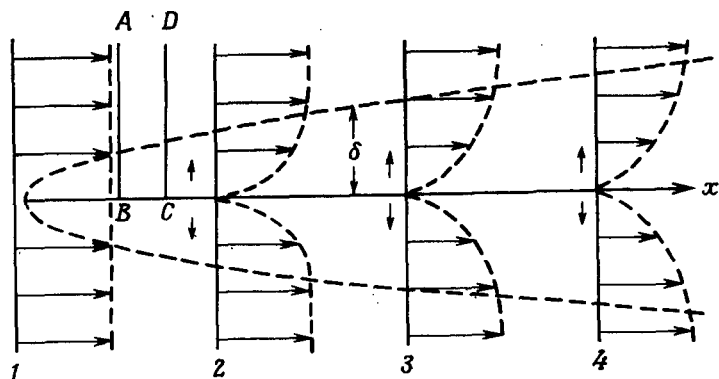


Рис. 2.7.1. Изменение профиля скоростей в течении, направленном поперек плоской пластинки.

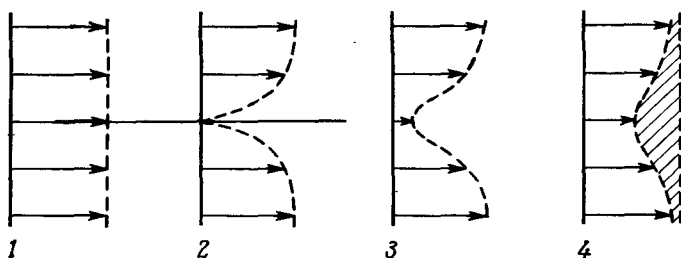


Рис. 2.7.2. Деформация профиля скоростей за плоской пластинкой.

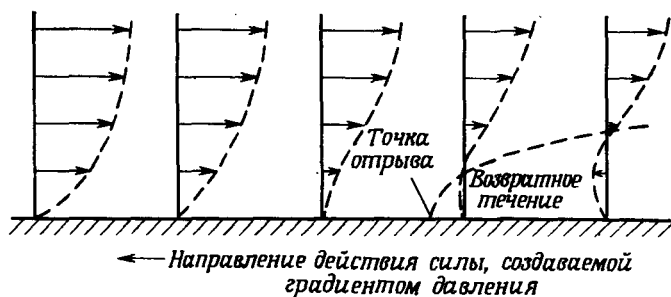


Рис. 2.7.3. Отрыв и возвратное течение в пограничном слое при наличии обратного градиента давления (например, в расходящемся потоке).

в пограничном слое меньше, чем на той же глубине в набегающем потоке. Поэтому, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности, поток должен иметь небольшую составляющую скорости, направленную от поверхности. Это означает, что плоская пластинка оказывает на течение за пределами пограничного слоя такое же влияние, как тело, толщина которого при смещении вниз по потоку увеличивается. Если жидкость ускоряется под действием перепада давления, например, при течении по сужающемуся каналу или при обтекании передней части препятствия, когда она движется от передней точки торможения,

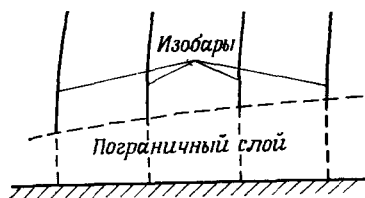


Рис. 2.7.4. Неизменность градиента давления внешнего течения в пределах пограничного слоя.

разделяющей поток, то толщина пограничного слоя может убывать. Наоборот, в расширяющемся канале жидкость движется в направлении повышения давления и пограничный слой за счет торможения утолщается. При этом сдвиговые напряжения уменьшаются и жидкость тормозится быстрее, чем в однородном течении. При течении жидкости вдоль стенки давление в некоторой точке последней может оказаться равным давлению торможения в медленно движущейся жидкости вблизи стенки. В этом случае за точкой на стенке, соответствующей давлению торможения, течение меняет свое направление на обратное (рис. 2.7.3) и происходит отрыв потока. Отрыв происходит там, где направленная вперед сила вязкого сопротивления, создаваемая слоями, удаленными от границы, меньше направленной назад силы, создаваемой обратным градиентом давления. В теории пограничного слоя принято допущение о постоянстве давления по его глубине, основанное на малости ускорения по нормали к стенке. Поэтому изобары внешнего течения можно продлевать на всю глубину пограничного слоя (рис. 2.7.4).

Отрыв потока в расширяющемся канале, подобный показанному на рис. 2.7.5, а, можно предотвратить, заставив поверхность в точке отрыва двигаться в направлении течения. Это можно сделать, установив в месте наибольшей кривизны поверхности вращающийся ролик (рис. 2.7.5, б).

Другой метод предотвращения отрыва пограничного слоя — вдув струи жидкости в направлении течения в том месте, где должен произойти отрыв. Это явление называется *эффектом*

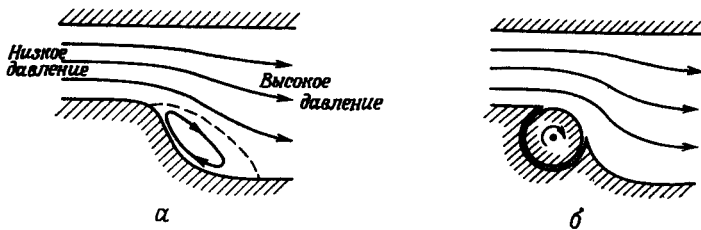


Рис 27.5. Поток в расширяющемся канале.

а — отрыв в расширяющемся канале; б — предотвращение отрыва путем введения подвижной границы вблизи предполагаемой точки отрыва.

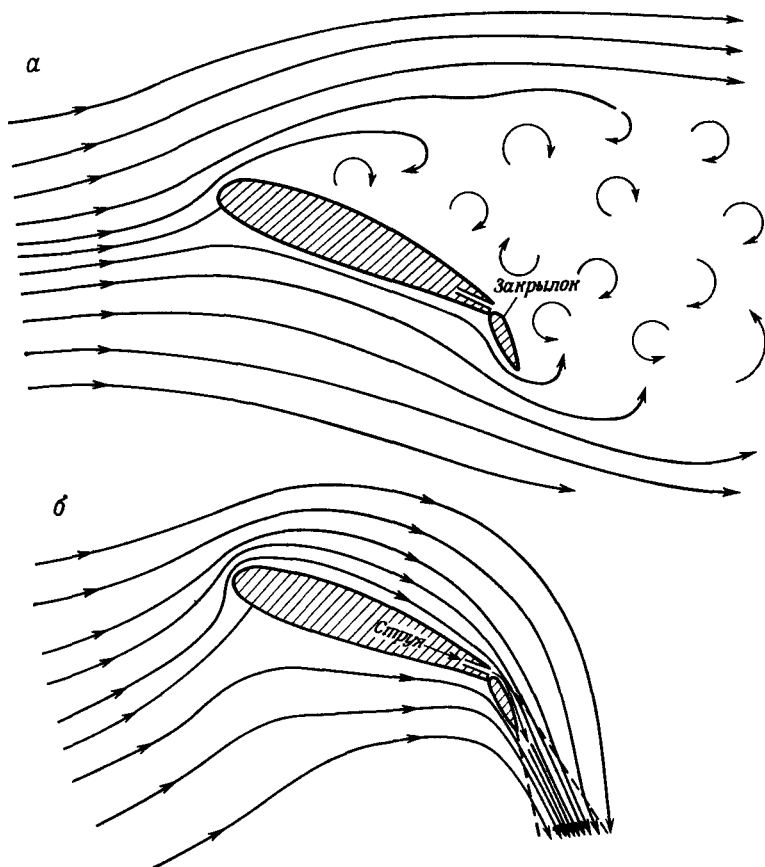


Рис. 276. Эффект Коанда (струйный закрылок).

Отрыв от поверхности крыла и образование застойной зоны (а) предотвращаются вдувом струи воздуха под верхней поверхностью закрылка (б).

**Коанда.** На рис. 2.7.6 показано, как этот эффект проявляется в случае струйного закрылка. Когда происходит отрыв потока от верхней поверхности крыла, течение в зоне отрыва становится турбулентным и подъемная сила крыла резко убывает, так как теперь на его верхней поверхности уже нет зоны низкого давления.

Эффект Коанда можно продемонстрировать, выпуская струю воздуха вблизи угла твердого тела (рис. 2.7.7, а). Струя должна удариться в поверхность вблизи угла так, чтобы образующийся пограничный слой был тонким и не мог бы произойти отрыв. Если струю слегка отклонить от поверхности (рис. 2.7.7, б), чтобы между местом максимума скорости и поверхностью тела

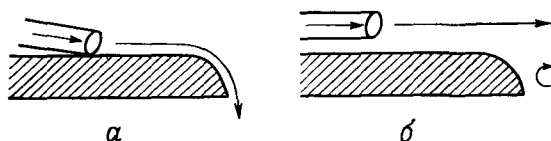


Рис 2.7.7. Вдув струи у поверхности тела вблизи угла.

а — при обдуве поверхности струя «прилипает» к ней и огибает угол, б — при наличии между струей и твердой поверхностью медленно движущегося слоя происходит отрыв.

образовался слой более медленно текущего газа, то может произойти отрыв.

То же явление наблюдается и в случае водяной струи. Давление на внешней поверхности тонкого слоя воды постоянно и равно давлению воздуха. В результате величина положительного градиента давления на поверхности убывает. Это легко продемонстрировать, подставив перевернутую вверх дном кастрюлю под струю воды, которая будет обтекать край дна, не отрываясь, а затем, против ожидания, стекать по стенкам кастрюли вместо того, чтобы разбрызгиваться в горизонтальной плоскости.

Скорость течения вблизи твердой границы можно увеличить, установив вверх по потоку от точки отрыва турбулизаторы (например, предкрылки). Срывающиеся с предкрылков концевые вихри приносят быстро движущийся воздух из области вне пограничного слоя к поверхности крыла и тем самым препятствуют торможению потока (рис. 2.7.8).

Если воздух на склоне холма нагревается за счет прогрева земной поверхности солнцем, то под действием архимедовой силы он начинает течь вверх по склону и вызывает отрыв потока, стекающего по склону вниз (рис. 2.7.9). Возможен и обратный процесс: при охлаждении поверхности земли ночью



пограничный слой под действием силы тяжести опускается и отрыв прекращается.

Известен и другой метод предотвращения отрыва пограничного слоя — путем отсоса медленно движущейся жидкости через щель или пористую поверхность.

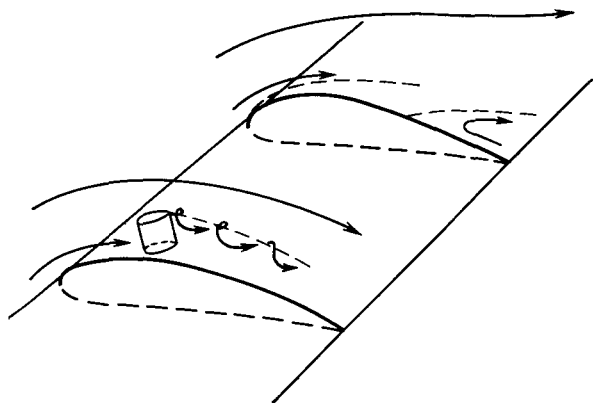


Рис. 2.7.8. Турбулизаторы, которые предотвращают отрыв, направляя более быстро движущуюся жидкость из внешнего течения к поверхности тела.

Если перед точкой отрыва на обтекаемой поверхности поместить специальное устройство, например небольшую пластинку с острой кромкой, то пограничный слой может стать

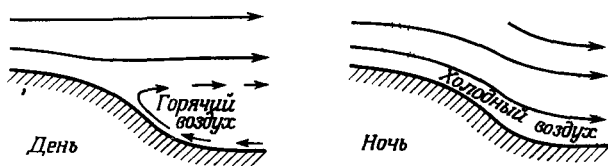


Рис. 2.7.9. Течение воздуха по склону над нагретой (а) и охлажденной (б) поверхностями.

турбулентным. При этом профиль скоростей меняется, так как к пограничному слою подмешивается воздух из основного потока. Толщина пограничного слоя при этом убывает, как и в случае применения предкрылков.

При течении в канале турбулентность стремится распределить количество движения потока более равномерно по его сечению, и профиль скоростей перестает быть параболическим, т. е. уже не соответствует уравнению (2.6.4), полученному из

условия достижения равновесия потока в целом под действием сил вязкости. Профиль турбулентного течения в центральной части потока становится более плоским; вблизи стенок остаются тонкие пограничные слои, которые не утолщаются при смещении вниз по потоку, пока поддерживается турбулентное течение (рис. 2.7.10). В этом случае пограничный слой становится тоньше вследствие уменьшения сдвиговых напряжений вблизи стенки, где ее присутствие препятствует образованию крупных вихрей (см. разд. 7.3). Между турбулентным пограничным слоем и стенкой может существовать ламинарный подслой,

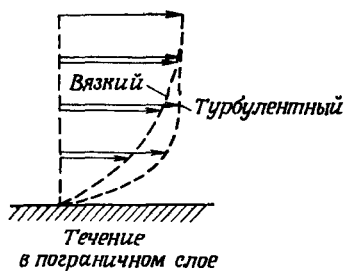


Рис 2.7.10. Уменьшение толщины пограничного слоя под влиянием турбулентности.

играющий роль смазочной пленки. Однако так как градиент скорости в подслое больше, чем в случае ламинарного течения, то градиент давления, необходимый для поддержания этого течения, в случае турбулентного течения также оказывается больше. Это обстоятельство имеет особо важное значение в случае труб.

В изгибе канала отрыв потока менее вероятен на его внутренней стороне, так как здесь давление падает за счет действия центробежных сил, возникающих при искривлении линии тока (см. разд. 3.2). Однако отрыв часто происходит на внешней стороне изогнутого канала, где существует зона высокого давления и скорость потока падает. Предотвратить отрыв можно, установив в месте поворота канала на прямой угол решетку профилей (рис. 2.7.11). Так поступают при проектировании аэродинамических труб замкнутого типа. При большом числе профилей в решетке крупные вихри не образуются. Рис. 2.7.11 демонстрирует также изменение относительного положения частиц, находящихся до поворота в одном поперечном сечении трубы. Видно, что после прохождения поворота они располагаются в плоскости, проведенной под углом к оси канала (см. также разд. 3.3). Значительные трудности возникли при разработке воздухозаборников турбовинтового авиадвигателя «Олимп», конструкция которого предусматривает разворот воздушного потока и подачу его в двигатель с обратной стороны.

При этом на внешней стороне криволинейного канала образовывался медленный пограничный слой. Когда самолет попал в облако, содержащее снег или снежную крупу, в зоне повышенного давления криволинейного канала накапливался лед. Так как канал имеет кольцевое сечение, то его радиус в направлении течения уменьшается, и, двигаясь вместе с потоком, снег сильно уплотнялся. От плотной массы снега откалывались

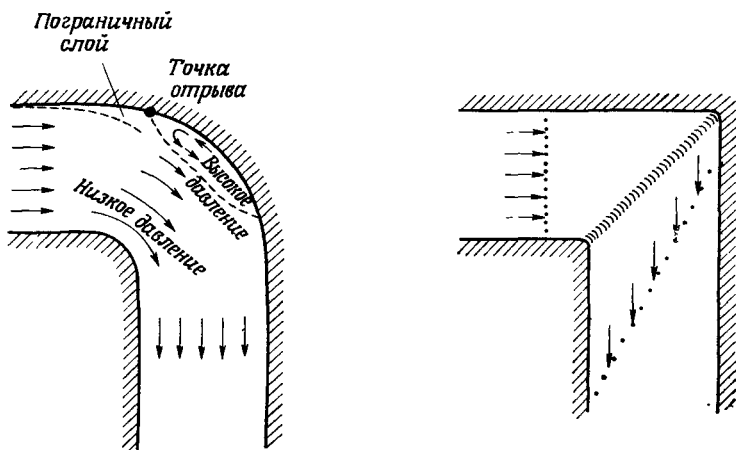


Рис 2.7.11. Отрыв потока перед зоной высокого давления на внешней стороне колена канала

Отрыв (а) можно предотвратить, установив в колене решетку профилей (б).

куски, которые иногда гасили пламя в камере сгорания. Если бы на участке изгиба воздухопровод был образован системой двумерных колен, внешняя образующая которых была бы выполнена по дуге окружности, а сами они располагались бы радиально, то уплотненный снег уносился бы вниз по потоку непрерывно и пламя в камере сгорания не гасло. Кроме того, температуру стенки следует поддерживать на уровне выше температуры замерзания воды, чтобы обеспечить смазку при движении льда вдоль нее.

## 2.8. Движение малых тел в жидкости.

### Число Рейнольдса

Число Рейнольдса — безразмерная величина, равная отношению сил инерции (т. е. произведения массы на ускорение) к силам вязкости. Поэтому в случае медленных течений оно

мало. Число Рейнольдса можно также представить как отношение членов  $dv/dt$  и  $v\nabla^2 v$ , входящих в уравнение (1.3.29). Инерция представляется плотностью, умноженной на отношение скорости ко времени, где время есть отношение пути к скорости. Аналогичным образом сила вязкости в единице объема представляется произведением кинематической вязкости на градиент градиента скорости, где градиент — величина, обратная длине. Итак,

$$\text{Re} = \frac{\rho U : [l : U]}{\mu^{-1} \cdot l^{-1} U} = \frac{Ul}{\nu}, \quad (2.8.1)$$

где  $U$  и  $l$  — характерные для данного случая скорость и длина соответственно. Число Рейнольдса  $\text{Re}$  можно рассматривать также как отношение давления, представленного величиной  $1/2\rho U^2$  в уравнении Бернулли, к силе вязкости, отнесенной к площади и представленной произведением динамической вязкости на градиент скорости, т. е. как  $\mu U/l$ .

При малых числах Рейнольдса силы инерции пренебрежимо малы. Наоборот, при больших числах Рейнольдса можно пренебречь силами вязкости, однако следует отметить, что это обычно имеет место в результате перехода течения в турбулентное, когда определяющую роль играют силы инерции, связанные с вихревым движением жидкости (см. гл. 7). После перехода к турбулентному режиму течения при дальнейшем увеличении  $\text{Re}$  структура течения меняется мало, так как скорости в вихрях пропорциональны средней скорости создавшего их потока, и поэтому отношение сил инерции, действующих в вихрях, к силам инерции в осредненном течении при изменении скорости не меняется.

Когда числа Рейнольдса малы, течение около малой частицы определяется динамической вязкостью  $\mu$  и размером частицы  $a$ . Сила сопротивления частицы  $D$  при скорости движения  $U$  выражается соотношением вида

$$D \sim \rho a U, \quad (2.8.2)$$

так как никакая другая комбинация  $\mu$ ,  $a$  и  $U$  не имеет размерности силы. Стокс первым показал, что коэффициент пропорциональности в случае твердой сферы, совершающей медленное движение в жидкости, равен  $6\pi$ . Если сфера движется под действием силы тяжести и разность плотностей сферы и жидкости равна  $\Delta\rho$ , то скорость установившегося движения определяется из соотношения

$$6\pi\mu a U = 4/3\pi a^3 g \Delta\rho. \quad (2.8.3)$$

По причинам, указанным выше в разд. 2.6, эта формула может быть неверна в случае жидких сфер или газовых пузырей, так

как на их поверхности возможно скольжение. Однако очень часто пузырьки газа подчиняются этому уравнению благодаря имеющимся в жидкости примесям твердых частиц, которые мешают скольжению на поверхности пузырька.

Различие между силами сопротивления при больших и малых числах Рейнольдса хорошо видно на примере парашюта и семян одуванчика. Для парашюта характерны большие числа Рейнольдса, и он представляет собой устройство для создания интенсивного вихревого движения в следе за ним в процессе спуска в атмосфере. Вихри образуются при отрыве потока по периметру парашюта и на кромке отверстия в его середине, а силу сопротивления, создаваемую высоким давлением на его нижней поверхности, можно рассматривать как силу, необходимую для генерации вихря в следе. Работа всех воздушных тормозов, применяемых в авиации, основана на том же принципе. Их называют спойлерами<sup>1)</sup>, так как они «портят» ламинарный поток на поверхности крыла, создавая вихревое движение.

Наоборот, семена одуванчика являются примером объекта, для которого число Рейнольдса мало, и течение определяется вязкостью. Крошечные пушинки имеют относительно очень большую поверхность, соприкасающуюся с воздухом, развивающим вязкое трение за счет сдвиговых напряжений на поверхности. Вихри в следе не образуются, однако воздух, окружающий семя, увлекается вместе с ним. Так как оно как бы «тонет» в окружающем воздухе, сила сопротивления в каждый следующий момент времени прилагается к новой порции воздуха, и за семенем остается постоянно удлиняющийся след движущегося за ним воздуха, который посредством вязкости постепенно передает количество движения все увеличивающемуся объему окружающей среды, и механическая энергия в конце концов переходит в тепло.

## 2.9. Траектории малых частиц.

### Эффективность захвата

Если малая частицы «вморожена» в жидкость, т. е. скорость ее установившегося движения относительно потока мала, то ее ускорение примерно равно ускорению частиц жидкости. Поэтому мыльный пузырь не может столкнуться с домом, так как он движется строго вдоль линий тока, огибающих это препятствие. Однако он может натолкнуться на дерево, так как

<sup>1)</sup> От английского to spoil — портить — *Прим. перев.*

в этом случае кривизна траекторий частиц воздуха больше, чем в случае обтекания дома, а поскольку пузырь тяжелее вытесняемого им воздуха, то он движется по менее изогнутой траектории, чем воздух. Для очень маленьких пузырьков скорости установившегося движения меньше, чем для больших, и поэтому они могут избежать столкновения со стволом дерева, но могут столкнуться с одной из его тонких ветвей.

Частицы дыма, которые оседают со скоростями менее 1 мм/с, сталкиваются с тонкими нитями (именно поэтому воздух фильтрует через ткани!), но не осаждаются на стенах зданий. Осаждение копоти на зданиях в основном определяется мелкими вихрями, образующимися на их острых углах и выступах. Траектории частиц воздуха в таких вихрях имеют очень большую кривизну, которая и приводит к столкновению частиц дыма с поверхностью. Течение воздуха вдоль стены дома не приводит к столкновению увлекаемых им частиц со стеной, если скорость их установившегося движения не слишком велика. Поэтому тяжелые дождевые капли бьют в оконные стекла, а мелкие капли и особенно капельки, образующие туман, — нет. Однако капли морозящего дождя и тумана весьма эффективно улавливаются тонкими ветвями и особенно хвоей. Так как кроны сосен, растущих достаточно высоко над уровнем моря, нередко находятся в облаках, то во время дождя под ними выпадает большее количество осадков, чем на расположенных поблизости открытых местах. В противоположность широко распространенному мнению, деревья не «притягивают воду» (не увеличивают они, как думают многие экономисты, и содержание воды в почве!) и безусловно способствуют испарению (через листву) воды, извлеченной корнями из глубоких слоев почвы. Однако в некоторых районах вклад деревьев в содержание воды в почве посредством захвата частиц, из которых состоят облака, может быть весьма значительным. Древесная растительность способствует также увеличению пористости почвы и, следовательно, удержанию воды в ней.

Течение на наветренной стороне препятствия весьма близко к потенциальному. Траектории частиц для этого случая показаны на рис. 2.9.1. Частицы, плотность которых меньше плотности основного потока, не сталкиваются с препятствием, поскольку их траектории искривлены сильнее, чем траектории частиц потока.

Если частица имеет значительные размеры, то она может быть захвачена препятствием и тогда, когда ее центр движется по траектории, не пересекающей поверхность препятствия. Маленькие капельки, из которых состоит облако или морозящий дождь, могут захватываться следом, образующимся за дождевой каплей, даже если они не сталкиваются с ее нижней

поверхностью. Это происходит потому, что течение в следе нестационарно и нередко может приближать капельки вплотную к верхней поверхности капли.

*Коэффициент захвата* тела, пронизывающего облако частиц, определяется отношением числа частиц, которые сталкиваются с телом и захватываются им, к количеству частиц внутри цилиндра, опирающегося на контур миделя тела.

Обычно коэффициент захвата газовых пузырей в воде очень мал, но если тело представляет собой проволоку диаметром

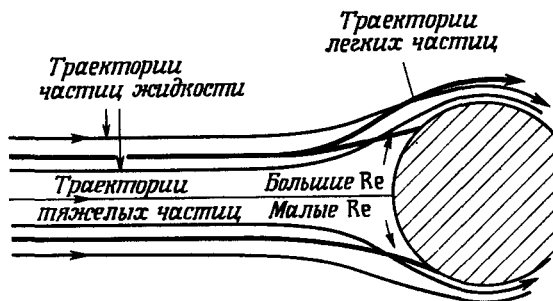


Рис 29.1. Траектории частиц, приближающихся к препятствию.

Если плотность частиц меньше плотности основного потока, то они обходят препятствие, если наоборот, то частицы могут с ним столкнуться, особенно при больших числах Рейнольдса.

меньше диаметра пузырька, то она может захватить некоторое их количество. Коэффициент захвата дождевой капли, движущейся в облаке, очень сильно зависит от отношения ее размеров к размерам капелек, из которых состоит облако. Если они очень малы, то коэффициент захвата тоже мал, но для капель, характерных по размерам для морозящего дождя, коэффициент захвата может быть близок к единице. Если же значительный захват происходит и в следе за каплей, то указанная величина может быть больше единицы.

Эффективность столкновения может отличаться от коэффициента захвата, так как последний зависит и от механизма захвата. В случае, когда градина, падая, пролетает сквозь облако, состоящее из переохлажденных водяных капель, они прилипают к ней, если успевают замерзнуть за время соприкосновения. Если же при соударении они не замерзают, то могут смочить поверхность градины и также оказаться захваченными. С другой стороны, если капелек очень много, то скрытой теплоты плавления может оказаться достаточно, чтобы поднять температуру поверхности градины до  $0^{\circ}\text{C}$ , после чего вследствие нестационарности процесса может происходить

разбрызгивание воды с ее поверхности. Примерно то же происходит, если диаметр дождевой капли достигает  $\sim 5$  мм. При этом поверхностное натяжение уже не может обеспечивать ее сферичность в присутствии аэродинамических сил, и обычно крупные капли дробятся.

В первое время, когда начали опылять посеы пестицидами, порошок сбрасывали с самолета в безветренную погоду в расчете на то, что, попав в скошенный вниз поток за самолетом, а также под действием силы тяжести, они опустятся на обрабатываемый участок. Однако на растения попадали в основном более крупные частицы, которые при этом оседали главным образом на верхней стороне листьев, что не обеспечивало требуемой эффективности опыления. Позднее стали применять аэрозоли, состоящие из более мелких частиц, и обработку ими производить при поперечном ветре. Теперь частицы захватывались листвой, когда сквозь нее проходил несущий их воздушный поток. Этот метод проще, так как не требует, чтобы погода была непременно безветренной. Одновременно сокращается расход пестицида, поскольку ранее размеры частиц выбирались из соображений осаждения их под действием силы тяжести, и часто доза оказывалась слишком большой. Наиболее эффективным средством борьбы с летающими насекомыми является применение мелкодисперсных аэрозолей, частички которых оседают очень медленно, но достаточно велики, чтобы быть захваченными насекомым, пролетающим сквозь облако аэрозоля (см. разд. 12.7).

Форма препятствий в процессе их роста за счет осаждения материала, несомого потоком, может меняться самым причудливым образом. Так, градина может быть сферической, но нередко ее передняя часть может приобрести и коническую форму, которая показывает, что в процессе падения она имела преимущественную ориентацию. При осаждении переохлажденных капель на проводах ледяной покров может приобретать Y-образную конфигурацию. Вероятной причиной этого являются колебания провода, вызывающие периодическое перемещение точки торможения по наветренной стороне провода, при котором образуются две точки преимущественного осаждения льда. Ледяной покров на проводах нарастает неравномерно, так как небольшие выступы растут быстрее, чем другие его части.

При слабом ветре обледенение проводов и веток может объясняться в первую очередь конденсацией (столкновением молекул), а не обычным столкновением частиц. Скорость сублимации зависит от градиента концентрации отложившегося материала; она больше на концах небольших выступов, чем на протяженных участках поверхности. Поэтому иней часто состоит из игольчатых образований, а ледяные кристаллы, опускаю-



щиеся в воздухе, перенасыщенном водяным паром при температуре ниже  $0^{\circ}\text{C}$ , в процессе роста приобретают форму еловых веток (рис. 2.9.2), на концах которых пограничный слой тоньше и, следовательно, градиент концентрации больше.

Интересной особенностью осаждающихся ледяных кристаллов (снежинок) является их удивительная симметричность.

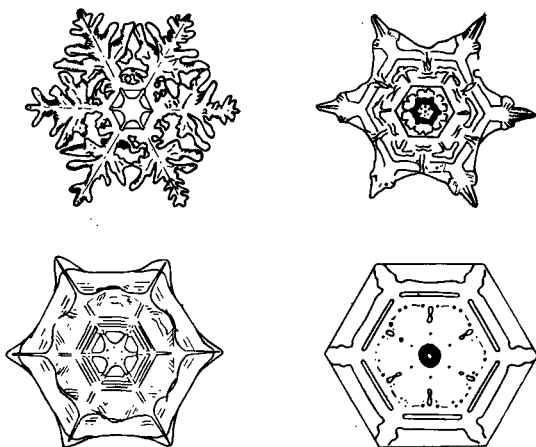


Рис. 2.9.2. Дендритные формы ледяных кристаллов, растущих в перенасыщенном воздухе в процессе падения.

Ускоренный рост выступающих частей приводит к развороту кристалла, в результате чего впереди оказывается самый малый выступ. Этим обеспечивается симметричный рост кристаллов. Пластинчатые кристаллы падают по спиральной траектории, одновременно совершая вращательное движение.

Как только одна из растущих веточек становится длиннее других, частица под действием сил вязкости начинает поворачиваться в набегающем потоке. В результате на наветренной стороне оказываются другие веточки, пограничный слой на них становится тоньше, а градиент концентрации увеличивается. Рост снежинок определяется также кристаллической структурой, обуславливающей их гексагональную симметрию.

## 2.10. Коэффициент лобового сопротивления

При больших числах Рейнольдса сила сопротивления, действующая на тело со стороны потока, скорость которого  $U$ , обусловлена возникновением вихрей, обладающих определенной кинетической энергией. Скорость движения жидкости в этих вихрях пропорциональна скорости набегающего потока, а их

размеры определяются геометрическими характеристиками тела. Сила лобового сопротивления определяется выражением

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 d^2, \quad (2.10.1)$$

где  $d^2$  — площадь поперечного сечения тела. Число Маха определяется как  $M = U/c$ , где  $c$  — скорость звука. Когда  $U$  приближается к  $c$ , течение меняет свой характер, так как в некоторых его частях поток становится сверхзвуковым, а распределение давления коренным образом изменяется из-за появления скачков уплотнения. Характер отрыва также меняется, а большая часть сопротивления при  $U > c$  и  $M > 1$  обусловлена возникновением ударных волн, которые распространяются в воздухе в виде конуса, подобно волнам, образующимся на поверхности воды при движении судна. При этом сопротивление пропорционально более высокой степени  $U$ , или, иначе говоря, при  $M > 1$   $C_D$  убывает.

При малых числах Рейнольдса, т. е. в режиме течения Стокса, сопротивление пропорционально  $U$  [уравнение (2.8.2)], и, следовательно, согласно определению  $C_D$  [уравнение (2.10.1)] при малых числах Рейнольдса оно должно возрастать. В табл. 2.10.1 приведены значения коэффициента лобового

Таблица 2.10.1

## Коэффициент лобового сопротивления сферы

Re	$C_D$	Re	$C_D$
0,002	10 000	1	27
0,005	5 000	2	15
0,01	2 000	5	7
0,05	480	10	4
0,1	235	20	2,6
0,4	64	50	1,6
0,8	34	100	1,1

$$Re = \frac{2aw_t}{\nu}; \quad a — \text{радиус}; \quad w_t — \text{скорость падения};$$

$$\nu_a = \mu_a / \rho_a = 0,15 \text{ см}^2/\text{с} \text{ для воздуха при } 20^\circ\text{C};$$

$$\nu_w = 0,015 \text{ см}^2/\text{с} \text{ для воды при } 5^\circ\text{C};$$

$$\frac{1}{2} C_D \rho_a w_t^2 \pi a^2 = \frac{4}{3} \pi a^3 q (\rho_w - \rho_a);$$

$$\rho_a — \text{плотность воздуха}; \quad \rho_w — \text{плотность воды}.$$

сопротивления для сфер при разных числах Рейнольдса, а в табл. 2.10.2 — скорости установившегося падения (в воздухе) сфер, имеющих плотность воды. Водяные шарики дро-

Таблица 2.10.2

## Установившаяся скорость падения водяных капель в воздухе

Диаметр капли, мм		Скорость падения, см/с	Диаметр капли, мм		Скорость падения, см/с
0,001	Облако	0,0003	1,6	Дождь	5,7
0,01		0,03	1,8		6,1
0,1		0,27	2,0		6,5
0,2		0,72	2,2		6,9
0,3		1,2	2,4		7,3
0,4		1,6	2,6		7,6
0,5		2,1	2,8		7,8
0,6		2,5	3,0		8,1
0,7		2,9	3,2		8,3
0,8		3,3	3,6		8,6
0,9	Моросящий дождь	3,7	4,0	Начинается дробление капель	8,8
1,0		4,0	4,6		9,0
1,2		4,6	5,2		9,1
1,4		5,2	5,8		9,2

бятся, если их диаметр превышает приблизительно 5 мм. Для большинства обычных тел, изучаемых в лабораторных условиях (кроме тех, которые имеют специальные аэродинамические формы, такие, как у лопастей винтов и крыльев самолетов), соотношение (2.10.1) справедливо во всем диапазоне скоростей, с которым обычно приходится иметь дело, причем величина  $C_D$  при  $50 < Re < 10^5$  близка к единице. Отметим, однако, что верхний предел меняется соответственно размерам тела, так как они определяют значение числа Рейнольдса при соответствующем числе Маха.

Необходимо отметить, что при больших числах Рейнольдса и малых числах Маха в зависимости от степени турбулентности набегающего потока и характера поверхности тела вверх по потоку от точки отрыва может существенно меняться толщина пограничного слоя, а также и положение точки отрыва (разд. 2.7). При смещении точки отрыва по контуру тела назад размеры следа за ним быстро уменьшаются, и поэтому при увеличении скорости (и, следовательно, числа Рейнольдса) может стать меньше не только коэффициент сопротивления, но и само сопротивление. При обтекании крупных природных объектов может возникнуть любая из указанных ситуаций, так как и при малых скоростях ветра числа Рейнольдса могут быть очень большими.

## 2.11. Отрыв и необратимость

Все течения вязкой жидкости необратимы, так как в них механическая работа напряжений, обусловленных вязкостью, переходит в тепло. С другой стороны, большая часть энергии, которая делает течение необратимым, генерируется в виде вихрей. Хотя энергия вихревого движения в результате действия вязкости в конце концов превращается в тепло, необратимость в первую очередь связана с механизмом образования вихрей, которые в большинстве случаев, если силы плавучести невелики, появляются при формировании отрывных течений.

Два важнейших примера образования вихрей — следы и струи. След за препятствием в потоке жидкости сначала ограничен поверхностью отрыва, которая сходит с линии отрыва на теле. В случае сферы (рис. 2.11.1) отрыв начинается вблизи задней точки торможения  $S'$ , но по мере развития течения смещается вперед и при больших числах Рейнольдса располагается вдоль линии, отстоящей от передней точки торможения  $S$  примерно на  $80^\circ$ . Перед этой линией течения вне пограничного слоя почти неотличимо от потенциального. За ней образуются нестационарные вихри, которые, срываясь с тела, растут и уносятся потоком. Двумерное течение за цилиндром обычно имеет вид вихревой дорожки (рис. 2.11.2), часто называемой *дорожкой Кармана*, в которой вихри имеют противоположные направления вращения и сбегают попеременно то с одной, то с другой стороны цилиндра. За сферой течение имеет более хаотический характер, но иногда приобретает характер вихря со спиральным ядром.

В установившемся течении за цилиндром практически любого сечения проявляется тенденция к образованию вихревой дорожки. Следовательно, такое течение имеет периодический характер, и в этом, в частности, причина колебаний проводов на ветру. Частота колебаний  $\sigma$ , часто называемая *числом Струхалья*, связана со скоростью потока  $U$  и диаметром препятствия  $d$  соотношением

$$\sigma = SU/d, \quad (2.11.1)$$

где  $S$  — число Струхалья, равное для круговых цилиндров примерно 0,2.

Многие эксперименты, выполненные в аэродинамических трубах при больших числах Рейнольдса, дают результаты, характерные для данной трубы. Это связано с тем, что каждой трубе присущи свои собственные уровни турбулентности и частоты вращения вентиляторов, которые влияют на поведение испытываемых объектов в условиях отрывного обтекания.

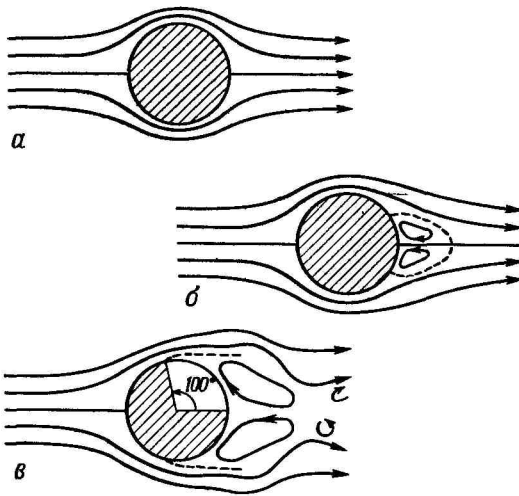


Рис. 2.11.1. Обтекание сферы с развитием отрыва.

В момент начала движения (или при очень малых числах Рейнольдса) след за сферой отсутствует (а). Однако несколько мгновений спустя происходит отрыв потока вблизи задней точки торможения (б), и точка отрыва начинает смещаться вперед, пока при больших скоростях не удалится от задней точки торможения примерно на  $100^\circ$  (в). При этом в следе развивается турбулентность. При высокой степени турбулентности набегающего потока или при шероховатой поверхности сферы, вызывающей турбулиацию пограничного слоя, точка отрыва может опять сместиться назад.



Рис. 2.11.2. След за круговым цилиндром, визуализированный частицами, плавающими на поверхности воды

Частицами служили мелкие пузырьки пены, образующиеся при введении небольшого количества стирального порошка. Насос, обеспечивающий циркуляцию воды, был отрегулирован так, что засасывал некоторое количество воздуха.

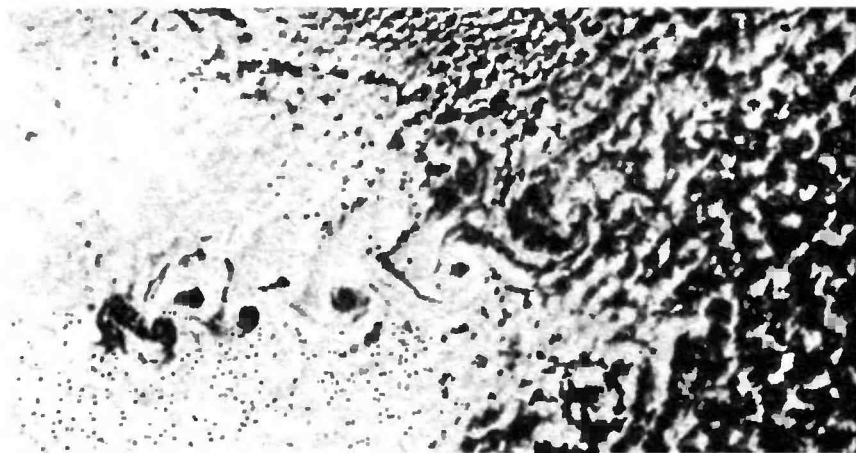


Рис. 2.11.3. Вихревая дорожка, образующаяся за о-вом Яи-Майен при западном ветре.

На острове две горы — высотой 2277 м при ширине основания 10 км и высотой 769 м при ширине основания 40 км, — ориентированные в юго-западном направлении. Структура течения визуализирована облаками, находящимися на высоте 1500—2000 м, ниже устойчивого слоя, который обеспечивает почти полную двумерность течения, когда вершины гор выступают над облачным покровом. Циклонические вихри обладают большей интенсивностью. (Фотография сделана со спутника NOAA 4 и публикуется с разрешения руководства факультета электротехники Университета Даиди.)

В первую очередь это относится к лабораторным моделям со специально сглаженной поверхностью, таким, как сферы и круговые цилиндры. Обычные окружающие нас объекты, как правило, имеют шероховатые поверхности и неровности и обдуваются ветрами со значительным уровнем турбулентности (достигающим, например, 0,2, что означает, что флуктуационная составляющая скорости составляет около  $1/5$  скорости ветра). Некоторые авторы включают в определение числа Струхала (2.11.1) множитель  $2\pi$ , а другие определяют его как величину, обратную приведенной здесь. Остров Ян-Майен (рис. 2.11.3) имеет число Струхала  $\sim 0,2$ , хотя число Рейнольдса для него  $\sim 10^{10}$  и он имеет неправильную форму.

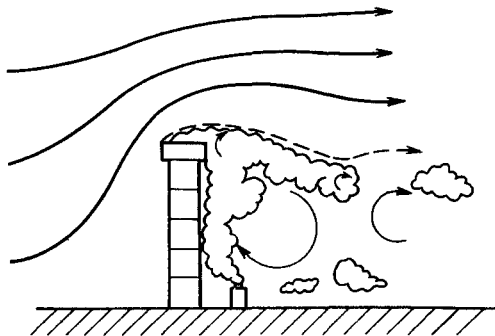
На практике наиболее важную роль в определении характера отрыва играют острые кромки. Это кромки, на которых могут начинаться свободные линии тока. Образующиеся при этом вихревые пелены свертываются в вихри, с которых начинается формирование вихревой дорожки. Хотя теоретически такие вихревые пелены рассматриваются как два параллельных ряда вихрей, расположенных в шахматном порядке, на самом деле, смещаясь вниз по потоку, вихри растут, и только после того, как с препятствия сойдет 10 или более вихрей, расстояние

между ними становится почти постоянным. К особому виду острых кромок относится спиральный выступ, который часто делают на каминных трубах. Благодаря ему вихри по высоте трубы срываются неодновременно, и поэтому не возникает периодически меняющаяся сила, которая иначе заставляла бы трубу вибрировать как единое целое.

Типичными острыми кромками, с которых срывается поток, являются угол здания, конек крыши, вершина скалы или стена на холме. Тем же свойством обладают и кромки транспортных средств. Они обеспечивают турбулентный режим течения за препятствием и величину его коэффициента лобового сопротив-

Рис. 2.11.4. Отрыв потока при обтекании стены на ее наветренной кромке.

Дым из источника, расположенного за стеной, достигает границы отрывной зоны, а затем либо циркулирует в фиксированном вихре за стеной, либо периодически уносится со срывающимися вихрями.



ления порядка единицы. Следы и линии отрыва часто становятся видны, когда в них попадает дым (рис. 2.11.4).

Струи образуются при истечении жидкости из трубы или отверстия в стенке. На высоконапорной стороне отверстия течение жидкости очень хорошо описывается классической теорией, в рамках которой  $v = \text{grad } \phi$  и  $\nabla^2 \phi = 0$  (рис. 2.11.5). Со стороны низкого давления характер течения совсем иной — здесь оно превращается в турбулентную струю (см. также гл. 8). Нередко приходится сталкиваться с наивным объяснением механизма эжекции, свойственного турбулентным струям. Во многих школьных учебниках утверждается, что окружающая струю жидкость вовлекается в нее потому, что согласно уравнению Бернулли большей скорости соответствует меньшее давление. Это утверждение ошибочно, так как для создания струи давление по другую сторону стенки, через которую она истекает, должно быть намного выше, чем в той части пространства, куда она истекает. Когда благодаря неустойчивости на границе струи к ней примешивается и уносится вниз по потоку окружающая ее жидкость, количество движения в единице объема убывает, а там, откуда была отобрана жидкость, давление падает. Если бы можно было создать ламинарную струю

с постоянной скоростью, то давление на ее границе равнялось бы давлению в окружающей жидкости, однако уравнение Бернулли в этом случае все равно было бы неприменимо. Причина этого в том, что постоянная Бернулли  $gH$ , определяемая выражением (1.7.9), для жидкости внутри и вне струи имеет разные значения, так как на границе струи образуется вихревой слой. Поэтому, когда течение становится нестационарным и турбулентным, уравнением Бернулли пользоваться нельзя.

Если бы реальные течения были обратимыми, это было бы крайне неудобно для живых существ, так как за исключением

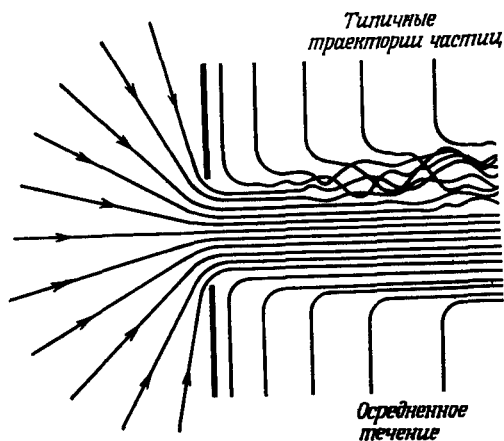


Рис. 2.11.5. Истечение струи через отверстие в стенке.

Вблизи стока или на наветренной стороне препятствия течение обычно почти потенциальное. В то же время течение в струе, истекающей из отверстия и представляющей собой след за препятствием с протоком, является турбулентным и необратимым. Здесь происходит смешение с окружающей жидкостью и ее эжекция.

случаев, когда они двигаются или когда дует ветер, они при каждом вдохе вдыхали бы тот же воздух, который только что выдохнули. Это было бы так неудобно во время сна! К счастью, при выдохе образуется струя, а вдыхаемый воздух поступает со всех сторон, как в случае стока. Жизнь целиком и полностью зависит от процессов, протекающих в жидкостях организмов живых существ, и была бы невозможна, если бы доминировали обратимые процессы.

В струе поток количества движения один и тот же на любом расстоянии от ее начала. Поэтому произведение  $a^2W^2$ , где  $a^2$  представляет площадь поперечного сечения струи, а  $W$  — осевая составляющая скорости (пропорциональная объемному расходу и «плотности количества движения»), имеет постоянную величину. Если  $W$  убывает, то  $a$  должно соответственно увеличиваться, и в результате объемный расход, который пропорционален  $a^2W$ , также возрастет. Это означает, что струя может замедляться только за счет увеличения объемного расхода жидкости, которую она несет, и, следовательно, имеет



место эжекция, обусловленная неустойчивостью вихревой пелены. Пониженное давление создается не за счет высокой скорости струи, а лишь за счет ее смешения с окружающей жидкостью. Поэтому водяная струя может понижать давление, эжектируя воздух, и это свойство используется в вакуумных насосах, подключаемых к вакуумируемым объемам в физических и химических лабораториях.

## 2.12. Критерии подобия

При изучении огромного разнообразия течений жидкостей удобно рассматривать их как относящиеся к тому или иному диапазону значений критериев подобия. Так, рассматривая переход от ламинарного течения, для которого силы инерции пренебрежимо малы (режим Стокса) и малы числа Рейнольдса, к течениям, характеризующимся большими числами Рейнольдса, когда можно пренебречь вязкостью, а поток является безвихревым перед препятствием и становится полностью турбулентным за ним, можно предположить, что существуют и другие важные безразмерные величины. Так, например, часто считают, что число Маха в естественных потоках  $U/c$  всюду мало, поэтому эффектами сжимаемости можно пренебречь.

Другие важнейшие критерии, с которыми мы будем сталкиваться в наших исследованиях, связаны с плавучестью. Число Фруда представляет собой отношение сил плавучести (или сил тяжести) к силам инерции, т. е. отношение гравитационной потенциальной энергии к кинетической энергии. При изучении эффектов плавучести в последующих главах это число будет иметь порядок единицы; в противном случае оно будет полагаться равным нулю. В любом случае оно не очень велико. Поэтому обычным является приближение Буссинеска, применимое к случаям, когда разности плотностей невелики. Существует число плавучести

$$B = \frac{\Delta\rho}{\rho}, \quad (2.12.1)$$

которое связано с конвекцией, обусловленной аномалией плотности  $\Delta\rho$ . В большинстве случаев  $B \ll 1$ . Ускорения, сообщаемые телам силами плавучести, согласно закону Архимеда равны  $gB$  и, следовательно, малы по сравнению с  $g$ . Приближение Буссинеска состоит в пренебрежении аномалиями плотности, за исключением случаев, когда они комбинируются с  $g$ . Это равносильно пренебрежению  $f$  по сравнению с  $g$  в уравнении завихренности (1.4.1) на том основании, что  $f$  имеет порядок  $gB$ ; однако этого нельзя делать в уравнении (1.4.4), являющемся уравнением для  $f$ .

В устойчиво стратифицированной жидкости плавучесть проявляется через безразмерную величину

$$\beta h \approx -\frac{h}{\rho} \text{grad } \rho \approx -h \frac{\partial \rho}{\rho \partial z}, \quad (2.12.2)$$

где  $h$  — характерная высота. Таково значение  $B$ , если  $\rho$  понимается как величина разности плотностей. Число Фруда можно представить по-разному, например, как

$$F = \frac{g\beta h^2}{U^2} \quad \text{или} \quad \frac{gBh}{U^2}. \quad (2.12.3)$$

В тех случаях, когда существенна завихренность, большое значение имеет *число Ричардсона*. Оно отличается от других безразмерных величин тем, что обычно меняется в пределах поля течения и имеет лишь локальное значение, так как представляет собой отношение градиентов. Таким образом, число Ричардсона

$$Ri = g\beta \left| \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right|. \quad (2.12.4)$$

является отношением стабилизирующего эффекта плотностной стратификации к дестабилизирующему эффекту градиентов скорости. В гл. 6 мы увидим, что не существует простых критериев устойчивости, основанных на локальных значениях какой-либо безразмерной величины, и здесь уместно вспомнить, что в форме выражений (2.12.3) число  $F$  содержит градиент  $\beta$  и, следовательно, также является локальной характеристикой. Поэтому многие решения задач с градиентами скорости и плотности являются частными и не обладают общностью, так как  $F$  и  $Ri$  меняются в пределах поля течения в очень широких пределах. Однако в тех случаях, когда существенно число Рейнольдса  $Re$ , заранее ясно, что характер поля течения определяется вязкостью.

Таким образом, завихренность и плотностную стратификацию надо изучать, имея в виду вопрос: «Какие явления существенны в данном течении?», а не вопрос: «Каковы его безразмерные параметры?», так как последних слишком много.

## ВТОРИЧНАЯ ЗАВИХРЕННОСТЬ

## 3.1. Определения

Основное движение в течении жидкости, называемое *осредненным*, — это движение, которое переносит жидкость. В установившемся течении перемещение частиц происходит вдоль линий тока. На первый взгляд может показаться, что все движение и заключается в этом процессе; однако существуют перемещения частиц жидкости в плоскостях, перпендикулярных линиям тока, в частности вращательное движение вокруг линий тока. Это движение называется *вторичным течением*, и мерой его служит направленная по потоку компонента вектора завихренности, которая называется *вторичной завихренностью*. Энергия потока весьма расточительно расходуется в завихренности на бесполезные и хаотические движения частиц или другие эффекты, ведущие к перемешиванию жидкости. Мы здесь рассмотрим механизмы образования таких побочных движений. Эти механизмы особенно интересны, поскольку вектор завихренности, возникающей у стенок вследствие вязкости, перпендикулярен направлению течения у стенки. Такое явление наблюдается в трубах и реках и в двугранных углах, образуемых стыками стенок и дна каналов. Во всех этих случаях оно связано с наличием направленной перпендикулярно потоку компоненты вектора завихренности и возникает обычно при искривлении осредненного течения.

Обозначим через  $s$  расстояние, отсчитываемое вдоль траектории жидкой частицы, ее скорость — через  $q$ , кривизну траектории — через  $R$ , величину касательной составляющей ускорения  $f$  — через  $a$ , а коэффициент кручения траектории — через  $\tau$ . Далее введем подвижную систему натуральных координат, как это принято в дифференциальной геометрии. Единичный вектор, направленный вдоль касательной к траектории частицы (орт касательной), обозначим через  $t$ . По определению.

$$t = v/q. \quad (3.1.1)$$

Так как  $t \cdot t = 1$ , то, дифференцируя это равенство по  $s$ , получим

$$t = \frac{\partial t}{\partial s} = 0. \quad (3.1.2)$$

Это означает, что изменение касательной  $\mathbf{t}$  всегда происходит в направлении, перпендикулярном самому вектору  $\mathbf{t}$ , поскольку этот вектор имеет по определению постоянную абсолютную величину, равную 1. Векторы  $\mathbf{t}$  и  $d\mathbf{t}/ds$  определяют плоскость, называемую *соприкасающейся*, так как она примыкает к пространственной кривой в данной точке. Соприкасающаяся плоскость определяется как предельное положение плоскости, проведенной либо через три последовательные точки траектории при сближении двух крайних к средней (заданной) точке, либо через две соседние касательные к траектории при сближении точек касания вдоль траектории (касательная определяется как предельное положение секущей при сближении вдоль траектории точек, через которые проведена секущая). Единичный вектор, проведенный в направлении  $d\mathbf{t}/ds$ , обозначается через  $\mathbf{n}$  и называется *главной нормалью*. Кривизна  $\kappa$  задается выражением

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}. \quad (3.1.3)$$

Очевидно, что в случае кругового движения величина  $\kappa^{-1}$  представляет собой радиус окружности, поэтому во всех случаях величину  $\kappa^{-1}$  называют *радиусом кривизны*. Абсолютная величина кривизны  $\kappa$  равна

$$\kappa = -\mathbf{n} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|. \quad (3.1.4)$$

Так как  $\mathbf{t}\mathbf{n}=0$ , то, дифференцируя, получим

$$\mathbf{n} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\mathbf{t} \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \kappa. \quad (3.1.5)$$

*Бинормаль* определяется выражением для единичного вектора

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (3.1.6)$$

и вместе с  $\mathbf{n}$  определяет так называемую *нормальную плоскость*. Векторы  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$  образуют правую подвижную прямоугольную систему координат (натуральные координаты), рис. 3.1.1.

При движении вдоль траектории касательная  $\mathbf{t}$  поворачивается со скоростью  $\kappa$  в направлении  $\mathbf{n}$ . В то же время  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$  поворачиваются вокруг  $\mathbf{t}$  со скоростью  $\tau$ , которая определяет кручение траектории. Таким образом,  $\tau$  есть скорость, с которой соприкасающаяся плоскость вращается вокруг  $\mathbf{t}$  во время движения точки вдоль траектории. Очевидно, что для плоской кривой  $\tau=0$ .

Когда  $\mathbf{t}$  поворачивается в направлении  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  в свою очередь поворачивается в направлении  $-\mathbf{t}$  со скоростью  $\kappa$ , одновре-

менно вращаясь по направлению к  $\mathbf{b}$  со скоростью  $\tau$ . Вектор  $\mathbf{b}$  поворачивается в направлении  $-\mathbf{n}$  со скоростью  $\tau$  и для плоской траектории ( $\tau=0$ ) находится в фиксированном положении по нормали к плоскости кривой. Как известно, ускорение частицы лежит в соприкасающейся плоскости и может быть разложено на составляющие в направлениях  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$ .

Теперь построим математический вывод этих рассуждений. Так как нормаль  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то у  $\partial\mathbf{n}/\partial s$  нет составляющей вдоль  $\mathbf{n}$  и

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}. \quad (3.1.7)$$

Коэффициент при касательной  $\mathbf{t}$  должен быть равен  $\kappa$ , чтобы равенство (3.1.7), при скалярном умножении на  $\mathbf{t}$ , совпало

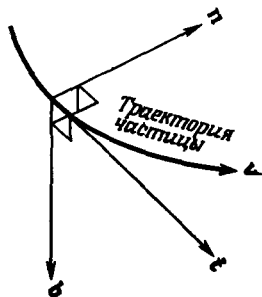


Рис. 3.1.1. Орт касательной, нормали и бинормали к траектории частицы.

с (3.1.5), так что (3.1.7) можно принять за определение  $\tau$ . Так как  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$ , то  $\mathbf{t} \cdot (\partial\mathbf{b}/\partial s) = -\mathbf{b} \cdot (\partial\mathbf{t}/\partial s) = 0$  по (3.1.3), так что  $\partial\mathbf{b}/\partial s$  имеет единственную ненулевую компоненту в направлении  $\mathbf{n}$ , равную  $\tau$ . Это можно показать, продифференцировав выражение  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$  с использованием (3.1.3). Таким образом,

$$\partial\mathbf{b}/\partial s = -\tau\mathbf{n}. \quad (3.1.8)$$

Равенства (3.1.3), (3.1.7) и (3.1.8) называются *формулами Френе*.

Так как ускорение действует в плоскости  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$ , то в установленном течении по (1.2.6) имеем:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \text{grad}^1/2 q^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \quad (3.1.9)$$

$$= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \quad (3.1.10)$$

$$= q (\mathbf{t} \cdot \text{grad}) q \mathbf{t} = \text{по (3.1.1)} = \quad (3.1.11)$$

$$= \kappa q^2 \mathbf{n} + a \mathbf{t}, \quad (3.1.12)$$

поскольку  $t \cdot \text{grad} = \partial/\partial s$ , а  $a = v \cdot \text{grad} q$  — тангенциальное ускорение. Таким образом,

$$f \cdot t = t \cdot \text{grad} \frac{1}{2} q^2 = a, \quad (3.1.13)$$

выражение

$$f \cdot n = \kappa q^2 \quad (3.1.14)$$

описывает центробежную силу, действующую на единичную массу, из определения бинормали следует

$$f \cdot b = 0, \quad (3.1.15)$$

$$f \cdot t = (f \cdot n) (n \cdot t) = \kappa q^2 b, \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned} \omega \cdot f &= \omega \cdot \text{grad} \frac{1}{2} q^2 \text{ по (3.1.9) } = \\ &= \omega \cdot \text{grad} (\frac{1}{2} v \cdot v) = \\ &= v (\omega \cdot \text{grad}) v. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Вторичная завихренность равна

$$\omega_s = \omega \cdot t = \frac{1}{q} \omega \cdot v \quad (3.1.18)$$

и представляет собой половину ротации вокруг касательной  $t$ . При изучении вторичной завихренности часто более удобной характеристикой является величина угла поворота, отнесенная к единице расстояния вдоль траектории. Это особенно удобно, если соотнести такой угол поворота с какой-нибудь длиной, связанной либо с геометрией трубы или канала, вызывающей искривление потока, либо с положением определенного препятствия. В этом случае подходящей числовой характеристикой будет отношение  $\omega_s/q$ .

### 3.2. Уравнение вторичной завихренности

Хотя это несколько ограничивает общность рассуждений, в дальнейшем мы будем рассматривать только установившееся течение. Следует отметить, что определение вторичного течения теряет свои строгие рамки для неустановившегося потока, а трехмерное течение уже само по себе является достаточно сложным объектом. Мы покажем, что неустойчивость можно изучать и на примере стационарного течения, так как если будет установлено, что малые возмущения возрастают вниз по течению, то это эквивалентно распространению возмущений. Тот факт, что возмущение не распространяется вверх по течению, для нас просто означает помещение начала координат

в точке, где возникает такое возмущение, так как основное внимание мы направим на то, чтобы выяснить, как возмущение способствует превращению стационарного течения в турбулентное.

Рассмотрим уравнение завихренности в форме

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2.1)$$

Затем, используя результаты предыдущего раздела, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \frac{\boldsymbol{\omega} t}{q} &= \boldsymbol{\omega} \left[ \frac{1}{q} (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) t + t \left( \mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{1}{q} \right) \right] + \\ &+ \frac{t}{q} (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \left[ \kappa \mathbf{n} - \frac{1}{q^3} t (\mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{1}{2} q^2) \right] + \\ &+ \frac{t}{q} [-\boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}] = \\ &= \boldsymbol{\omega} \left[ \kappa \mathbf{n} - \frac{1}{q^2} t (\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}) \right] - \frac{\boldsymbol{\omega} t}{q} \text{div} \mathbf{v} + \frac{1}{q^2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{f} + \frac{t}{q} [\mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}) + \\ &\quad \downarrow \text{(3.1.10)} \\ &\quad \downarrow \\ &+ \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega} \left[ \kappa \mathbf{n} + \frac{1}{q^2} \mathbf{n} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \right] - \frac{\boldsymbol{\omega} t}{q} \text{div} \mathbf{v} - \\ &\quad \downarrow \text{(3.1.14)} \quad - \frac{1}{q} \mathbf{R} \mathbf{f} \times \mathbf{t} + \frac{t}{q} \mathbf{R} \times \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} + \nu \frac{t}{q} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &= 2\kappa \boldsymbol{\omega} \mathbf{n} + \kappa q \mathbf{R} \mathbf{b} + \frac{1}{q} \mathbf{R} \times \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} - \frac{\boldsymbol{\omega} t}{q} \text{div} \mathbf{v} + \nu \frac{1}{q} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

В этом уравнении член с  $\text{div} \mathbf{v}$  в правой части имеет тот же физический смысл, что и в первоначальном уравнении завихренности, и не играет особой роли. Точно так же не приобретает нового смысла член, описывающий влияние вязкости. В дальнейшем мы не будем останавливаться на рассмотрении этих двух членов, а сосредоточим внимание на влиянии кривизны траектории и силы тяжести. Для этой цели весьма удобно уравнение движения *невязкой несжимаемой жидкости*, взятое в форме

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{\boldsymbol{\omega}_s}{q} = 2\kappa \boldsymbol{\omega} \mathbf{n} + \kappa q \mathbf{R} \mathbf{b} + \frac{1}{q} \mathbf{R} \times \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}. \quad (3.2.3)$$

С учетом

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{n} &= \omega \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{t} \times \omega \mathbf{b} = \frac{1}{q} (\mathbf{v} \times \omega) \mathbf{b} = \\ &= \frac{1}{q} (\text{grad } 1/2q^2 - \mathbf{f}) \mathbf{b} = \frac{1}{q} \text{grad } 1/2q^2 \mathbf{b}\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

получаем

$$\begin{aligned}2\kappa\omega \mathbf{n} + \kappa q \mathbf{Rb} &= \kappa q \left[ \frac{2}{q^2\rho} \rho \text{grad } 1/2q^2 + \frac{2}{q^2\rho} 1/2q^2 \text{grad } \rho \right] \mathbf{b} = \\ &= \kappa q \text{grad } \ln(1/2\rho q^2) \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Если мы временно пренебрежем гравитационным членом (что оправдано при  $\mathbf{f} \gg \mathbf{g}$  и соответствует, например, течению в искривленной трубе), то (3.2.2) преобразуется в

$$\mathbf{v} \text{grad } \frac{\omega_s}{q} = \kappa q \text{grad } \mathbf{L} \cdot \mathbf{b}, \quad (3.2.5)$$

где

$$\mathbf{L} = \ln\left(\frac{1}{2} \rho q^2\right). \quad (3.2.6)$$

В случае когда градиенты плотности отсутствуют, можно воспользоваться соотношением (3.2.4), чтобы выразить в (3.2.3) член  $\omega \cdot \mathbf{n}$ . Вообще говоря, нетрудно установить, что градиенты  $\rho$  и  $q$  оказывают похожее влияние на образование вторичной завихренности в случае криволинейного течения. Если жидкость горизонтально стратифицирована, то член с  $\mathbf{g}$  должен исчезнуть еще выше по течению, так что возможность применения (3.2.5) не ограничивается случаем  $\mathbf{f} \ll \mathbf{g}$ . Рассматривая силы, действующие на жидкость, мы видим, что силы инерции представлены членом  $\text{grad } \mathbf{L}$ .

Возвращаясь к (3.2.3), отметим, что член  $2\kappa\omega \mathbf{n}$  образовался из двух различных членов уравнения завихренности. Первая часть определяется членом  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{t}$ . Она отражает тот факт, что при изменении направления касательной  $\mathbf{t}$  вдоль траектории частицы вектор завихренности, который был первоначально направлен по главной нормали, приобретает составляющую, направленную вдоль касательной, и, таким образом, возникает вторичная завихренность. Вторая часть получается из члена  $(\omega \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ , который описывает перенос (адвекцию) вихревых линий вместе с жидкостью (рис. 3.2.1). На вогнутой стороне траектории скорость больше, чем на выпуклой, так что материальный отрезок  $AB$ , первоначально перпендикулярный касательной  $\mathbf{t}$ , переходит в положение  $A'B'$  и перестает быть нормальным к линиям тока. Таким образом, вектор завихренности



он приобретает составляющую вдоль  $t$ , если первоначально он имел составляющую по направлению  $n$ .

Ускорение жидкости во внутренней (вогнутой) стороне потока является свойством безвихревого течения. Возникновение этого ускорения можно объяснить следующим образом: чтобы плавно обогнуть препятствие, частицы жидкости должны испытывать давление в направлении центра кривизны. Таким образом, градиент давления направлен по главной нормали, и частицы жидкости, находящиеся ближе к центру кривизны,

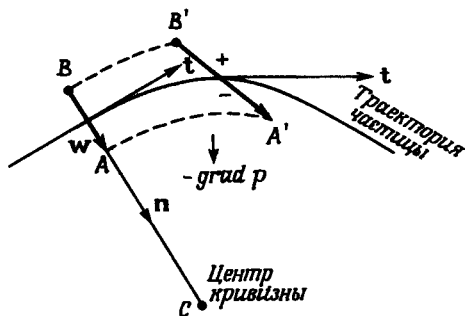


Рис. 3.2.1. Завихренность, направленная по потоку.

Создается из вихревых линий, направленных поперек потока, в результате изменения направления потока и соответствующего поворота вихревых линий в противоположном направлении.

смещаются в сторону меньшего давления и испытывают большее ускорение, чем те, которые находятся в процессе движения на большем от центра расстоянии. Это же явление можно рассмотреть и другим образом, а именно с точки зрения свойства безвихревого течения: так как в плоскости изгиба течения завихренность отсутствует, относительные повороты двух жидких материальных отрезков, расположенных под прямым углом, будут равными и противоположными по знаку. Таким образом, материальный отрезок, состоящий из определенных частиц жидкости и первоначально ориентированный вдоль касательной, должен поворачиваться в направлении, противоположном повороту аналогичного материального отрезка, первоначально ориентированного вдоль нормали, при движении их общей начальной точки вдоль криволинейной траектории. Следовательно, вектор завихренности, который до поворота также был ориентирован вдоль главной нормали и поэтому не порождал какой-либо завихренности в плоскости течения (т. е. течение можно было считать безвихревым), теперь повернется относительно нового положения касательной на угол, равный удвоенному углу поворота течения. Отсюда видно, почему обе части, составляющие член  $2\omega n$ , о котором говорилось выше, равны.

Эффект вторичной завихренности можно проследить на примере поворота горизонтального течения в горизонтальной

плоскости. Вектор  $\mathbf{g}$  направлен вниз, в направлении бинормали  $\mathbf{b}$ , которая в первом приближении не меняет своей вертикальной ориентации, хотя вращение, обусловленное вторичной завихренностью, может вывести линии тока из первоначальной плоскости. На рис. 3.2.2 показан случай разворачивающегося течения, первоначально обладающего скоростью, возрастающей в вертикальном направлении, и вектором завихренности, ориентированным в направлении  $-\mathbf{n}$ . Поверхности Бернулли, содержащие вихревые линии и линии тока, сначала находятся

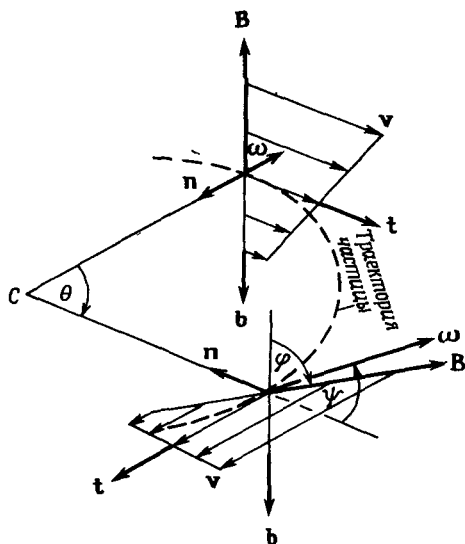


Рис. 3.2.2. Эффект вторичной завихренности разворачивающегося течения.

Вектор Бернулли, который движется вместе с частицей жидкости, поворачивается вокруг линии тока на угол  $\varphi$ , когда течение поворачивается на угол  $\theta$ , из-за наличия направленной по потоку компоненты вектора завихренности  $\omega$ .

в плоскости течения. Вектор Бернулли  $\mathbf{B}$ , определяемый как вектор, нормальный к поверхности Бернулли в данной точке траектории, задается выражением

$$\mathbf{B} = \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2.7)$$

Поворот течения на угол  $\theta$  приводит к тому, что вектор  $\mathbf{B}$  поворачивается вокруг  $\mathbf{t}$  на угол  $\varphi$ , а вектор  $\boldsymbol{\omega}$  соответствующим образом поворачивается относительно  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  на угол  $\psi$ . Таким образом, слои жидкости, обладающие большими скоростями, смещаются к внешней стороне поворачивающегося потока.

Опыты Готорна, кратко рассмотренные ниже, обнаруживают эффект поворота вектора  $\mathbf{B}$  при течении в изогнутой трубе вследствие появления вторичной завихренности. Отметим, что на середине широкой и медленной реки даже при ее повороте течение остается горизонтальным, а вектор  $\mathbf{B}$  — вертикальным, так что эффект вторичной завихренности проявляется лишь

в смещении быстротекущих поверхностных слоев жидкости к внешнему берегу и появлении вертикальных течений у берегов реки. Физический смысл члена  $\kappa q \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}$  теперь очевиден. Он отражает влияние члена, содержащего градиент плотности в правой части выражения (3.2.5), и описывает перенос наиболее плотной жидкости к внешней стороне изгиба. Составляющая градиента плотности в направлении бинормали  $\mathbf{b}$  порождает вторичное течение таким же образом, как и вектор завихренности, ориентированный в направлении нормали  $\mathbf{n}$  (который является градиентом скорости в направлении  $\mathbf{b}$ ).

Влияние гравитации проявляется в дополнении предыдущего эффекта тенденцией к перемещению наиболее плотных слоев жидкости в придонную часть течения. В нашем случае этот эффект описывается членом  $(1/q) \mathbf{R} \times \mathbf{t} g \mathbf{b}$  (вектор  $\mathbf{g}$  параллелен бинормали  $\mathbf{b}$ ), который равен  $-(g/q) \mathbf{R} \mathbf{n}$  и характеризует тенденцию поверхностей равной плотности поворачиваться до тех пор, пока они не включают в себя вектор нормали  $\mathbf{n}$ , ориентированный горизонтально в данном примере.

### 3.3. Формула Сквайра

Уравнение вторичной завихренности для стационарного течения невязкой жидкости с однородной плотностью имеет следующий простой вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega t}{q} = 2\kappa \omega n, \quad (3.3.1)$$

или

$$q \frac{\partial}{\partial s} \frac{\omega_s}{q} = 2\kappa \omega_n, \quad (3.3.2)$$

где индексы  $s$  и  $n$  относятся к составляющим вдоль линии тока и по нормали соответственно. Для малого изменения направления потока  $d\theta$ , так как  $d\theta = \kappa ds$ , имеем

$$d \frac{\omega_s}{q} = 2 \frac{\omega_n}{q} \kappa ds = 2 \frac{\omega_n}{q} d\theta.$$

Приближенно (а иногда и точно) скорость может оставаться постоянной, когда линии тока поворачиваются на угол  $d\theta$ . Поэтому другой вариант этой формулы, предложенный Сквайром и Винтером, имеет вид

$$d\omega_s = 2\omega_n d\theta. \quad (3.3.3)$$

Эта зависимость описывает появление у вектора завихренности, первоначально ориентированного по нормали, составляющей,

ориентированной вдоль линий тока. Смысл коэффициента 2 был разъяснен в предыдущем разделе.

Сквайр, в частности, рассматривал поведение пограничного слоя при течении воздуха сквозь аэродинамическую решетку на угловых участках аэродинамической трубы замкнутого типа. На рис. 3.3.1 показана схема течения, поворачивающегося в го-

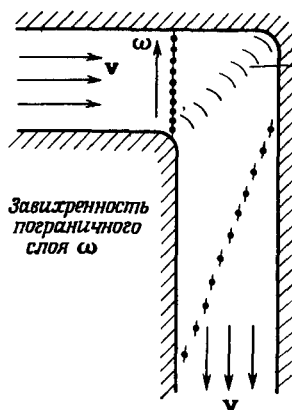


Рис. 3.3.1. Вектор завихренности пограничного слоя в аэродинамической трубе (направлен поперек потока).

Преодолевая изгиб трубы сквозь аэродинамическую решетку, материальный отрезок разбивается на отдельные элементы, образуя диагональную линию. В каждой секции решетки образуется вторичное течение. Смещения, создаваемые этими вторичными течениями, малы по сравнению с теми, которые имели бы место, если бы не было решетки.

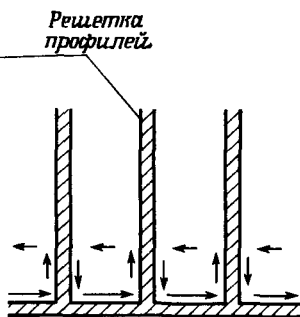


Рис. 3.3.2. Вторичные течения внутри решетки у внутренней стенки тракта при его 90°-ном изгибе.

Основное течение направлено перпендикулярно плоскости рисунка от читателя.

ризонгальной плоскости на 90° в колене трубы, снабженном системой профилей. При этом течение разделяется на несколько тонких параллельных потоков, вследствие чего удается избежать появления больших градиентов скорости, так как поворот каждого потока происходит на небольшом участке. Материальный отрезок, выделенный в потоке перед поворотом и ориентированный поперек течения, после прохождения через решетку оказывается разделенным на несколько элементов, каждый из которых поворачивается независимо. После поворота эти элементы вновь образуют практически непрерывный поток, турбулентность которого имеет весьма малый масштаб порядка толщины элементарного профиля решетки.

Однако на верхней и нижней стенках тракта существует пограничный слой с завихрениями, ориентированными поперек

потока (рис. 3.3.2). В области решетки это вызывает вторичное течение с компонентой скорости, ориентированной поперек потока, которая определяет перенос части движущегося воздуха вдоль верхней и нижней стенок тракта в направлении внутренней (ближней к центру кривизны поворота) стенки наряду со слабым компенсационным течением в сторону ядра потока. Формула Сквайра показывает, что интенсивность вторичного течения, порожденного прохождением потока через решетку, не зависит от размеров решетки, а зависит, главным образом, от угла поворота потока. Длительность же его существования тем меньше, чем короче участок, на котором происходит поворот потока, а вращательные движения, возникающие в ячейках решетки, быстро гасят друг друга после поворота.

### 3.4. Течение в речных излучинах

Течение реки тормозится за счет трения о ложе, а также за счет сопротивления, создаваемого отдельными препятствиями

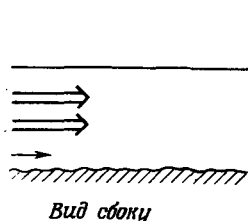


Рис. 3.4.1. Профиль скоростей в реке.

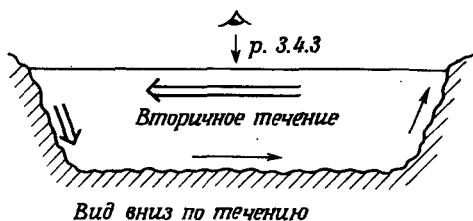


Рис. 3.4.2. Вторичное течение в излучине реки при ее повороте вправо.

и всякого рода неровностями. Заметное торможение обусловлено также сопротивлением различных твердых частиц, увлекаемых течением, сталкивающихся друг с другом и оседающих на дно. Так как обычно ширина рек много больше их глубины, можно считать, что у дна жидкость движется медленно, тогда как основная масса воды над нею движется быстрее (рис. 3.4.1).

После поворота течения вектор завихренности, который был первоначально направлен поперек потока, повернется относительно касательной, и при этом образуется компонента  $\omega_s$ . Медленно движущаяся вода у дна, естественно, повернется на значительно больший угол, чем быстро движущийся поток у поверхности. Можно считать, что оба эти слоя подвергаются действию одной и той же силы давления, направленной к центру кривизны. Если влиянием силы тяжести можно пренебречь, то

положение центра кривизны можно определить по наклону свободной поверхности, так что уравнение гидростатики здесь применимо для всей толщи течения. Результатом поворота будет снос быстротекущих поверхностных слоев воды в сторону внешнего берега (рис. 3.4.2 и 3.4.3). Здесь внимательный читатель усмотрит противоречие с ранее обсуждавшимся положением о том, что течение должно замедляться на внешней стороне потока и ускоряться на внутренней, однако в данном

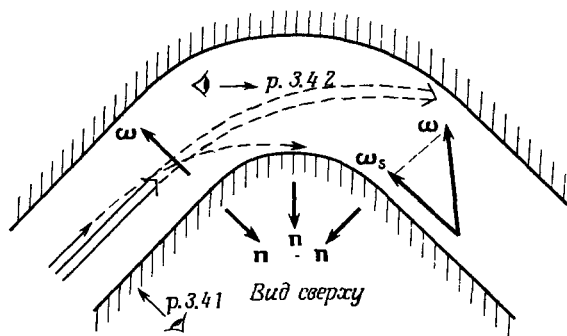


Рис. 3.4.3. Траектории частиц в основном течении и пограничном слое реки при ее повороте вправо.

Образуется направленная против течения компонента вектора завихренности  $\omega$ ,

случае речь идет о трехмерном, а не плоском течении. Поэтому внешний берег речной излучины размывает, а с противоположной стороны, где течение замедленно, скапливаются наносы. Таким образом, русло реки в целом смещается в сторону излучин и со временем приобретает все более усложняющуюся извилистую форму (рис. 3.4.4).

Проводя это рассмотрение, мы предполагали, что вся завихренность уже существует в жидкости к тому моменту, когда она оказывается в интересующей нас области, и что ложе реки не вносит дополнительных возмущений. На практике завихренность непрерывно возникает и передается течению. Если бы этого не происходило, то вторичное течение, возникающее при прохождении следующей излучины, имеющей противоположную кривизну, в значительной степени зависело бы, во-первых, от того, насколько был велик прежний угол поворота, вызвавший перемещение поверхностей Бернулли в новое положение, и, во-вторых, от величины вектора вторичной завихренности и момента количества движения, приобретенных данной порцией жидкости после прохождения предыдущей излучины. В реках

завихренность довольно интенсивно генерируется в придонных слоях течения, так что поток, подойдя к следующей излучине, практически не испытывает влияния состояния, в котором находилась данная масса воды при прохождении предыдущей излучины.

В других ситуациях, когда поле скоростей существенно изменяется под действием вторичной завихренности, использованный нами прием аппроксимации явления в первом приближении

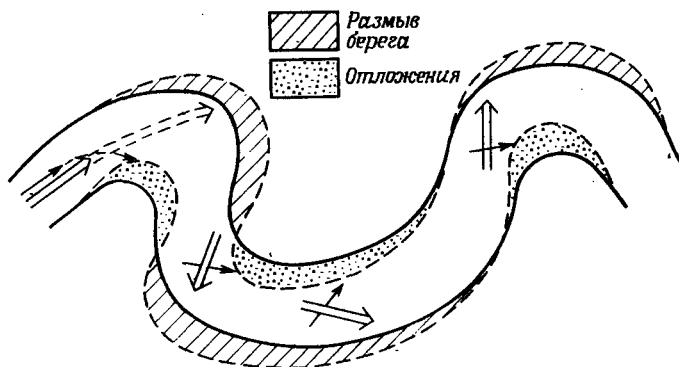


Рис 3.4.4. Меандрирование реки под действием поверхностного и придонного потоков.

Внешний берег излучины реки разрушается основным поверхностным потоком, движущимся быстро, а на внутреннем берегу возникают отложения наносов из придонного слоя, движущегося медленно. В результате со временем меандрирование реки увеличивается.

оказывается неприменимым или применимым лишь качественно. В ряде случаев картина явления настолько сложна, что не может быть и речи о каком бы то ни было детальном количественном описании. Рост излучин (меандров<sup>1)</sup>) часто приводит к образованию серповидных озер в долине реки — стариц.

Одну из наиболее примечательных иллюстраций влияния вторичной завихренности представляет боковое русло для отвода воды из прямолинейного русла. Можно считать, что характер течения в таком ложе определяется сопротивлением течения в поверхностных слоях и ускорением за счет поля давления, связанного с формой свободной поверхности. Поле давления определяется характером течения основной массы жидкости выше придонного пограничного слоя; на рис. 3.4.5

<sup>1)</sup> Термины «меандр», «меандрирование» произошли от названия реки в Карии, Малая Азия (Meander по-латыни, Maïandros по-гречески); явление описано Ксенофонтom в 375 году до н. э.

показан случай, когда расход воды в отводном канале составляет одну треть от расхода воды в основном потоке. Поле давления имеет здесь, с одной стороны, малый градиент, направленный вниз по течению, который уравнивает сопротивление русла, а с другой стороны, более значительные поперечные градиенты, которые замедляют основной поток и направляют массы воды в боковой канал. Для основного течения характерна почти постоянная глубина и практически нуле-

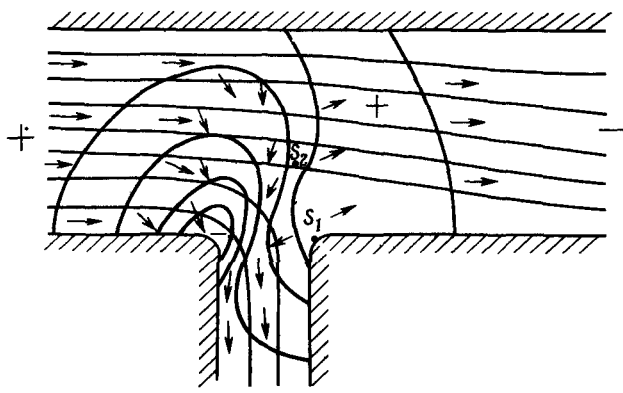


Рис. 3.4.5. Характер течения вблизи водозабора, устроенного под прямым углом к прямолинейному основному руслу.

Линии на рисунке характеризуют топографию (+ и -) свободной поверхности и линии тока основного течения (боковой канал отводит примерно одну треть потока из основного течения). Стрелки показывают направление придонного течения;  $S_1$  и  $S_2$  — точки торможения в этом течении.

вая дивергенция, поэтому его можно изображать с помощью линий тока, густота которых обратно пропорциональна величине скорости течения (рис. 3.4.5).

Придонное течение, показанное на рис. 3.4.5 короткими стрелками, обладает расходимостью, а точки торможения  $S_1$  и  $S_2$  в данном случае соответствуют разделению потоков. Точное положение этих точек полностью определяется геометрией течения в каждом конкретном случае. Области высокого и низкого давления показаны знаками «+» и «-» соответственно.

Наиболее существенной особенностью рассматриваемого примера является наличие зоны повышенного давления, внутри которой основное течение замедляется, и зоны пониженного давления в области обтекания угла криволинейным потоком, направляющимся в отводной канал. Следствием этого является



то, что по меньшей мере две трети придонного течения уходит в боковое русло. Можно так спроектировать отводной канал, что все придонное течение будет уходить в него. В качестве одного из простых объяснений причины гибели цивилизации в Двуречье часто выдвигалась мысль о том, что строители ирригационных сооружений на Тигре и Евфрате, от эффективности которых зависели сельское хозяйство и вся цивилизация в целом, не имели ни малейшего представления о вторичном течении и упорно строили отводные каналы под прямым углом к основному водотоку. Поэтому каналы систематически блоки-

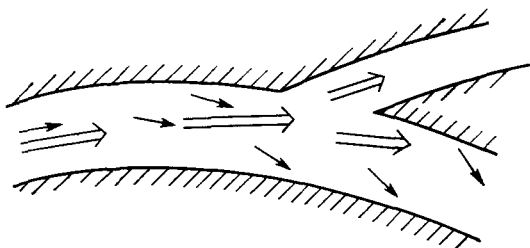


Рис. 3.4.6. Отвод воды с внешней стороны излучины. Придонное течение и наносы в отводной канал не попадают.

ровались донными наносами, и все попытки очистить их приводили лишь к общему повышению уровня (обмелению) ирригационной системы, так что постепенно гравитационного напора стало не хватать и орошение земель прекратилось.

Создающее наносы вторичное течение возникает в области обтекания потоком верхнего по течению угла. Одна из точек торможения,  $S_1$ , находится на углу входа в канал, расположенном ниже по течению, где имеет место максимум давления. Другая точка торможения,  $S_2$ , расположена там, где две силы (сила, обусловленная градиентом давления, и сила трения верхних слоев) равны и противоположны по направлению. В этой точке линия тока главного течения пересекает изобару под прямым углом.

Чтобы избежать отложения наносов в отводном канале, он должен начинаться на внешней стороне изгиба основного потока (рис. 3.4.6), где придонное течение отходит от внешнего берега излучины.

Количество отложений, выносимых из главного русла, можно уменьшить и другим способом, а именно создать в потоке продольную стенку, которая заставит поток, входящий в боковое русло, замедляться еще до того, как он начнет

изгибаться в направлении бокового русла. Таким способом придонное течение в основном потоке будет отсекается от входа в боковое русло (рис. 3.4.7).

Перейдем теперь к рассмотрению остаточного вторичного течения в главном потоке после прохождения входа в отводной канал.

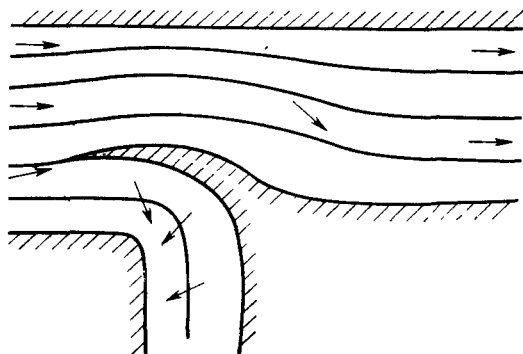


Рис. 3.4.7. Искусственное замедление течения перед входом в излучину с целью уменьшения попадания наносов в отводной канал.

### 3.5. Колебания в изогнутых трубах

В данном рассмотрении мы пренебрегаем воздействием градиента плотности, если не считать замечания качественного характера в конце раздела. Следовательно, силой тяжести тоже можно пренебречь, поэтому для удобства мы будем рассматривать движение, происходящее в горизонтальном изгибе (рис. 3.5.1) трубы кругового сечения. Основное уравнение (3.2.5) можно записать тогда в виде

$$q \frac{\partial}{\partial s} \frac{\omega_s}{q} = \kappa q \operatorname{grad} (\ln^{1/2} \rho q^2) b. \quad (3.5.1)$$

В обозначениях разд. 3.2, проиллюстрированных на рис. 3.5.2,  $\varphi$  представляет собой угол, на который поверхность Бернулли поворачивается относительно линии тока. Если для выявления основного механизма процесса предположить, что поверхности Бернулли имеют одну и ту же угловую скорость на рассматриваемом участке трубы, то можно написать

$$\omega_s = 2 \frac{d\varphi}{dt} = 2q \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad (3.5.2)$$

Если предположить также, что весь поток имеет такую же кривизну, как осевая линия трубы (это эквивалентно предположению, что, во-первых, диаметр трубы мал по сравнению с радиусом кривизны изгиба трубы, а, во-вторых, изменение

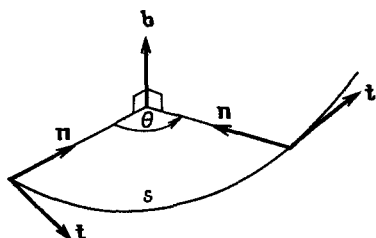


Рис. 35.1 Система координат для течения в горизонтальном изгибе трубы.

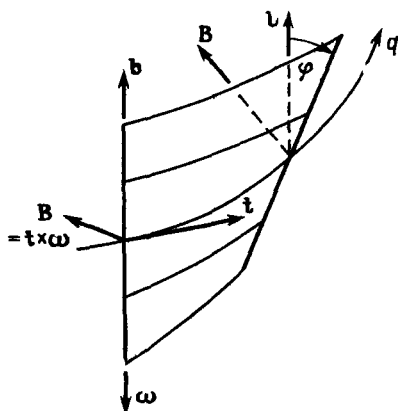


Рис. 35.2. Поворот поверхности Бернулли при повороте потока.

Вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен поверхности Бернулли, которая поворачивается на угол  $\varphi$  в равновесном состоянии  $\varphi=0$ , а векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{n}$  параллельны.

кривизны потока вследствие спирального движения частиц мало по сравнению с кривизной осевой линии), то бинормаль  $\mathbf{b}$  можно рассматривать как постоянный вектор, ориентированный



Рис. 35.3. Вторичное винтовое движение частиц вдоль линии тока.

В теории предполагается, что по сравнению с радиусом изгиба основной линии тока радиус винтового движения мал, а шаг — велик. Эффект кривизны определяется для частиц, движущихся вдоль оси трубы

вертикально вверх перпендикулярно плоскости осевой линии, а кривизну этой линии  $\kappa$  — как постоянную скалярную величину. Смысл этого предположения проиллюстрирован на рис. 3.5.3. Если  $\varphi=0$ , т. е. поверхности Бернулли содержат бинормали сопровождающего трехгранника в быстро текущей жидкости (рис. 3.5.2), то уравнение (3.5.1) приобретает вид

$$2q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \kappa q \operatorname{grad} (\ln^{1/2} \rho q^2) \sin \varphi. \quad (3.5.3)$$

Пусть  $\theta$  — угол поворота осевой невозмущенной линии тока; тогда

$$\kappa ds = d\theta$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\kappa} \text{grad} (\ln^{1/2} \rho q^2) \sin \varphi. \quad (3.5.4)$$

Здесь градиент ориентирован перпендикулярно поверхности Бернулли в направлении, противоположном вектору  $\mathbf{B}$ , который параллелен  $\mathbf{n}$  при  $\varphi=0$ .

Это уравнение описывает состояние системы, испытывающей устойчивые колебания, когда градиент  $q$  отрицателен, а период колебаний по  $\theta$  для малых  $\varphi$  равен (по аналогии с уравнением маятника)

$$2\pi (-2\kappa / \text{grad} \ln^{1/2} \rho q^2)^{1/2}. \quad (3.5.5)$$

Неустойчивое состояние, когда  $q$  возрастает ( $\varphi > 90^\circ$ ), рассматривается в разд. 3.8.

Маловероятно, чтобы в реальном случае период, задаваемый выражением (3.5.5), оказался одним и тем же для всех линий тока. Для этого нужно (полагая, что  $y$  — координата в направлении  $\mathbf{B}$ ), чтобы выражение

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \ln^{1/2} \rho q^2 \quad (3.5.6)$$

было постоянным и не зависящим от  $y$ , т. е., пренебрегая вариациями  $\kappa$ ,

$$\rho q^2 \sim e^{-\alpha y}, \quad (3.5.7)$$

где  $\alpha = \text{const}$ , а  $y$  можно принять равным 0 там, где это удобно. При любой другой форме профиля скорости движение получается более сложным.

Готорн (1951) продемонстрировал реальность существования этих вторичных колебаний, пропуская воздух через трубу кругового сечения с радиусом  $a$ . Поток, которому был сообщен градиент скорости в вертикальном направлении, обтекал горизонтальный изгиб. Прямой участок заканчивался в сечении 0 (рис. 3.5.4), а положение поверхностей Бернулли определялось путем измерения контуров постоянного полного давления  $p_0$ , где

$$p_0 = \rho g H = \frac{1}{2} \rho q^2 + p + \rho g z.$$

Иными словами, так как в этом случае можно пренебречь действием силы тяжести и не учитывать уравнение гидростатики, мы можем написать, добавив  $\rho g z$  к  $p$  (или вычтя из  $p_0$ ):

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho q^2. \quad (3.5.8)$$

Эти контуры измерялись трубками Пито у открытого конца трубы, поэтому из-за влияния поля давлений в расходящемся турбулентном течении, возникающем на выходе из трубы, возможны некоторые небольшие ошибки. Затем был присоединен

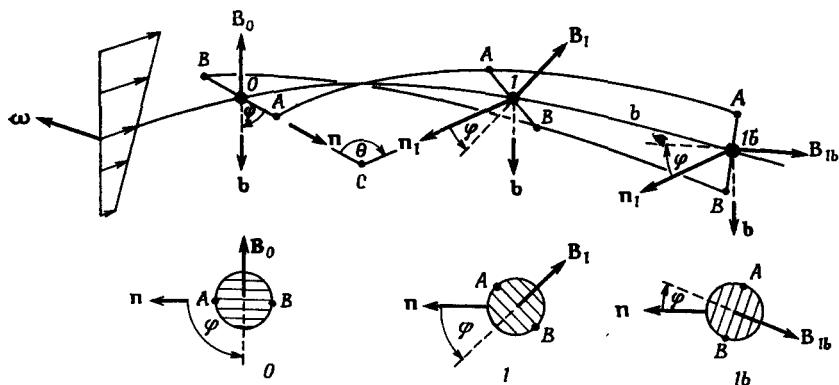


Рис. 3.5.4. Схема течения в области изгиба трубы.

Точка  $O$  — начало изгиба, точка  $I$  — конец изгиба. Материальный отрезок  $AB$  лежит на поверхности Бернулли. Показаны соответствующие поперечные сечения трубы (вид вверх по потоку).

отрезок изогнутой трубы, и положение поверхностей Бернулли измерялось таким же образом у нового открытого конца. Чтобы измерить величину вторичной завихренности в этом сечении, которое мы назовем сечением  $I$ , был присоединен еще один прямолинейный отрезок трубы длиной  $b$ , и положение поверхностей Бернулли измерялось у его открытого конца, в сечении  $Ib$ .

Полученная картина течения показана на рис. 3.5.4, где вектор Бернулли  $\mathbf{B}$ , перпендикулярный поверхностям Бернулли, характеризует их ориентацию. Линия  $AB$  является пересечением центральной поверхности Бернулли с плоскостью поперечного сечения трубы и перпендикулярна к  $\mathbf{B}$ . Угол  $\varphi$  представляет собой угол между плоскостью изгиба осевой линии, содержащей вектор  $\mathbf{n}$ , и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{B}$ . Изменение угла  $\varphi$  в направлении бинормали  $\mathbf{b}$  отражает распределение вторичного течения в рассматриваемом сечении трубы (сечение  $I$ ), наблюдаемом со стороны вытекающего

потока. Затем был удален прямолинейный отрезок, а вместо него добавлена еще одна криволинейная секция трубы для увеличения  $\theta$ , и вся процедура повторена заново. Полученные результаты представлены на рис. 3.5.5. Труба имела внутренний диаметр 152,4 мм и радиус кривизны осевой линии 762 мм.

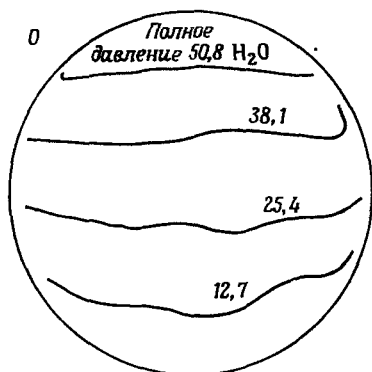
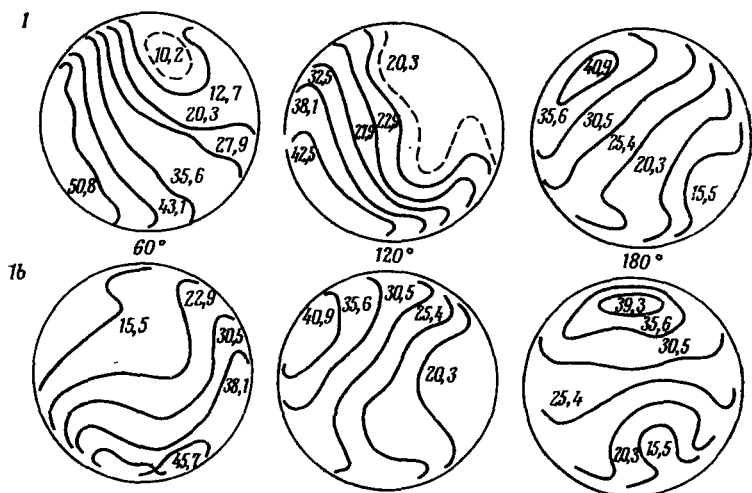


Рис. 3.5.5 Расположение контуров Бернулли в поперечных сечениях трубы, изогнутой на  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $180^\circ$  (рис 3.5.4); вид вверх по поток



Измерения по  $\theta$  проводились через  $30^\circ$ . Дополнительный прямолинейный отрезок трубы имел длину 635 мм. Верхние диаграммы рис. 3.5.5 показывают распределение полного давления для каждой величины  $\theta$  в сечении 1, а нижние — те же распределения в сечении 1б. Полное давление измерялось в сантиметрах водяного столба; видно, что максимум слабо убывает из-за трения с увеличением длины трубы, тогда как минимум возрастает.

В экспериментах Готорна профиль скорости был линейным, а на одной из границ скорость равнялась нулю. Таким образом, условие (3.5.7) не выполняется, и различные поверхности Бернулли поворачиваются на разные углы. Тем не менее резуль-

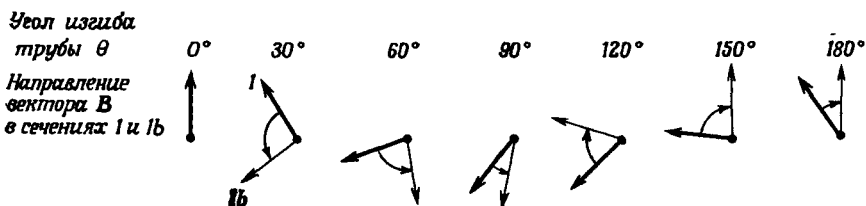


Рис. 3.5.6 Поворот вектора Бернулли в изгибе трубы кругового поперечного сечения (по экспериментальным данным Готорна).

таты, предсказанные с помощью упрощенной теории, отражают ожидаемую картину и представлены на рис. 3.5.6, где показаны углы, на которые поворачивается вектор Бернулли. Колебания, по-видимому, довольно быстро затухают, так как уже через

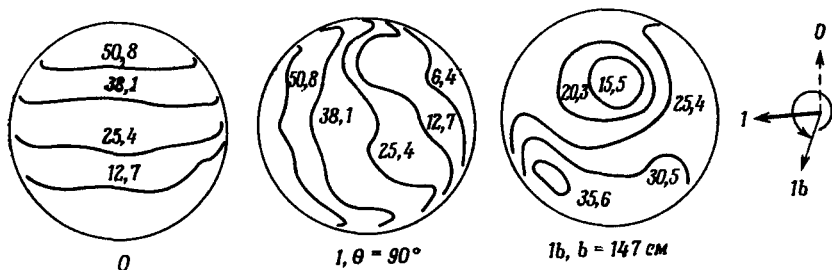


Рис 3.5.7 Расположение контуров Бернулли в поперечных сечениях трубы, изогнутой на  $90^\circ$ .

При длине прямолинейного участка трубы после изгиба  $b=147$  см отчетливо проявляется тенденция к перемещению жидкости с пониженным полным давлением в середину трубы.

один период  $\theta$  при очень слабо выраженном вторичном течении вектор  $\mathbf{B}$  не вернулся в свое первоначальное положение.

В другом эксперименте Готорн использовал  $90^\circ$ -е колено с внутренним диаметром 162 мм и радиусом кривизны осевой линии, равным 243 мм. Он фиксировал поворот течения на  $90^\circ$  и затем присоединял возрастающие по длине прямолинейные секции трубы, чтобы проследить поведение поверхностей Бернулли в условиях, когда начинают действовать трение и другие факторы. Для самой длинной прямолинейной секции в центре трубы должен был бы иметь место максимум скорости, но результаты Готорна, показанные на рис. 3.5.7, отчетливо выявляют

тенденцию перемещения к середине сечения зоны с пониженным полным давлением. Этот результат будет рассматриваться далее в разд. 3.8.

Течение в вентиляционном канале прямоугольного сечения также изучалось Готорном. Здесь тоже выявлена отчетливая тенденция зоны с высоким полным давлением перемещаться к внешней стороне изгиба с колебаниями относительно этого положения.

Дин (1927) изучал случай очень длинного изгиба типа течения в спирально изогнутой трубе, с тесно расположенными

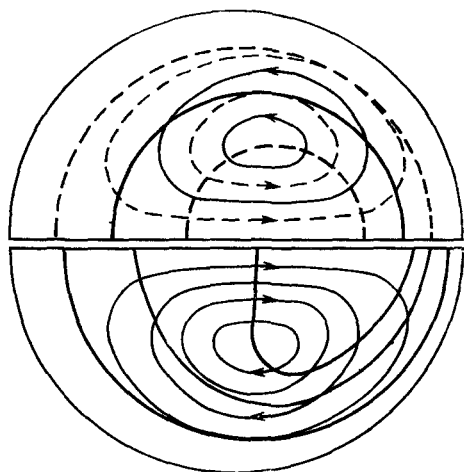


Рис 3.5.8. Распределения скоростей потока и линий тока вторичного течения в поперечном сечении длинного изгиба трубы для двух различных интенсивностей потока (Мак-Конолог, Шривастава, 1968).

витками, где установилось равновесие между силами инерции и вязкости. Вблизи оси трубы за счет градиента давления жидкость приобретает большую скорость, а у стенок — малую вследствие поверхностного трения. Жидкость, имеющая высокую скорость, движется к внешней стороне изгиба и там замедляется вследствие трения, тогда как медленно движущаяся жидкость смещается к внутренней стороне изгиба и при этом ускоряется. Получающиеся при этом распределения скоростей показаны на рис. 3.5.8. Они взяты из статьи Мак-Конолога и Шриваставы (1968), которые развили работу Дина. Изолинии показывают распределение скоростей потока и линии тока вторичного течения. В случае, представленном на верхней половине диаграммы, основной поток по сравнению с данными для нижней половины диаграммы был в 4 раза менее интенсивным, а вторичное течение — в 7 раз.

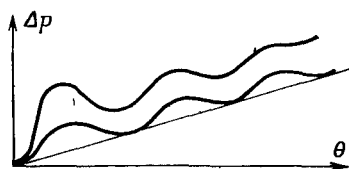
Потери давления в изгибе трубы представляют собой комбинацию потерь вследствие трения и из-за появления вторичного



течения. Если на выходе из изгиба вторичное течение отсутствует (вектор вторичной завихренности равен 0), то потери будут меньше, чем тогда, когда в той же точке вторичное течение имеет наибольшее развитие. Падение давления в  $90^\circ$ -ном колене может быть примерно удвоено за счет образования вторичной циркуляции. Действительно, известно, что эти потери, добавляющиеся к потерям, которые происходили бы вследствие трения в прямолинейной трубе той же длины, что и колено, изменяются периодически по  $\theta$ , как соответственно и по длине изгиба. Этот результат и был предсказан с помощью изложенной выше упрощенной теории, а график на рис. 3.5.9 показывает вид ожидаемой зависимости для трубы определенных

Рис 3.5.9. Потери давления в изгибе трубы.

Потери из-за трения пропорциональны длине трубы, а потери из-за вторичной циркуляции носят волновой характер.



размеров и радиуса кривизны. Если угол  $\theta$  задан, а  $\lambda$  меняется, то и в этом случае будут обнаружены периодические изменения. Прямая линия показывает падение давления  $\Delta p$  в прямой трубе эквивалентной длины, а ближняя к ней кривая — минимальную потерю давления в изгибе, имеющем угол  $\theta$ . Верхняя кривая показывает потерю давления, которую следует ожидать, если все поверхности Бернулли не вращаются совместно, так что в изгибе нет поперечных сечений, в которых вторичная скорость везде равнялась бы 0. Эта проблема впервые была исследована экспериментально Юстайсом (1925).

### 3.6. Вторичное течение позади препятствий; тепловой купол Готорна

Обычно течение за препятствием является турбулентным, и детальный теоретический анализ такого течения здесь не рассматривается. Предлагаемая весьма простая теория основана на идее использовать для описания этого процесса эффект вторичной завихренности, образующейся сразу после обтекания потоком максимального поперечного сечения (миделя) препятствия. Отрыв потока на контуре миделя определяет все последующее течение и сильно зависит от формы препятствия.

Для того чтобы выявить общие закономерности этого явления, воспользуемся известным в гидродинамике приемом

воспроизведения препятствий простой геометрической формы. Прием этот заключается в совместном рассмотрении набегающего потока и диполя, интенсивность и местоположение которого зависят от положения и размера реального препятствия. Для описания вовлечения масс жидкости в зону следа можно, например, использовать дополнительный источник. Препятствие более сложной формы моделируется либо системой диполей, либо совокупностью отдельных источников и стоков, разнесенных на конечное расстояние друг от друга таким образом, чтобы образовать замкнутую циркуляцию в набегающем потоке. След, образующийся за такой моделью препятствия,

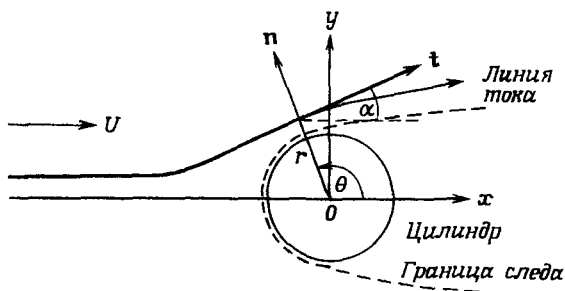


Рис. 3.6.1. Система координат для поперечного обтекания цилиндра.

можно в свою очередь смоделировать с помощью целой системы источников, так как одного, как правило, недостаточно. Перейдем к рассмотрению конкретных случаев.

Однородный поток представляется с помощью линейно возрастающей в поперечном направлении функции тока. Обтекание элементарного препятствия в двумерном потоке описывается с помощью классической функции тока

$$\phi = Uy + m\theta + \frac{\mu}{r} \sin \theta, \quad (3.6.1)$$

где  $(x, y)$  и  $(r, \theta)$  — декартовы и полярные координаты в плоскости, нормальной к препятствию, которое в данном случае является цилиндром радиуса  $(\mu/U)^{1/2}$ . Размер следа определяется интенсивностью источника  $m$ . Формула (3.6.1) дает возможность рассчитать положение любой линии тока; в принципе то же самое можно сделать с помощью любой другой формулы, описывающей более сложное течение (ср. рис. 3.6.1 и 2.6.2, б).

Рассмотрим теперь течение вокруг цилиндра, изменяющееся вдоль оси  $z$  (рис. 3.6.1). Это течение можно описать, изменяя

соответствующим образом  $m$  и  $\mu$ , которые, сохраняя общее геометрическое подобие течения на разных уровнях, становятся функциями  $z$  и определяют вертикальную стратификацию поля скоростей в таком трехмерном течении вместе с изменением плотности соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \lambda U, \quad \frac{\partial m}{\partial z} = \lambda m, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = \lambda \mu, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\beta \rho. \quad (3.6.2)$$

Ясно, что формула (3.6.1) не описывает течение на любом уровне, но тем не менее она вполне годится в качестве первого приближения.

Градиент  $L$  в (3.2.6) направлен по оси  $z$  и может быть вычислен в любой точке течения. Так как  $L$  пропорционален  $\rho q^2$ , то градиент его логарифма пропорционален  $\beta \lambda^2$ . Уравнения (3.2.5) и (3.5.1), которые не учитывают силу тяжести, принимают теперь вид

$$q \frac{\partial}{\partial s} \frac{\omega_s}{q} = \kappa q \frac{\partial}{\partial z} \ln^{1/2} \rho q^2, \quad (3.6.3)$$

откуда, проинтегрировав по  $s$  вдоль линий тока, получаем

$$\frac{\omega_s}{q} = \int_{x=-\infty} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} \ln^{1/2} \rho q^2 ds = \int_{x=-\infty} \frac{\partial}{\partial z} \ln^{1/2} \rho q^2 dx. \quad (3.6.4)$$

Этот интеграл в принципе легко оценить, но было бы трудно вычислить его методом последовательных приближений. Формула выглядит достаточно простой, но для того, чтобы вычислять с ее помощью вторичную завихренность в точке поля, необходимо последовательно определять значения переменных вдоль конкретной линии тока достаточно далеко вверх по течению. Однако для ЭВМ это относительно несложный расчет, для которого нетрудно составить программу. Вторичная завихренность при этом получается в плоскостях, ориентированных перпендикулярно потоку, например, в плоскости, проходящей через мидель препятствия.

Форма поверхностей Бернулли не получается очевидным образом из распределения  $\omega_s$ , поскольку (исключая случай, когда часть жидкости вращается как твердое тело) величина  $\omega_s$  не может считаться точно равной  $2q(\partial\phi/\partial s)$ , как в предыдущем разделе. Чтобы вычислить положение этих поверхностей, нужно на каждом шаге по оси  $x$  для каждой плоскости получить поле вторичной завихренности, вычислить  $\text{div } v$  и интегрированием найти распределение скоростей в каждой плоскости. Отсюда можно было бы вычислить и смещение поверхностей Бернулли. Однако при этом объем вычислений будет на порядок превышать вычисления, необходимые для расчета в первом

приближении только компоненты  $\omega_s$ . Тем не менее для того, чтобы вычислить второе приближение для  $\text{grad}(\ln^{1/2}\rho q^2)$  перед тем, как переходить к следующему шагу, нужно знать величины указанных смещений. Такой сложный расчет едва ли оправдан из-за наличия других ошибок, коренящихся в грубости первоначального приближения (3.6.1), используемого для получения линий тока.

Наша задача требует определения трех безразмерных чисел

$$\frac{U}{\lambda m}, \quad \frac{U}{\lambda^2 \mu}, \quad \frac{\lambda}{\beta}, \quad (3.6.5)$$

так что существует целое трехпараметрическое семейство решений даже для простого случая обтекания цилиндра течением с экспоненциальными зависимостями скорости и плотности от  $z$  в невозмущенном потоке. В любом реальном случае у цилиндра имеются торцы, а функции не будут экспоненциальными. Таким образом, если мы хотим получить весьма общие результаты, в то же время достаточно простые для понимания, не следует чрезмерно усложнять рассуждения, если только особая необходимость не вынудит нас в каком-либо конкретном случае провести подобные вычисления.

Осесимметричное препятствие может быть описано с использованием стоксовской функции тока таким образом:

$$\psi = 1/2 U r^2 \sin \theta + m \cos \theta + \frac{\mu}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (3.6.6)$$

Этот случай более сложный, и нужно решить, как определять линии тока, чтобы их можно было использовать при вычислении по формуле (3.6.4). Готорн и Мартин (1955) провели эти расчеты для течения над полусферой, предполагая, что оно должно быть примерно таким же, как потенциальное обтекание сферы, и что каждая из поверхностей Бернулли будет горизонтальна на достаточно большом удалении вверх по потоку. Они также учли силу тяжести и оставили член  $(1/q) \mathbf{R} \times \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}$  в выражении (3.2.3), но, поскольку изменением  $\rho$  можно было пренебречь по сравнению с изменением  $q^2$ , а  $g \gg f$ , они выразили  $\mathbf{L}$  через  $1/2 q^2$  вместо  $1/2 \rho q^2$ . Результаты их вычислений представлены в виде распределений величины  $\omega_s/q$  далеко вниз по потоку. Однако, как мы уже однажды указывали, более полезным было бы провести расчет для плоскости, проходящей через наибольшее поперечное сечение препятствия. Вышеназванные авторы провели эксперимент, в котором поворот линий тока становится видимым благодаря струйкам дыма, выходящим из дыр в полусфере. За полусферой был установлен обтекатель, чтобы уменьшить отрыв потока и турбулентность позади полусферы и чтобы эффект вторичной завихренности стал видимым.

Наблюдавшиеся дымовые струйки были спиралеобразными, что свидетельствовало об очень сложном вращении поверхностей Бернулли.

В серии экспериментов, описанных Готорном и Мартином, исследовалось течение над «тепловым куполом Готорна», представляющим собой полусферу, помещенную на плоскую поверхность. Поверхность купола нагревалась (или охлаждалась), чтобы создать градиент плотности за счет теплопередачи, а трение у границы создавало градиент скорости в вертикальном направлении. Когда поток течет над нагретой поверхностью,

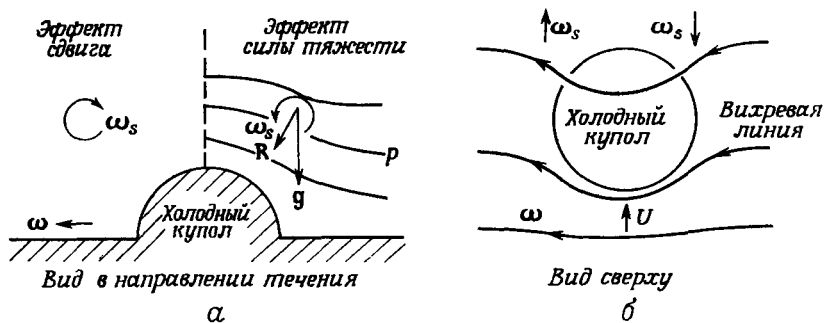


Рис. 3.6.2. Вторичная завихренность в течении над полусферическим холодным куполом при наличии устойчивой гравитационной стратификации и сдвиге скорости вследствие трения у стенки.

В правой части рисунка показано искажение первоначальных вихревых линий

градиент его плотности неустойчив, если же поверхность располагается над потоком, градиент плотности устойчив. Влияние вторичной завихренности в этих экспериментах проявлялось в спиральном вращении дымовых струек, истекающих из отверстий в миделевой плоскости купола.

При обтекании «холодного» купола, расположенного на дне аэродинамической трубы, в набегающем потоке проявлялись два эффекта (рис. 3.6.2): сдвиг скорости в набегающем потоке, порожденный самим препятствием, и гравитационная вторичная завихренность вследствие наличия низкотемпературной поверхности.

В набегающем потоке над и перед куполом вихревые линии (которые на достаточном удалении от препятствия горизонтальны и ориентированы поперек потока) тормозятся препятствием и, как следствие этого, искривляются, приобретая поперечную составляющую  $\omega_s$  (рис. 3.6.2, б).

Эта приобретенная составляющая вторичной завихренности порождает за препятствием нисходящее движение, как показано

в левой части рис. 3.6.2, *а*. Действие силы тяжести на градиент плотности производит движение, ведущее к возвращению изопикнических поверхностей в горизонтальное положение, поскольку они были приподняты над препятствием. В конечном итоге это приводит к совпадению векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{g}$ .

Составляющая гравитационной вторичной завихренности над «горячим» куполом ориентирована в противоположном направлении. Вблизи дна аэродинамической трубы, где вертикальные смещения пренебрежимо малы, эффект образования такой завихренности очень слаб, тогда как сгибание вихревых линий набегающим потоком максимально. Следовательно, для каждой стороны купола существует разделяющая поверхность,

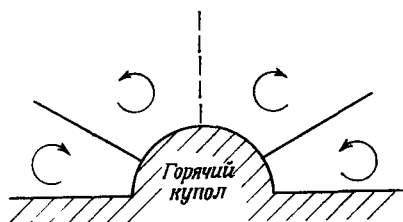


Рис. 3.6.3. Вторичная циркуляция над горячим куполом (вид в направлении течения).

ниже которой завихренность производится в основном за счет сдвига скорости в потоке, а выше — преимущественно под действием силы тяжести. Следовательно, имеет место приток воздуха в направлении оси потока вдоль этих поверхностей. Оба описанных эффекта исчезают в вертикальной плоскости симметрии течения (рис. 3.6.3).

В этой теории не учитывалась возможность распространения в жидкости гравитационных волн. В гл. 5 мы увидим, что данный метод и не подходит для описания этого явления. При гравитационно-устойчивой стратификации с холодным куполом должна появиться волновая картина, подобная той, которую создает корабль на поверхности воды (см. разд. 5.15). При гравитационно-неустойчивой стратификации наличие купола приводит к возникновению свободной конвекции. Этот вопрос обсуждается в гл. 9, 10 и 11.

Очевидный вывод из этих рассуждений состоит в том, что, когда градиенты плотности малы и могут не приниматься во внимание, вторичная завихренность, порожденная препятствием, будет в свою очередь порождать нисходящее течение за препятствием по направлению к подстилающей поверхности. Это — достаточно часто встречающаяся в природе ситуация, когда нижний слой воздуха перемешивается вследствие сдвига скорости у шероховатой подстилающей поверхности.

### 3.7. Вторичное течение перед препятствием

Деформация вихревых линий в обтекающем препятствие потоке со сдвигом скорости является причиной одного интересного явления, наблюдаемого на передней части препятствия. Его можно заметить, например, у цилиндрического столба, укрепленного вертикально на дне реки. Основная часть течения вполне однородна, и, таким образом, течение в набегающем потоке выше цилиндра очень похоже по характеру на потенциальное течение с линией точек торможения вдоль передней образующей цилиндра. На этой линии давление в направлении

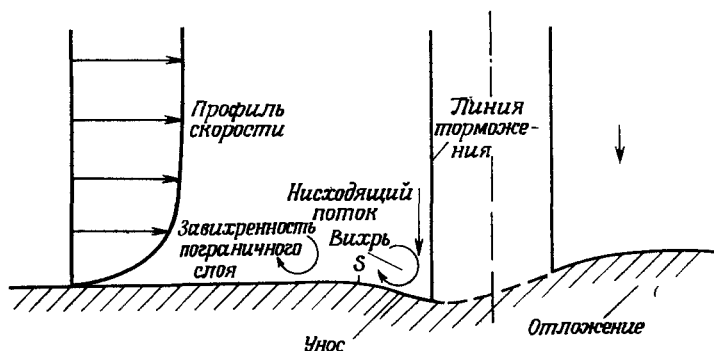


Рис. 3.7.1. Схема течений и размывания грунта при обтекании столба (вид в продольном сечении основного потока).

от дна возрастает, а в каждой горизонтальной плоскости, пересекающей эту линию, давление потока максимально в точке пересечения. Такой характер распределения давления передается пограничному слою на дне потока, поскольку вертикальные ускорения малы по сравнению с ускорением силы тяжести. Следовательно, вблизи дна перед столбом может возникнуть течение, направленное от основания столба (рис. 3.7.1). Другой довод, ведущий к такому же заключению, состоит в том, что вихревые линии набегающего потока огибают столб (рис. 3.7.2) и растягиваются, так что завихренность увеличивается; иными словами, вихревые линии вследствие огибания столба постоянно аккумулируются у его основания. Отток от основания столба происходит около его передней (обращенной к набегающему потоку) части (рис. 3.7.3) вплоть до линий отрыва течения от боковых стенок цилиндра. В следе за цилиндром ощущаются два эффекта. С одной стороны, вторичная завихренность порождает общий нисходящий поток, с другой стороны, поток вблизи дна может втягиваться в спутную струю. Происходит

это потому, что завихренность в самой спутной струе, которая может перемещаться вверх или вниз по течению, имеет на оси зону пониженного давления, вследствие чего происходит подсос жидкости в пограничный слой. Следствием этого являются эрозия дна у передней части основания мостовых устоев и нанос грунта в зоне следа.

Такая эрозия дна часто бывает причиной подмывания мостовых опор. Для предотвращения этого явления мостовая опора

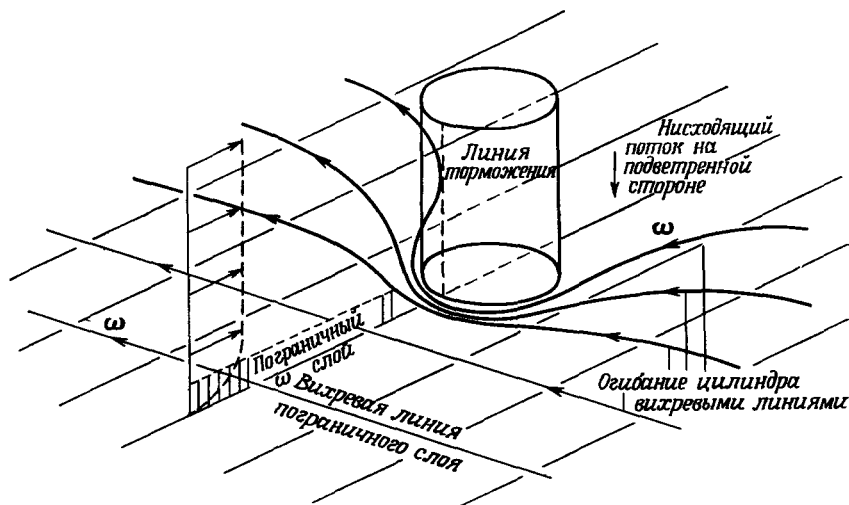


Рис. 3.7.2. Картина огибания вихревыми линиями вертикального цилиндрического препятствия в обтекающем его потоке.

Возникают вертикальные течения вдоль линии торможения и в следе с уносом донного грунта от фронтальной поверхности.

должна иметь угловую переднюю кромку, которая разрежала бы поток надвое без образования заметной застойной области. При этом вихревые линии будут скорее прерываться, чем охватывать препятствие, вследствие чего сколько-нибудь существенное вторичное течение не устанавливается (рис. 3.7.4).

Такая форма мостовых устоев целесообразна только в случае, когда известно наверняка, что направление потока более или менее неизменно. В случае широкой и мелкой или извилистой реки направление течения относительно опор моста может меняться в зависимости от уровня воды, и эрозия грунта вследствие изгиба вихревых линий на одной из сторон опоры может привести к плачевным последствиям (рис. 3.7.5).

В ветровом потоке за препятствием, таким, как высокое здание, сдвиг скорости ветра, обусловленный трением, может происходить в слое, равном или большем высоты здания, хотя



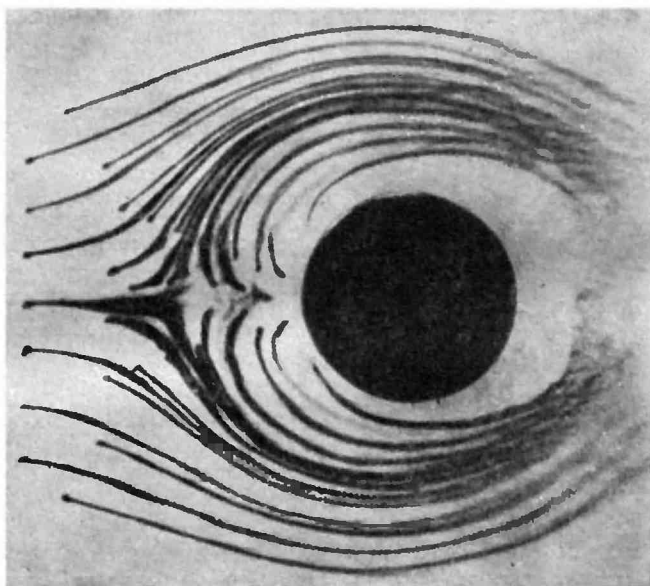
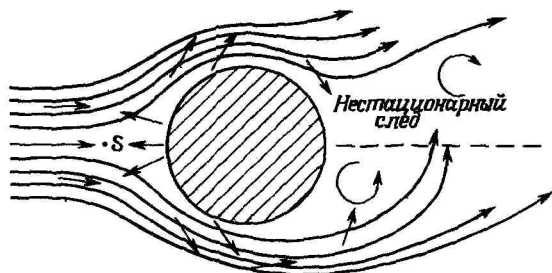
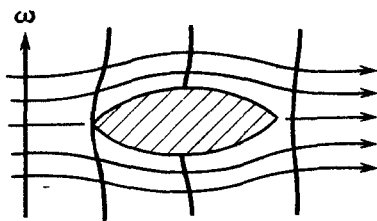


Рис. 3.7.3 Схема обтекания вертикального столба (вид сверху).

На верхнем рисунке основное течение показано линиями тока. Течение в пограничном слое вблизи дна, обтекающее цилиндрический вертикальный столб, показано короткими стрелками. На фотоснимке внизу струйки трассера показывают линии тока вблизи дна канала при обтекании потоком вертикального цилиндрического препятствия. Видно размывание трассера в нестационарном следе за препятствием. Течение вне пограничного слоя близко к потенциальному (см. рис. 2.6.2); в следе за препятствием возникает вихревая дорожка.

при этом градиент будет максимальным в сравнительно тонком слое вблизи земли. В этом случае нисходящий поток, вызываемый изгибом вихревых линий, находится выше пограничного

Рис 3.74. Перерезание вихревых линий острым углом препятствия (образующееся вторичное течение очень мало).



слоя, и это может заставить примесь, выпускаемую в верхней части обтекаемого объекта, втягиваться вниз спутной струей.

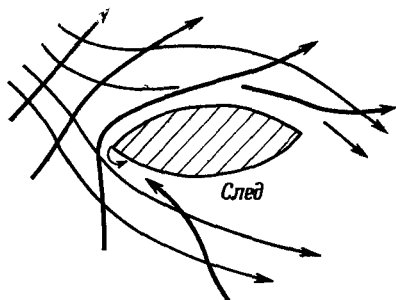


Рис. 3.75 Закручивание вихревых линий вокруг препятствия с острой передней кромкой в случае течения, направленного к этому препятствию под углом.

Образующееся вторичное течение может вызвать катастрофические разрушения у основания препятствия.

Это явление не нужно смешивать с нисходящим потоком, образующимся из-за вихрей, срывающихся с препятствия (см. гл. 10).

### 3.8. Движение жидкости в стакане

Представим себе, что в стакане чай помешивают ложкой таким образом, чтобы сообщить ему завихренность, вектор которой направлен вдоль вертикальной оси. При этом конфигурация вихревых линий в стакане оказывается очень сложной. В пограничном слое на дне стакана развивается циркуляция в вертикальных плоскостях с вихревыми линиями в виде горизонтальных окружностей. Это вызывает вращение основной массы жидкости со слабым центростремительным течением над придонным пограничным слоем (рис. 3.8.1), в свою очередь порождающим центральный вихрь с восходящим течением вдоль его вертикальной оси. В этом вихре циркуляция по любому радиусу постоянна, а тангенциальные скорости убывают почти как  $r^{-1}$ . Такое распределение скоростей потребовало бы

создания вблизи оси симметрии больших градиентов скорости, однако этому препятствует вязкость. Следовательно, вращение жидкости в стакане начинает все более приближаться по типу вращения к твердому телу с тангенциальной скоростью, пропорциональной расстоянию от оси  $r$ . Свободная поверхность при этом прогибается в середине (см. разд. 2.5).

Втекание жидкости по периферии в пограничный слой у дна компенсируется медленным восходящим течением вверх и наружу в остальной массе жидкости. При этом чайники собираются

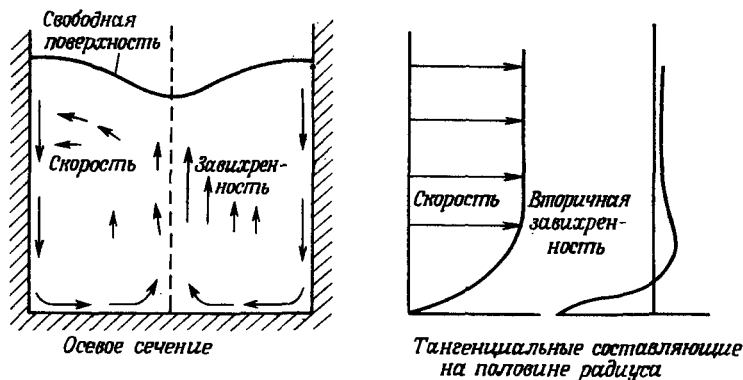


Рис. 381 Компоненты векторов скорости и завихренности в вертикальной плоскости, проходящей через ось стакана с вращающейся жидкостью (слева), и профили абсолютных величин скорости и вторичной завихренности (справа).

на дне в середине стакана, хотя они тяжелее воды и, следовательно, можно было бы ожидать, что они будут отеснены центробежными силами к боковым стенкам стакана.

На боковых стенках стакана течение центробежно неустойчиво, и жидкость, линейная скорость которой на стенке уменьшается, опускается вдоль нее. Таким образом, в придонный слой поступает жидкость, угловая скорость которой меньше, чем у основной массы жидкости.

Если стакан с первоначально покоящейся жидкостью начать вращать вокруг его вертикальной оси симметрии, то в ней также возникает вторичное течение, причем жидкость в придонном пограничном слое будет отесняться к боковым стенкам. Это явление отличается от рассмотренного выше. Течение у стенок стакана быстро турбулизуется из-за вязкости, но впоследствии неустойчивость подавляется развитием течения с устойчивой стратификацией, обусловленной усилением циркуляции, отбрасывающей жидкость вовне (разд. 3.10).

### 3.9. Течение, возникающее в двугранных углах, образованных дном и стенками каналов

Вторичная циркуляция текущей в канале жидкости, направленная от центра к стыку плоскостей дна и стенки и далее от углов вдоль стенок, наблюдалась при проведении эксперимен-

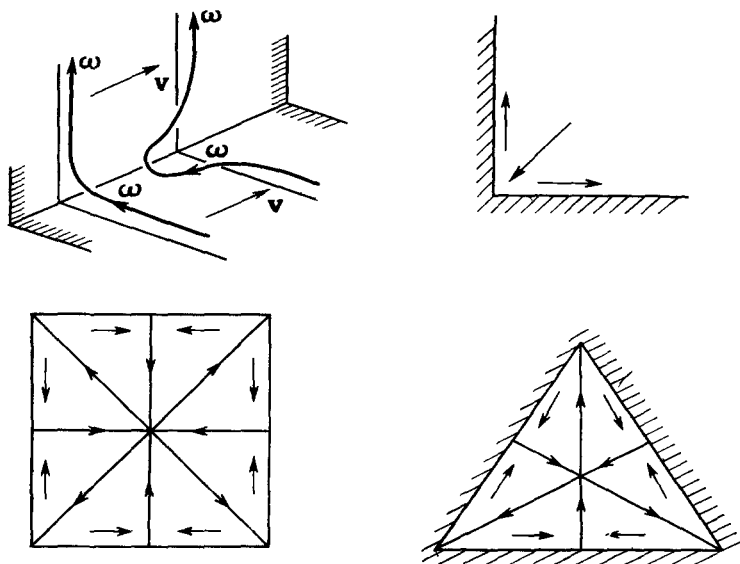


Рис. 3.9.1 Искривление вихревых линий в пограничном слое в углу канала и возникающее вследствие этого вторичное течение в каналах квадратного и треугольного сечений

тов в каналах. Это явление наиболее ярко выражено в каналах треугольного сечения с острыми углами.

В качестве одного из простых объяснений этого эффекта можно привести следующее: вихревые линии, возникшие в пограничном слое однородного потока, параллельны стенкам и перпендикулярны потоку (рис. 3.9.1). Вблизи углов вихревые линии стремятся следовать общей форме поперечного сечения потока, но из-за того, что течение в углу тормозится сильнее, чем в центральной части потока, вихревые линии искажаются и отстают. При этом возникает компонента вектора завихренности, ориентированная по течению, и вместе с ней, как было описано, возникает вторичная завихренность.

Приведенное объяснение в общем, по-видимому, верно, однако следует подчеркнуть, что наши рассуждения еще не доказывают, что обязательно образуется именно такой вид вторичного течения. Дело в том, что вихревые линии вблизи

двугранных углов могут совпадать с линиями постоянной скорости и при этом не будут деформироваться.

Последние рассуждения объясняют вид течения, возникающего при обтекании острого клина (рис. 3.9.2). Поскольку вихревые линии вблизи кромки клина сильнее смещаются основным течением, в потоке генерируется вторичное течение, направленное вблизи вершины клина вдоль обеих плоскостей клина к его кромке, а вдали от нее — в противоположном направлении. Это явление не относится к числу широкоизвестных.

Возможно также, что данное явление, когда оно наблюдается, происходит благодаря восходящему течению, направ-

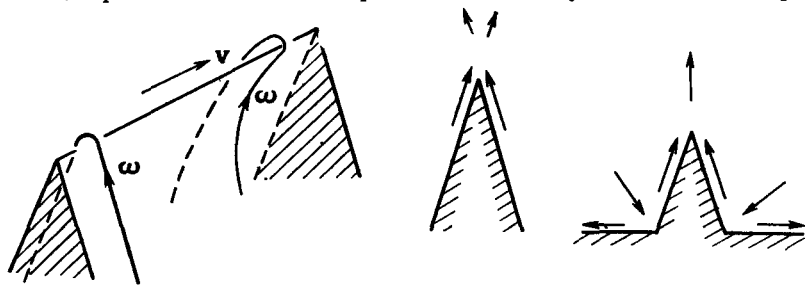


Рис. 3.9.2. Деформация вихревых линий в течении вдоль остроугольного гребня и образующееся вследствие этого вторичное течение.

ленному к кромке клина, которое само порождается в вогнутом двугранном угле у основания клина.

Этот вывод, вытекающий из качественного рассмотрения, приведенного выше, нельзя считать достаточно обоснованным; он приведен в основном потому, что его легко запомнить. Однако любая вихревая линия,двигающаяся под собственным воздействием, замедляется там, где кривизна велика в силу противоположных влияний близлежащих элементов вихревой нити, тогда как в тех местах, где кривизна мала, она движется под влиянием остальных вихревых линий, и все элементы действуют в одном направлении. Если на замкнутой вихревой линии образуется выступ, то уменьшается телесный угол, стягиваемый этой линией в окрестности точки, находящейся на выступе. Соответственно уменьшается скорость изменения телесного угла при единичном смещении, которая пропорциональна скорости течения в направлении смещения.

### 3.10. Локальная неустойчивость в криволинейном течении

В разд. 1.8 было показано, что статическая неустойчивость может рассматриваться как неустойчивость смещающейся частицы жидкости, которая при этом находится под действием

силы, направленной в сторону смещения, либо как неустойчивость, обусловленная возникновением в смещающейся массе завихренности, совпадающей по направлению с ее ротационным смещением. Такой подход к описанию неустойчивости носит локальный характер и применим, когда возмущение мало по сравнению с масштабом течения, в особенности вдали от твердых границ.

Локальный подход к рассмотрению неустойчивости применим, когда нестабильны лишь возмущения особого вида. Таков, например, случай, когда волновые возмущения нестабильны только в узком диапазоне длин волн: волны малой длины гасятся вязкостью, а большой — подавляются твердыми границами. В таких случаях физические масштабы явления и физические свойства, проявление которых зависит от масштаба процесса (обычно вязкость, иногда теплопроводность), играют важную роль в определении характеристик неустойчивости, для выяснения которых требуется всесторонний анализ явления в целом. Рассмотрение частных случаев с общих позиций дано во многих хороших учебниках. Локальный подход, предлагаемый здесь, пожалуй, описан лишь в книге автора (Скорер, 1967), где, наряду с более сложным изложением, к сожалению, содержится несколько досадных опечаток, в связи с чем здесь вносится необходимая ясность.

Описываемый локальный подход игнорирует влияние вязкости, поскольку условия для развития неустойчивости могут создаться внезапно при вхождении рассматриваемой порции жидкости в криволинейный участок течения. При этом тормозящее действие вязкости просто не успеет проявиться, несмотря на то, что сама завихренность порождена вязкостью. Рассмотрение линейного смещения частицы не дает информации о виде возникающего неустойчивого движения, за исключением случая возникновения неустойчивости в покоящейся жидкости. Тейлор исследовал таким образом один случай, когда над покоящейся массой воды располагался слой нефти, рассматривая изменения формы поверхности раздела двух сред при внезапном ускорении всей системы, направленном вниз и превышающем  $g$ . Он отметил, что любое малое возмущение поверхности раздела при этом нарастает, что является признаком локальной неустойчивости, так как оно не связано с масштабом и видом результирующего возмущения.

Ввиду того что данная порция жидкости может попасть в область, где кривизна существует лишь кратковременно, неустойчивость может быстро появляться и исчезать, и предлагаемый подход оказывается более эффективным (так как прослеживается изменение состояния данной частицы), чем рассмотрение в целом, когда возмущения описываются относи-

тельно некоторой фиксированной системы координат, обычно связанной с твердыми стенками, ограничивающими течение жидкости.

Локальный подход основывается на предположении о стационарности течения. Таким образом, о неустойчивости свидетельствует возрастание возмущений вниз по течению. Следовательно, локальная неустойчивость должна проявляться в возникновении вторичной завихренности, вектор которой ориентирован вдоль линий тока, так как в противном случае линии тока основного течения не могли бы сохранять свое общее направление в пространстве. В гл. 6 обсуждается вопрос о развитии неустойчивости волнового типа, к которому данный подход применять неудобно, так как процессы такого рода не укладываются в рамки стационарного течения.

Очевидно, что если в уравнении (3.5.4) поменять знак кривизны  $\kappa$ , то колебания, которые описываются данным уравнением, станут неустойчивыми, что физически эквивалентно изменению направления силы тяжести в покоящейся жидкости или появлению массовой инерционной силы, направленной против силы тяжести и превышающей ее, как в эксперименте Тейлора. В нашем рассмотрении сила тяжести не учитывается, однако при желании исследовать и гравитационный эффект можно это легко сделать, проведя все последующие выкладки и оставляя члены с  $g$ . Так как сила тяжести постоянна, она играет важную роль при рассмотрении течения по длинной прямой траектории; она влияет также на течение в изгибе, если имеется большой градиент плотности, но в нашем примере сила тяжести не имеет особого значения. Поэтому для стационарного течения используем полученное из (3.2.2) уравнение

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{\omega t}{q} = 2\kappa \omega n + \kappa q \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}, \quad (3.10.1)$$

с помощью которого можно исследовать влияние кривизны.

Теперь исследуемое нами течение можно рассматривать локально как течение в спиральном вихре (геликоиде), когда каждый коаксиальный цилиндр имеет собственную скорость вращения, линейно возрастающую вдоль оси. В этом случае линии тока и вихревые линии имеют вид спиралей, навитых на цилиндры, а траектории частиц имеют кривизну и кручение, которые могут быть определены и которые постоянны у каждой частицы в невозмущенном потоке. Поле течения в окрестности точки задается с помощью значений кривизны и кручения для линии тока, а также скорости и завихренности (градиентов скорости) в данной точке на траектории. Радиус цилиндра, на который навита линия тока, может быть использован в качестве коэффициента кручения. Мы не будем касаться эффектов,

связанных с действием тангенциального ускорения, поскольку они рассмотрены в разд. 1.4 и не являются непосредственной причиной возникновения вторичной завихренности.

Предположим теперь, что частица жидкости получила малое вращательное смещение относительно линии тока; при этом малому возмущению подвергались плотность и положение вихревых линий, содержащихся в ней. Предполагается, что на каждом из коаксиальных цилиндров плотность первоначально

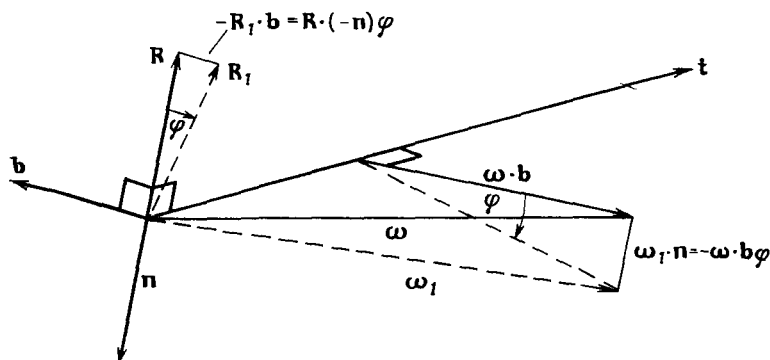


Рис. 3.10.1. Поворот жидкой частицы относительно касательной к его траектории на малый угол  $\varphi$ .

Новые значения  $\omega$  и  $R$  обозначены  $\omega_1$  и  $R_1$ .

постоянна, или, иными словами, ускорение в отсутствие возмущения конечно.

Вектор  $R$  первоначально направлен вдоль главной нормали; будем считать его положительным, если он направлен от оси вовне, поскольку это состояние более устойчиво. Вектор завихренности  $\omega$ , касательная  $t$  и бинормаль  $b$  лежат в плоскости, перпендикулярной  $R$  и  $n$ . Положения  $R$  и  $\omega$  после смещения представлены векторами  $R_1$  и  $\omega_1$ .

Из рис. 3.10.1 очевидно, что для малого поворота на угол  $\varphi$  относительно направления  $t$  можно записать

$$\omega_1 \cdot n = -\omega \cdot b\varphi, \quad (3.10.2)$$

$$R_1 \cdot b = R \cdot n\varphi, \quad (3.10.3)$$

так что с учетом

$$v \cdot \text{grad} \frac{\omega \cdot t}{q} = q \frac{\partial}{\partial s} 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (3.10.4)$$



из уравнения (3.10.1) получим

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \left( -\frac{x}{q} \omega \cdot b + \frac{x}{2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi = \frac{x}{q} \mu^2 \varphi. \quad (3.10.5)$$

Уравнение (3.10.5) описывает неустойчивую ситуацию, если коэффициент при  $\varphi$  положителен, т. е. если

$$2\mu^2 = -2\omega \cdot b + q\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} > 0, \quad (3.10.6)$$

поскольку  $x$  всегда считается положительным, так как мы условились, что нормаль  $\mathbf{n}$  направлена к центру кривизны.

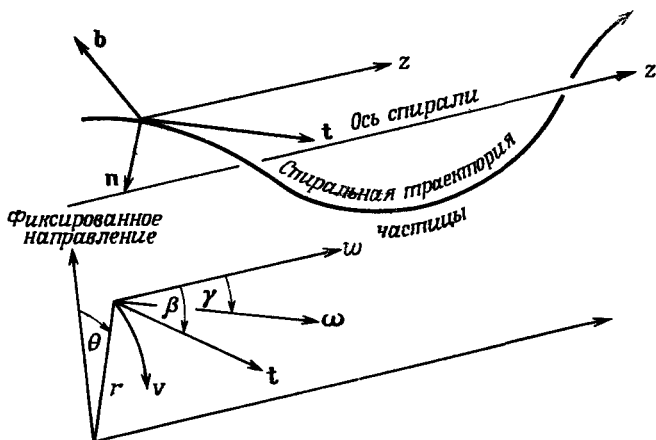


Рис. 3.10.2. Координаты и переменные, используемые при анализе спирального течения.

Векторы  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\omega$  лежат в плоскости, касательной к цилиндру движения; ось  $z$  направлена вдоль образующей  $v$  — тангенциальная, а  $w$  — осевая компоненты скорости

Смысл члена  $q\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$  прост, так как при нулевом векторе завихренности из условия (3.10.6) следует, что при возрастании плотности извне к центру кривизны центробежная сила начинает вносить неустойчивость. В случае прямолинейного смещения частицы мы предполагаем, что поле давления определяется полем невозмущенного потока и малое смещение рассматриваемой частицы не вызывает в нем изменений. Таким образом, любые ускорения возникают только под действием центробежных сил, которые уже не будут находиться в равновесии с полем давления. Чтобы рассматривать этот вопрос далее, предварительно напомним элементарные свойства спирали.

Пусть частица находится в точке с цилиндрическими координатами  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  (рис. 3.10.2). Она имеет составляющие скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в этих направлениях, а ось  $z$  направлена вдоль оси

спирали. При спиральном движении имеем

$$u = 0, \quad v = v(r), \quad w = \omega(r), \quad \beta = \beta(r). \quad (3.10.7)$$

Здесь  $\beta$  — угол между касательной к кривой и направлением оси, вдоль которой компонента скорости равна  $\omega$ . Компонента скорости  $v$  называется тангенциальной, или окружной,  $\gamma$  — угол между вектором завихренности и направлением оси. Радиус-вектор  $\mathbf{x}$  (вектор положения точки) задается следующим образом:

$$\mathbf{x} = (r, \theta, z) \quad (3.10.8)$$

в цилиндрических координатах и

$$\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (3.10.9)$$

в неподвижных декартовых координатах. Мы должны проводить все дифференцирования по  $s$  в декартовых координатах, поскольку направление  $r$  меняется, так что

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \left( -r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} \right). \quad (3.10.10)$$

Однако

$$\mathbf{v} = q\mathbf{t} = q(0, \sin \beta, \cos \beta) \quad (3.10.11)$$

в цилиндрических координатах равно

$$\mathbf{v} = q(-\sin \beta \sin \theta, \sin \beta \cos \theta, \cos \beta) \quad (3.10.12)$$

в декартовых координатах, так что, используя (3.10.10), получаем

$$r \frac{\partial \theta}{\partial s} = \sin \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \beta. \quad (3.10.13)$$

Дифференцирование (3.10.12) по  $s$  дает

$$\mathbf{x}\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \left( -\sin \beta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad -\sin \beta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad 0 \right) = \quad (3.10.14)$$

$$= \frac{1}{r} \sin^2 \beta (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) \quad (3.10.15)$$

в декартовых координатах и

$$\mathbf{x}\mathbf{n} = \frac{1}{r} \sin^2 \beta (-1, 0, 0) \quad (3.10.16)$$

в цилиндрических координатах.

Так как  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то

$$\mathbf{x} = \frac{1}{r} \sin^2 \beta = \frac{v^2}{q^2 r}. \quad (3.10.17)$$

Подобным же образом вычислим кручение кривой, дифференцируя вектор  $\mathbf{b}$ , равный

$$\mathbf{b} = (0, -\cos \beta, \sin \beta) \quad (3.10.18)$$

в цилиндрических координатах и

$$\mathbf{b} = (\cos \beta \sin \theta, -\cos \beta \cos \theta, \sin \beta) \quad (3.10.19)$$

в декартовых координатах. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} &= \left( \cos \beta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}, \cos \beta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}, 0 \right) = \\ &= \frac{1}{r} \sin \beta \cos \beta (\cos \theta, \sin \theta, 0) = -\tau \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.10.20)$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{1}{r} \sin \beta \cos \beta = \kappa \operatorname{ctg} \beta = \frac{v\omega}{q^2 r}. \quad (3.10.21)$$

В данном случае имеет место осевая симметрия, когда все величины являются функциями только  $r$ , так что  $\operatorname{rot}$  для любого вектора  $\mathbf{a}$  равен

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left[ 0, -\frac{\partial a_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) \right] \quad (3.10.22)$$

в цилиндрических координатах и, таким образом,

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \left[ 0, -\frac{\partial \omega}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) \right] \quad (3.10.23)$$

в этих координатах. Из (3.10.18), обозначив  $v = q \sin \beta$ ,  $\omega = q \cos \beta$ , получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \mathbf{b} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} \cos \beta + \frac{1}{r} \sin \beta \frac{\partial}{\partial r} (vr) = \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial r} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \beta + \frac{v}{r} \sin \beta = \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{v^2}{qr}. \end{aligned} \quad (3.10.24)$$

Для несжимаемой жидкости плотности  $\rho$ , которая первоначально является только функцией  $r$ , коэффициент  $\mu^2$  в (3.10.5), знак которого определяет устойчивость, равен

$$\mu^2 = -\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{v^2}{qr} - \frac{1}{2} \frac{q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}. \quad (3.10.25)$$

Но для равновесного течения уравнение движения имеет вид

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.10.26)$$

откуда

$$\mu^2 = -\frac{1}{\rho q} \frac{\partial}{\partial r} (\rho + \frac{1}{2} \rho q^2) = -\frac{1}{\rho q} \frac{\partial \rho_0}{\partial r}. \quad (3.10.27)$$

Здесь  $p_0$  — полное давление, измеряемое трубкой Пито, связанной с неподвижной системой координат и ориентированной против течения, вдоль  $-t$ .

Отсюда следует, что течение, в котором полное гидродинамическое давление убывает при удалении от оси, неустойчиво по отношению к малым вращательным смещениям частиц жидкости относительно линий тока. Следовательно, стабильным будет такое распределение давлений, в котором минимальное полное гидродинамическое давление окажется вблизи оси. Мы уже отмечали в разд. 3.5, что Готорн наблюдал тенденцию жидкости приобретать подобное распределение при движении в прямой трубе (рис. 3.5.7).

Следствия этого результата оказываются более далеко идущими, чем это кажется на первый взгляд, поскольку в некоторых случаях знак  $\mu^2$  зависит от выбора системы координат, хотя это, очевидно, не имеет ничего общего с физикой явления. Таким образом,

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho q^2 = p + \frac{1}{2} \rho (v^2 + w^2) \quad (3.10.28)$$

и

$$\frac{dp_0}{dr} = \frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dr} (v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \rho \left( 2v \frac{dv}{dr} + 2w \frac{dw}{dr} \right). \quad (3.10.29)$$

В уравнения движения по спирали входит абсолютная величина  $v$  круговой скорости, которая должна быть измерена относительно невращающейся системы координат; угловые скорости также задаются абсолютными величинами. Но по отношению к скорости  $w$  (к которой добавляется константа  $w_0$  — постоянная скорость перемещения подвижной системы координат в направлении отрицательных  $z$ ) движение не симметрично и зависит от знака  $w$ . В случае  $d\rho/dr=0$  член  $\rho w dw/dr$  может быть заменен на  $\rho(w + w_0)dw/dr$ , величина и знак которого могут быть выбраны произвольно при выполнении условия  $dw/dr \neq 0$ . В этом случае знак производной  $dp_0/dr$  зависит от выбора нуля для отсчета  $w$ ; то же относится и к знаку  $\mu^2$ . Это означает, что при  $dw/dz \neq 0$  всегда существуют некоторые возмущения, порождающие неустойчивость.

Добавление  $w_0$  к  $w$  проявляется в изменении шага по спирали  $\beta$ . Естественно, движение само по себе не зависит от того, с какой скоростью движется координатная система; изменяя направление касательной  $t$ , которое определяется отношением  $v/w$ , мы просто переходим к изучению поведения другого возмущения в течении.

Ясно, что движение может переходить из устойчивого в неустойчивое при изменении знака и величины  $d\rho/dr$ ; неустойчи-

вость может стать более вероятной при убывании плотности в направлении изнутри вовне, так как при этом член  $1/2 (\partial \rho / \partial r) (v^2 + \omega^2)$  в (3.10.29) отрицателен. Если теперь пренебречь влиянием градиента плотности, то можно вернуться к уравнению (3.10.5) в форме

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = -\frac{x}{q} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b} \varphi. \quad (3.10.30)$$

Знак произведения  $\boldsymbol{\omega} \mathbf{b}$  определяется взаимным расположением векторов  $\mathbf{t}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  в плоскости, касательной к коаксиальному ци-

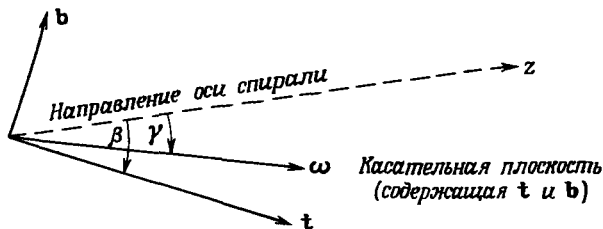


Рис. 3.10.3. Положение векторов  $\mathbf{t}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  в касательной плоскости по отношению к оси локальной спирали.

Движение неустойчиво, если вектор  $\mathbf{t}$ , относительно которого вращается возмущаемая жидкость, оказывается между осью и направлением вектора завихренности.

линдру. Если  $\boldsymbol{\omega}$  лежит между  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{b}$ , то скалярное произведение  $\boldsymbol{\omega} \mathbf{b}$  положительно, а движение устойчиво. Если  $\beta < \gamma$ , то движение неустойчиво (рис. 3.10.3).

Таким образом, движение неустойчиво в случае вращений относительно оси, находящейся в плоскости, касательной к цилиндру и нормальной к  $\mathbf{p}$ , и располагающейся между вектором завихренности и направлением оси спирали, соответствующей данному локальному смещению (рис. 3.10.4). В принципе ось спирали может быть найдена, если задать величины  $\kappa$  и  $\tau$ , по которым можно определить  $\beta$  при помощи (3.10.21); искомое направление находится под углом  $\beta$  к вектору  $\mathbf{t}$  в плоскости, нормальной к  $\mathbf{p}$ . Величины  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{p}$  могут быть определены для любой точки, в окрестности которой известна траектория, с использованием только первых производных поля скоростей.

Мы вели рассмотрение в предположении, что спираль имеет правостороннюю ориентацию, а  $\beta$  положительно, как показано на рис. 3.10.4. Схемы для случаев, когда углы  $\beta$  или  $\gamma$  отрицательны, являются просто зеркальным отражением приведенных выше рисунков, которые указывают направления, относительно которых вращения будут устойчивыми или неустойчивыми для различных положений  $\boldsymbol{\omega}$  относительно оси спирали. Когда вектор  $\mathbf{t}$  направлен назад вдоль оси, это просто означает, что составляющая скорости  $\omega$  отрицательна.

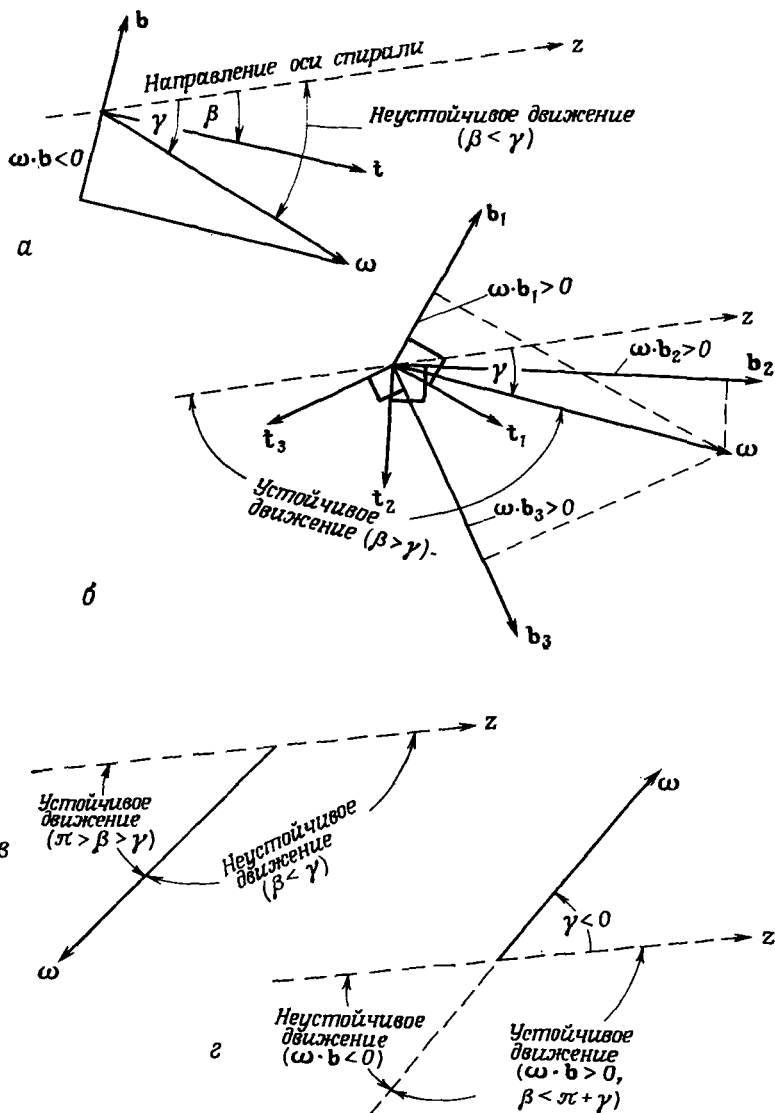


Рис. 3.10.4. Различные направления, относительно которых вращательные движения неустойчивы для данного течения (заданы ось спирали и вектор завихренности).

В случае *a* течение неустойчиво, в случае *б* течение устойчиво для направлений  $t_1, t_2$  и  $t_3$ . Данные случаев *в* и *г* соответствуют левосторонней завихренности, направленной в противоположную сторону.

Чтобы интерпретировать эти результаты для произвольного возмущения, рассмотрим движение по спирали на коаксиальных цилиндрах, которое возмущается выступом (вздутием) на одном из них. На рис. 3.10.5 показаны линии «параллелей» на таком выступе. Данный выступ представляет собой купол на одной из поверхностей Бернулли, возникающий вследствие вращения жидкости относительно касательной к «параллелям», проведенным на куполе, и это направление вращения будет соответствовать неустойчивой ситуации, когда оно находится

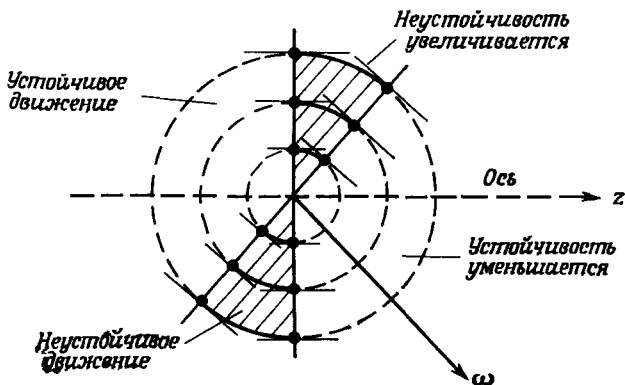


Рис. 3.10.5. Эволюция вздутия на поверхности Бернулли. Часть вздутия в нестабильной области будет становиться круче.

между направлением оси и направлением вектора завихренности. Часть купола, помеченная как зона неустойчивости, становится круче, тогда как зона устойчивых возмущений как бы размывается в виде устойчивых волн. Следует ожидать, что купол будет удлиняться в направлении максимальной неустойчивости.

Для случая отсутствия градиента плотности имеем

$$\frac{x}{q} \mu^2 = -\frac{x}{q} \omega \mathbf{b} = \frac{\sin^3 \beta}{vr} \omega \sin(\gamma - \beta), \quad (3.10.31)$$

так что (поскольку  $dz = ds \cos \beta$ , а  $q dt = ds$ ) для постоянного  $q$  уравнение (3.10.5) может быть представлено в следующих трех видах:

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \frac{\omega}{vr} \sin^3 \beta \cdot \sin(\gamma - \beta) \varphi = \mu_s^2 \varphi, \quad (3.10.32)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{v \omega}{r} \sin \beta \cdot \sin(\gamma - \beta) \varphi = \mu_t^2 \varphi, \quad (3.10.33)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{\omega}{vr} \frac{\sin^3 \beta}{\cos^2 \beta} \sin(\gamma - \beta) \varphi = \mu_z^2 \varphi. \quad (3.10.34)$$

Эти уравнения описывают рост возмущения в жидкой частице по мере перемещения ее по траектории  $s$  (или вдоль оси  $z$ ) за время  $t$ . Если мы идентифицировали неустойчивое возмущение, сообщив подвижной координатной системе скорость  $\omega_0$ , то вполне возможно, что в любом реальном случае рост неустойчивости при увеличении  $z$  или  $s$  может оказаться большим. Однако так как скорость перемещения подвижной координатной системы велика, рассматриваемая частица успеет удалиться на большое расстояние от исследуемой области еще до того, как неустойчивость успеет развиться заметным образом. Такая ситуация наиболее вероятна в случае, когда угол  $\gamma$  между вектором завихренности и осью мал, и должна быть приложена большая величина  $\omega_0$  для того, чтобы вектор  $\mathbf{t}$  оказался между указанными векторами.

Следовательно, в реальных случаях весьма важно связать координатную систему с измерительным устройством, используемым для нахождения области, в которой порождается неустойчивость. Возмущения, вызванные наличием измеряющего прибора, в свою очередь вызовут вторичные вращения вокруг направления касательной к потоку относительно прибора. Таким образом, при спиральном течении внутри прямой трубы кругового сечения неровности внутренних стенок могут вызвать неустойчивость, если угол между касательной к потоку и осью трубы оказывается меньшим, чем угол между осью и вектором завихренности.

Вихревые линии в рассмотренных ситуациях представляют собой спирали, а угол  $\gamma$  возрастает для данного распределения круговой скорости  $v(r)$  вследствие возрастания величины компоненты вихря —  $\partial\omega/\partial r$  [уравнение (3.10.23)]. В случае спирального течения в цилиндрической трубе в отсутствие начального пограничного слоя на стенке течение скоро становится неустойчивым, поскольку торможение жидкости на стенке трубы постепенно приводит к снижению полного давления, а это вызывает смещение жидкости по направлению к центру трубы, как это описано в разд. 3.5 и при обсуждении формулы (3.10.27). Вектор завихренности может быть направлен вдоль оси, если имеет место вращение по типу твердого тела (как это должно быть в ядре потока), или вообще отсутствовать, если  $v \sim r^{-1}$ , а  $\omega$  не зависит от  $r$  (рис. 3.10.6). Далее вдоль по трубе  $\omega$  убывает в направлении стенок, что сообщает вектору  $\omega$  правую вращательную составляющую, а  $v$ , убывая в направлении стенок, сообщает вектору  $\omega$  обратную по отношению к его направлению составляющую. Таким образом, шаг спирали  $\gamma$  превосходит  $90^\circ$ , а это значит, что, каково бы ни было направление вектора  $\mathbf{t}$ , оно будет заключено между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  при направленном вперед правом винтовом движении. Следовательно,



когда первоначальное спиральное течение является безвихревым (за исключением небольшой зоны вблизи оси, вращающейся как твердое тело), жидкость от стенок перемещается внутрь и очень быстро смешивается с жидкостью вблизи оси. При этом, как показывают наблюдения, разрушение течения такого типа носит весьма быстрый характер. Быстрое разрушение упорядоченного течения не произойдет, если вектор завихренности имеет большую абсолютную величину и первоначально направлен вперед вдоль оси, так как при этом неустойчивость

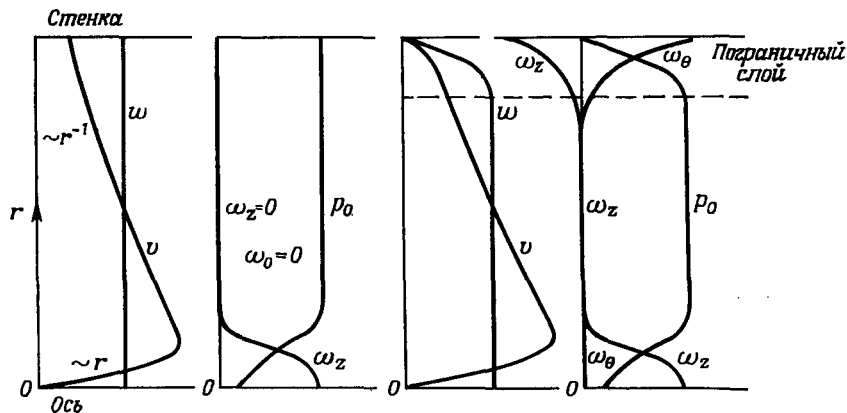


Рис. 3.10.6. Профили составляющих скорости, полного гидродинамического давления и завихренности на входе в трубу и ниже по потоку (для случая вращательного безвихревого течения на входе в трубу).

будет ограничена пограничным слоем. В случае, когда основная масса жидкости находится первоначально в безвихревом состоянии (исключая малую вращающуюся цилиндрическую зону вдоль оси потока), появление разрыва в спирали оттягивается до тех пор, пока пограничный слой не станет достаточно развитым для того, чтобы неустойчивость возобладала как над стабилизирующим влиянием вязкости, которая гасит малые возмущения, так и над влиянием со стороны границ, которые гасят большие возмущения. К тому времени, когда неустойчивость разовьется, довольно большая масса жидкости будет готова вторгнуться в ядро потока, как только возмущение начнет расти, и разрушение упорядоченного течения произойдет как взрывной процесс во всей массе потока в целом, а не только в пограничном слое.

Чтобы определить условие, при котором неустойчивость максимальна, отыщем максимум  $\mu_t$ , дифференцируя (3.10.33) по  $\beta$  и приравнявая  $\partial\mu_t/\partial\beta=0$ . Это дает  $\beta=1/2\gamma$ , а из самого уравнения очевидно, что  $\mu_t=0$  при  $\beta=0$ ,  $\beta$ . Таким образом,

наибольшую неустойчивость вызывают те возмущения, которые представляют собой вращение жидкости относительно биссектрис углов между осью течения и вектором завихренности. Это означает, что течение наиболее нестабильно, если угол  $\gamma$  выбран равным  $2\beta$ , где  $\beta$  — угол между осью трубы и направлением касательной к потоку в системе координат, не зависящей от возмущающего воздействия.

Спиральное течение с правосторонним вращением обладает наибольшей устойчивостью, если вихревые линии будут нести левостороннюю завихренность, т. е.  $\gamma < 0$ , как это можно видеть из диаграммы неустойчивости (рис. 3.10.4). Это происходит, если абсолютная величина  $\omega$  возрастает с радиусом, так как в этом случае внешние слои жидкости будут иметь большее полное гидродинамическое давление. Однако это течение будет разрушено, если появится какое-либо возмущающее тело, например пуля, рыба или другой движущийся быстрее потока предмет, так как относительно этого тела  $\omega$  будет увеличиваться по абсолютной величине по направлению к оси течения.

Интересно применение уравнения (3.10.34) к случаю, когда спиральное течение первоначально имеет равномерную скорость  $\omega$  и ориентированный вдоль оси вектор завихренности с большой абсолютной величиной. Такое течение не обладает неустойчивостью взрывного типа, как в только что рассмотренном примере со слабой завихренностью, распределенной по всей массе жидкости, и здесь можно представить себе развитие процесса следующим образом: угол  $\gamma$  будет возрастать от нуля до небольшого положительного значения, когда разовьется пограничный слой. Как было показано, наиболее быстро возмущение распространяется при  $\beta = 1/2\gamma$ . Наибольшая амплитуда достигается на выходе установки, в которой происходит течение; там же реализуется максимум  $\mu_z$ . Экстремальные значения  $\mu_z$  можно найти из условия

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mu_z^2 = \frac{\omega}{2\nu r} \frac{\sin^2 \beta}{\cos^3 \beta} [5 \sin(\beta - \gamma) + \sin(3\beta - \gamma)]. \quad (3.10.35)$$

Минимум достигается при  $\beta = 0$ , а максимум — когда углы малы и

$$5(\gamma - \beta) \approx 3\beta - \gamma,$$

откуда

$$\beta = 3/4\gamma. \quad (3.10.36)$$

При этом условии можно ожидать, что для данного значения  $z$  будет иметь место наибольшее возмущение. Подтвердить этот факт экспериментально при скорости  $\omega$ , изменяющейся в пре-

делах пограничного слоя, довольно непростая задача, однако очевидно, что в любом случае угол  $\gamma$  должен значительно превосходить угол  $\beta$ .

### 3.11. Неустойчивость при плоском вращательном течении

Два частных случая вращательного течения представляют особый интерес. Оба они характеризуются первоначальным отсутствием движения вдоль оси  $z$ , а все течение происходит по

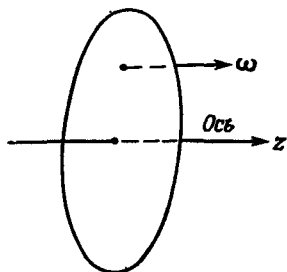


Рис. 3.11.1. Плоское течение по окружностям.

При циркуляции, возрастающей в направлении от оси, такое течение устойчиво по отношению к торoidalным возмущениям.

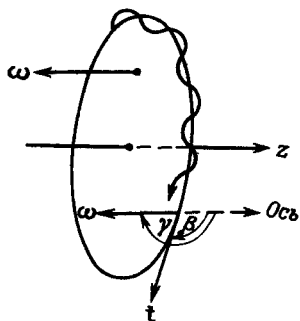


Рис. 3.11.2. Торoidalные возмущения при плоском течении по окружностям.

Торoidalные возмущения неустойчивы, если циркуляция по направлению от оси убывает.

окружностям вокруг общей оси. В первом случае (рис. 3.11.1) вектор завихренности ориентирован так же, как и вектор угловой скорости вращения; в этом случае циркуляция возрастает вместе с радиусом, а  $v$  убывает медленнее, чем  $r^{-1}$ , или возрастает вместе с  $r$ , и  $\omega_z = (1/r) (\partial/\partial r) (vr) > 0$ . В этом случае  $\gamma = 0$  и отсутствуют неустойчивые возмущения (рис. 3.11.1). Если ввести осевую составляющую  $\omega$ , меняющуюся вместе с  $r$ , то немедленно возникнут некоторые нестабильные возмущения. Если  $\omega_z = 0$ , то  $v \sim r^{-1}$ , а при наличии осевой компоненты скорости, зависящей от  $r$ ,  $\omega$  имеет единственную ненулевую компоненту,  $\omega_\theta$ , и возмущения, порождающие наибольшую неустойчивость, по-видимому, представляют собой движения по спирали при  $\beta = 45^\circ$ ; однако это не так при  $v = 0$ , поскольку  $\kappa = 0$  и скорость роста тоже равна 0.

Во втором случае вектор  $\omega$  ориентирован в отрицательном направлении оси  $z$  (полагается, что  $v$  имеет правовинтовое вращение). В этом случае  $\gamma = 180^\circ$ , и при  $\omega = 0$  (в наиболее

естественной системе координат)  $\beta = 90^\circ$ , следовательно, наибольшей неустойчивостью будут обладать тороидальные возмущения, т. е. вращения относительно круговых линий тока (рис. 3.11.2). В этом случае циркуляция и полное гидродинамическое давление убывает в направлении вонне, а  $v$  убывает быстрее, чем  $r^{-1}$ .

Эта неустойчивость хорошо известна и объяснена теорией прямолинейно перемещаемого элементарного объема. В соответствии с ее аргументацией в неустойчивой ситуации момент количества движения относительно оси убывает по направлению вонне, так что если жидкой частице сообщено радиальное смещение посредством действующей вонне по радиусу силы, то, поскольку для нее момент количества движения сохраняется, частица приобретает большую угловую скорость, чем окружающая среда. В этом случае поле давлений, которое порождает радиальную силу, приложенную к частице и точно уравновешивающую центробежную, оказывается слишком слабым, чтобы вывести смещенный объем на круговую траекторию, такую же, как у его нового окружения. Следовательно, жидкая частица будет ускоряться в направлении вонне, и возмущение будет порождать неустойчивость. Смещение извне вовнутрь введет частицу в поле давления, которое порождает действующую в направлении оси силу, превосходящую центробежную. Приведенное рассуждение хорошо объясняет явление радиальной неустойчивости, но оно не может описать тороидальное возмущение (и показать, что именно оно обладает наибольшей неустойчивостью), а также объяснить влияние изменения  $\omega$  по  $r$ .

Интересным следствием этого результата является то, что если сдвиговое течение со скоростью, возрастающей по направлению от границы, приобретает волновой характер при обтекании неровности дна, то по отношению к тороидальным возмущениям течение будет неустойчиво во впадинах между волнами, где центр кривизны линий тока находится в направлении градиента скорости потока (рис. 3.11.3). Растущее возмущение выражается в появлении складок на поверхностях Бернулли вдоль направления течения. Нестабильное состояние сохраняется до тех пор, пока жидкость не выйдет из волновой впадины; на следующем же гребне течение оказывается в устойчивой фазе. Однако рассеяние устойчивых волн на гребне представляет собой идеальное начальное возмущение для дальнейшего развития волнового процесса в следующей впадине.

Во впадине вектор бинормали  $\mathbf{b}$  направлен от наблюдателя в плоскость рисунка (рис. 3.11.3), так что  $\omega\mathbf{b} > 0$ , но на гребне волны направления  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$  меняются на противоположные, и бинормаль  $\mathbf{b}$  направлена из плоскости чертежа. Так как  $\omega$  не меняется, то на гребне  $\omega\mathbf{b} < 0$ .

Этот тип неустойчивости иногда называют *неустойчивостью Гертлера*, так как он весьма детально описал это явление в пограничном слое жидкости, текущей над вогнутой границей (Гертлер, 1959). Скорер и Вильсон (1963) показали, что этот процесс может реализоваться при образовании стоячих волн в атмосфере, когда градиентный слой содержится в невозмущенном потоке. В этой связи следует отметить, что завихренность, образующаяся во впадинах волн, стабилизирует течение и препятствует развитию неустойчивости Гертлера. Поэтому там, где поток движется горизонтально, он обязательно обладает градиентом скорости, если дальше по потоку имеется

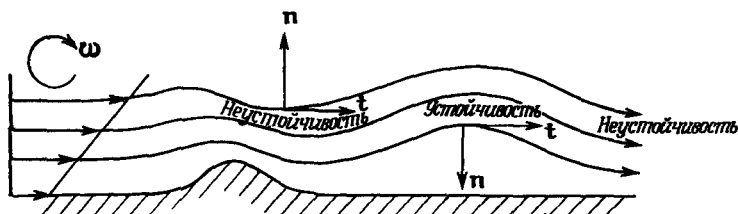


Рис. 3.11 3. Области неустойчивости волнового движения для потока со сдвигом.

неустойчивость. Действительно, волновая неустойчивость течения чаще всего проявляется в образовании стоячих волн, и это обычное явление (см. гл. 6).

Можно отметить, что, согласно уравнению (3.10.34),  $\mu_z$  стремится к бесконечности при  $\beta=90^\circ$ ; это означает просто, что, поскольку нет движения в направлении  $z$ , неустойчивое возмущение будет расти бесконечно внутри данной системы.

### 3.12. Вращения вокруг главной нормали и бинормали

Вращение вокруг бинормали происходит так же, как и вокруг вектора касательной с добавочной постоянной скоростью  $\omega_0$  в направлении оси  $z$ . Уравнение для роста бинормальной составляющей вектора завихренности имеет вид (Скорер, 1967)

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega b}{q} = -2\tau\omega n - \kappa q R t \quad (3.12.1)$$

и преобразуется в (3.10.1) для установившегося течения, если представить, что добавлена скорость  $\omega_0$ , а новые координаты

обозначены штрихами (рис. 3.12.1). Тогда

$$\begin{aligned}t' &= -b, & b' &= t, & \beta' &= \beta + 90^\circ, \\v' &= v, & \frac{v}{\omega} &= \operatorname{tg} \beta, & \frac{v'}{\omega'} &= \operatorname{tg} \beta' = -\operatorname{ctg} \beta, \\ \omega' &= -v \operatorname{tg} \beta, & q' &= \frac{v}{\cos \beta} = q \operatorname{tg} \beta, \\ x' &= \frac{1}{r'} \sin^2 \beta' = \frac{1}{r} \cos^2 \beta = x \operatorname{ctg}^2 \beta = \tau \operatorname{ctg} \beta, \\ \omega &= \omega', & R &= R', & n &= n', \\ \tau' &= x' \operatorname{ctg} \beta' = -x \operatorname{ctg}^2 \beta \operatorname{tg} \beta = -x \operatorname{ctg} \beta.\end{aligned}$$

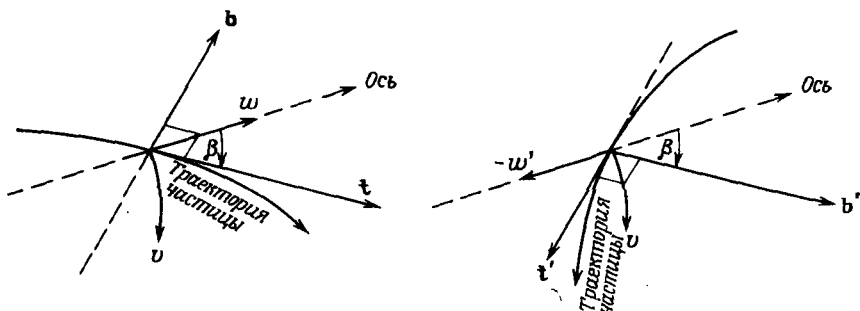


Рис. 3.12.1. Замена координат.

При введении соответствующей дополнительной скорости вдоль оси спирали вращение относительно  $b$  переходит во вращение относительно  $t'$ .

Уравнение (3.12.1) в новых координатах будет иметь вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)' \frac{\omega' b'}{q'} &= -2\tau' \omega' n' - x' q' R' t' = \\ &= 2x \operatorname{ctg} \beta \omega n - \tau \operatorname{ctg} \beta q \operatorname{tg} \beta R (-b) = \\ &= \operatorname{ctg} \beta (2x \omega n + x q R b) = \\ &= \frac{q}{q'} \frac{d}{dt} \frac{\omega t}{q}.\end{aligned}\quad (3.12.2)$$

В установившемся течении, когда нет тангенциального ускорения,  $q$  постоянно, и можно записать

$$\left(\frac{d}{dt}\right)' \omega' b' = \frac{d}{dt} \omega t, \quad (3.12.3)$$

так что уравнение (3.12.1) дает ту же самую информацию, что и (3.10.1); это и должно иметь место, поскольку речь идет об одной и той же компоненте завихренности, рассматриваемой в различных системах координат.

Как легко показать (Скорер, 1967), уравнение составляющей завихренности по главной нормали имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega n}{q} = 0 \quad (3.12.4).$$

с точностью до первой степени  $\Phi$ , так что спиральное течение нейтрально по отношению к вращению относительно главной нормали (т. е. вращению, в котором положения поверхностей Бернулли остаются неизменными).

Таким образом, показано, что описание локальной неустойчивости в искривленном течении полностью определяется уравнением поворота вокруг касательной, т. е. уравнением (3.10.1).

## ВРАЩАЮЩАЯСЯ ЗЕМЛЯ

## 4.1. Формальный математический подход

Когда Раскин написал: «Эти проблемы движения заводят нас далеко в дебри высшей математики» — это был крик души, который часто раздается в мире географов, метеорологов и всех, кто связан с тем, что происходит вне стен кабинетов на просторах нашей планеты. Инженеры и навигаторы изучают математические законы, поскольку инстинктивно верят в их всемогущество, однако многие из этих людей не могут дать правильное физическое толкование формул, которыми они пользуются. Математики же обычно не заботятся о разъяснении физического смысла. С учетом всего этого мы попытаемся одновременно изложить математические закономерности и провести физические рассуждения, поясняющие наблюдаемые нами явления. Сначала мы проведем математический анализ и получим точную формулу, которую затем подвергнем физическому истолкованию.

Мы не будем касаться эффектов, связанных с гравитационными полями Солнца и Луны, так как эти поля вызывают либо слабые приливные эффекты, либо эффекты, которые важны для периодов порядка месяца или года. Эти эффекты настолько слабы, что их влияние на движение тропосферы не достигает даже масштаба обычных ошибок наблюдения. По этим же соображениям мы не ожидаем, что вращение Земли будет влиять на процессы, временной масштаб которых мал по сравнению с сутками. Подробнее гравитационные эффекты рассмотрены в разд. 5.8.

Закон движения Ньютона применяется к движению относительно неускоряющейся инерционной системы отсчета. Пусть наша координатная система (рис. 4.1.1) жестко связана с поверхностью Земли, а ее начало совпадает с точкой  $O$ , в которой мы находимся. Движение этой системы состоит во вращении вокруг земной оси с угловой скоростью  $\Omega$ , равной одному обороту в сутки. Выбранная система отсчета, во-первых, перемещается на восток со скоростью  $\Omega R \sin \theta$ , где  $R$  — радиус Земли, а угол  $\theta$  — дополнение географической широты, во-вторых, вращается относительно оси, проходящей через точку  $O$  параллельно земной оси, и, в-третьих, испытывает ускорение по



направлению к оси Земли, имеющее величину  $\Omega^2 R \sin \theta$ . Последние два из указанных эффектов, вращение и ускорение, будут влиять на движение относительно инерционной системы отсчета. Переходим к математическому описанию.

Любой вектор (такой, как радиус-вектор, его приращение или их производные), который имеет три компоненты по осям

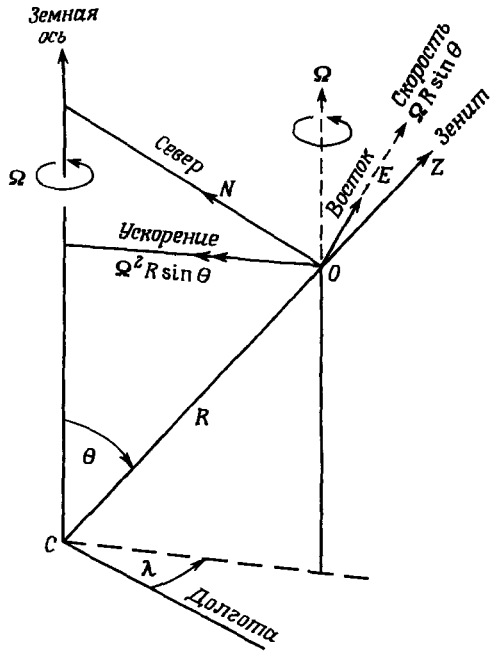


Рис. 4.1.1. Скорость, ускорение и угловая скорость местной координатной системы  $OENZ$  на земной поверхности относительно неподвижной системы координат с началом в центре Земли.

Точка  $O$  находится на поверхности Земли,  $OE$ ,  $ON$  и  $OZ$  направлены соответственно на восток, север и к зениту.

координат, абсолютную величину, равную  $r$ , и производную по времени  $dr/dt$  относительно данной системы координат, приобретает дополнительный член  $-\omega \times r$  в выражении для производной относительно некоторой новой системы координат, обозначаемой индексом 1, которая имеет то же самое начало, что и старая, и вращается относительно ее с угловой скоростью  $\omega$ . Таким образом,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_1 = \frac{dr}{dt} - \omega \times r. \quad (4.1.1)$$

Это — простая формулировка того факта, что точка, радиус-вектор которой в рассматриваемый момент равен  $r$  в обеих системах координат и зафиксирован в невращающейся системе, имеет во вращающейся системе скорость  $-\omega \times r$ . Действительно, вектор  $\omega \times r$  перпендикулярен и  $\omega$ , и  $r$  и имеет абсолютную

величину, равную произведению абсолютной величины  $\omega$  и проекции вектора  $\mathbf{r}$  на нормаль к  $\omega$  (рис. 4.1.2). Следовательно,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1 + \omega \times \mathbf{r} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_1 + \omega \times\right] \mathbf{r}. \quad (4.1.2)$$

Очевидно, это соотношение выполняется и для временных производных вектора в обеих системах координат, так что мы

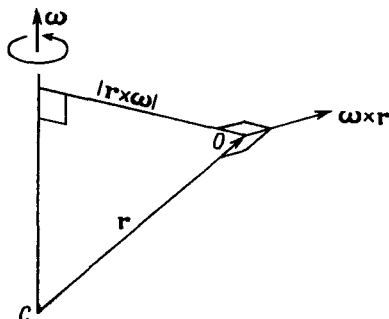


Рис. 4.1.2. Основные величины, входящие в уравнение (4.1.1).

можем или использовать его дважды, или применить непосредственно к  $d\mathbf{r}/dt$  вместо  $\mathbf{r}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_1 + \omega \times\right] \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_1 + \omega \times\right] \mathbf{r} = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_1 + \left(\frac{d}{dt}\right)_1 \omega \times \mathbf{r} + \omega \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1 + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_1 + 2\omega \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1 + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

или

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{dv_1}{dt}\right)_1 + 2\omega \times \mathbf{v}_1 + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}), \quad (4.1.4)$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость относительно неподвижной системы координат, а  $\mathbf{v}_1$  — относительно вращающейся. Величина  $\omega$  предполагается постоянной.

Эти формулы выражают абсолютные ускорения через вектор положения, скорость и ускорение во вращающейся системе координат с началом в центре Земли  $C$ . Если мы теперь перейдем к вращающейся системе координат с началом в точке  $O$  на поверхности Земли, где мы находимся, то скорость  $\mathbf{v}_1$  будет той же самой, что и скорость относительно нашей «местной» системы координат, которую мы обозначим  $\mathbf{v}$ . Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_o + 2\omega \times \mathbf{v} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}), \quad (4.1.5)$$

где индекс  $o$  означает величину в местной системе координат,

с которой мы движемся в точке  $O$ , а  $r$  — радиус-вектор, проведенный из центра Земли.

Важным частным случаем является тот, когда рассматриваемое ускорение есть ускорение силы тяжести. Вектор веса тела единичной массы, измеренный обычным образом, равен массе, умноженной на «кажущееся ускорение силы тяжести». Оно определяется как ускорение свободно падающей частицы,

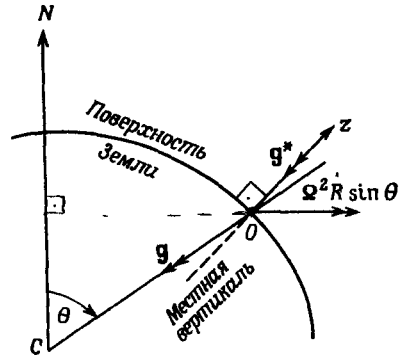


Рис. 4.1.3. Сила тяжести и вращение Земли.

Кажущаяся сила тяжести перпендикулярна поверхности Земли, представляющей собой сфероид. Истинная сила тяжести направлена к центру Земли. Центробежная сила, обусловленная вращением Земли, представляет собой разность истинной и кажущейся сил тяжести.

внезапно остановленной относительно нашей системы координат, движущейся вместе с Землей. Если мы назовем эту величину  $g^*$ , то, поскольку  $g$  является реальным ускорением, мы получим (так как  $v=0$ )

$$g = g^* + \omega \times (\omega \times r). \quad (4.1.6)$$

Это выражение устанавливает соотношение между реальным ускорением силы тяжести  $g$  и кажущимся  $g^*$ . Различие между величинами  $g$  и  $g^*$  возникает за счет центробежной силы, представленной выражением  $\omega \times (\omega \times r)$ , абсолютная величина которого, как было показано выше, равна  $\Omega^2 R \sin \theta$ . Землю можно представить как сплюснутый вдоль оси вращения сфероид, и, следовательно, нормаль к поверхности Земли, за исключением полюсов и экватора, не будет направлена точно к центру (рис. 4.1.3).

Таким образом, уравнение движения для жидкости относительно нашей местной системы координат, связанной с Землей, может быть получено из основного уравнения движения

$$\frac{dV}{dt} = F + g, \quad (4.1.7)$$

где  $F$  представляет все силы, кроме силы тяжести, в виде

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 + 2\omega \times v = F + g^*. \quad (4.1.8)$$

Мы запишем это в более удобной форме:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{v} \times \mathbf{f} + \mathbf{g} + \mathbf{F}. \quad (4.1.9)$$

Здесь  $\mathbf{F}$  включает теперь любые вязкие или другие силы, *кроме тех*, что связаны с градиентом давления или силой тяжести, а под  $\mathbf{g}$  понимается наблюдаемое, или кажущееся, ускорение силы тяжести, а именно

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g). \quad (4.1.10)$$

Величина

$$\mathbf{f} = 2\boldsymbol{\Omega} = (0, 2\Omega \sin \theta, 2\Omega \cos \theta) = (0, f_2, f_3) \quad (4.1.11)$$

называется *параметром Кориолиса*; составляющие его направлены соответственно на восток, на север и вверх.

Символ  $f$  удобен для обозначения параметра Кориолиса в рамках настоящей главы. Обозначение вектора  $\mathbf{f}$  уже использовалось нами, в частности, в гл. 3, для описания ускорения жидкости, но после такого пояснения оснований для путаницы не будет.

## 4.2. Физическая интерпретация

Величина  $\mathbf{v} \times \mathbf{f}$  добавляется к силам, сообщаящим жидкости ускорение. Ее обычно называют *отклоняющей силой* или *ускорением Кориолиса*, по имени открывшего его французского инженера. Горизонтальная компонента этой силы, которая возникает за счет вертикальной компоненты  $\mathbf{f}$ , представляет собой ускорение в направлении направо по движению с абсолютной величиной  $v f_3$ , где  $v$  — горизонтальная скорость относительно Земли.

В этой главе мы будем рассматривать жидкость, глядя на нее *сверху в северном полушарии*. Чтобы интерпретировать наши результаты для южного полушария, нужно либо смотреть на жидкость как бы изнутри земного шара, либо поменять местами правое и левое направления. Термин *циклоническое вращение* означает *вращение, направленное против часовой стрелки, если смотреть сверху* в северном полушарии, но оно же оказывается направленным по часовой стрелке в южном полушарии. Направление вращения часовой стрелки исторически возникло в северном полушарии по аналогии с видимым движением Солнца, которое перемещается в направлении, противоположном направлению вращения Земли. *Циклонический* означает вращение *вместе с Землей*.

Следовательно, вертикальная компонента вращения Земли заставляет землю под нами вращаться циклонально. Пусть мы перемещаемся от точки  $O$  к точке  $P$  с постоянной скоростью  $v$  за время  $t$  (рис. 4.2.1). За время нашего движения под действием вращения Земли конечная точка  $P$ , перемещаясь из ее положения  $P_0$  в начале движения, опишет дугу окружности  $P_0P$ . Мы при этом опишем в пространстве также дугу окружности  $OP$ . Так как вертикальная компонента вектора вращения Земли равна  $\Omega \cos \theta$ , то угол  $P_0OP$  равен  $t\Omega \cos \theta$ , а дуга, описанная точкой  $P$ , равна  $vt \times t\Omega \cos \theta$ . За время  $t$  при постоянном ускорении  $a$  объект, в начальный момент находившийся

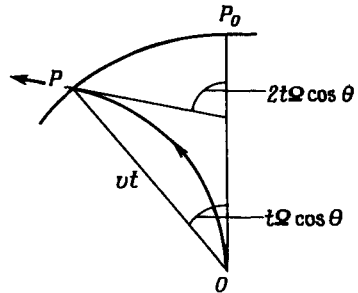


Рис. 4.2.1. Путь от точки  $O$  к точке  $P$  на поверхности вращающейся Земли в неподвижной системе координат.

в покое, переместится на расстояние  $\frac{1}{2}at^2$ . Ускорение в данном случае будет равно  $2v\Omega \cos \theta$ .

Множитель 2 для многих оказывается загадочным, так как кажется, что для того, чтобы попасть в точку  $P$ , нужно двигаться к ней по прямой линии по земле. Однако на самом деле пройденный путь представляет собой дугу окружности, а направление движения «в пространстве» (т. е. относительно неподвижной системы координат) меняется на угол  $2t\Omega \cos \theta$  за время, пока объект достигнет точки  $P$ , т. е. траектория движения оказывается такой, как если бы скорость вращения имела вдвое большую величину.

Горизонтальная компонента скорости вращения Земли равна  $\Omega \sin \theta$ ; вращение происходит относительно оси, расположенной горизонтально и ориентированной на север. Восточный горизонт при этом как бы опускается, а западный — поднимается, так что ускорение, испытываемое объектом, в зависимости от того, движется он на восток или на запад, убывает или увеличивается на величину  $2v\Omega \sin \theta$ . Например, при скорости  $v=10$  м/с и  $\Omega$ , равной  $2\pi/(24 \times 60 \times 60)$  рад/с, это ускорение будет порядка  $10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>, что составляет примерно  $10^{-4}$  от ускорения силы тяжести. Поэтому оно не будет производить ощутимого эффекта, поскольку даже малые изменения температуры порождают большие изменения веса воздуха. При общем движении

всей толщии атмосферы со скоростью 10 м/с давление в приземном слое изменилось бы примерно на 0,1 мбар, что соответствует весу слоя атмосферы толщиной около 1 м у поверхности Земли.

Давление у поверхности Земли в определенной местности меняется обычно на несколько миллибар за время между изготовлением последовательных карт для этой местности, и для того, чтобы вызвать хотя бы минимальное, фиксируемое при измерении изменение давления, равное 0,1 мбар, скорость меняется в недостаточной степени.

Закон Ферреля (американский метеоролог XIX в.) гласит, что атмосферный воздух отклоняется при движении направо

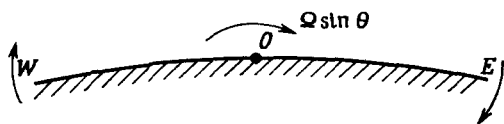


Рис. 4.2.2. Эффект «приподнятия» западного горизонта горизонтальной компонентой угловой скорости вращения Земли.

в результате вращения Земли; закон Буис-Баллота (голландский метеоролог XIX в.) гласит, что если движение происходит по прямой, это значит, что меньшее давление находится слева по движению. Оба этих закона — только частные случаи описанного выше.

### 4.3. Соотношение между градиентом давления и ветром

Наличие ускорения Кориолиса приводит к тому, что движение в атмосфере, так же как и ветер, определяется не только градиентом давления. Замедляющийся воздушный поток чаще движется в сторону более высокого давления. Было бы неверно считать, что не будь вращения Земли, воздух двигался бы в направлении более низкого давления. Однако можно сказать, что если бы не было трения, он с тем же успехом зачастую перемещался бы в сторону высокого давления. Тот факт, что воздух движется практически вдоль изобар, показывает, что в общем поле давлений трение не совершает над воздушными массами большой работы и поэтому мало влияет на движение.

Поскольку в воздухе точно измерить давление легче, чем какой-либо другой параметр, а движение воздуха приблизительно горизонтально, то нетрудно получить полезное соотно-

шение. В первом приближении вертикальная составляющая выражения (4.1.9) равна

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (4.3.1)$$

поскольку вертикальная скорость мала, вертикальное ускорение мало по сравнению с  $g$ , а отклоняющими и фрикционными силами также можно пренебречь. Это — хорошо известное *уравнение гидростатики*. Отклонения от него в атмосфере обычно пренебрежимо малы, если не считать такого рода волн, которые описаны в гл. 5, и некоторых сильных нисходящих грозových потоков или смерчей.

Существует несколько типов горизонтального движения; они представлены членами горизонтальной составляющей выражения (4.1.9), расположенными в порядке их значимости:

$$\frac{dv_h}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_h p + v_h \times f + F_h. \quad (4.3.2)$$

#### 4.3.1. Геострофический ветер

Очень часто воздушные массы в течение суток проходят большие расстояния, и при этом направление и скорость их движения изменяются весьма незначительно. Ускорение приближенно равно 0. Сила трения также мала по сравнению с остальными членами, так что, отбросив в (4.3.2) ускорение и фрикционный член, получим

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v f_z + 0, \quad (4.3.3)$$

где направление  $x$  ориентировано поперек движения, а  $v$  — абсолютная величина скорости. Тогда в так называемом геострофическом (т. е. обусловленном вращением Земли) приближении уравнение движения примет вид

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.3.4)$$

где  $f$  записано вместо  $f_z$ , а  $v_g$  — скорость геострофического ветра. Эта скорость обратно пропорциональна расстоянию между изобарами, причем низкое давление оказывается слева по движению.

#### 4.3.2. Агеострофический ветер

Агеострофический ветер представляет собой разность действительного и геострофического ветров и обозначается  $v_a$ . Следовательно,

$$v = v_g + v_a. \quad (4.3.5)$$

Поэтому, когда трение отсутствует, а ускорение, наоборот, значительно, вычитая (4.3.3) из соответствующей компоненты (4.3.2), можно получить

$$\frac{dv}{dt} = v_a \times f. \quad (4.3.6)$$

Таким образом, агеострофический ветер пропорционален ускорению и направлен влево от него под прямым углом.

### 4.3.3. Антитриптические ветры

Этот термин был введен Джеффрисом для ветровых движений, у которых сила трения уравнивается градиентом давления. Понятие антитриптического ветра относится только к ветрам вблизи поверхности Земли, где сила трения направлена против скорости; тогда движение происходит в направлении низкого давления. Если считать силу трения пропорциональной квадрату скорости ветра, т. е.  $kv^2$ , то

$$kv^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (4.3.7a)$$

где координата  $y$  отсчитывается в направлении движения.

Ветер в овраге или ущелье, морской бриз, кататический или анабатический ветры обычно имеют существенную фрикционную составляющую.

### 4.3.4. Напряжения сдвига

Если по причинам, которые мы рассмотрим ниже, ветер меняется с высотой, а между слоями, расположенными друг над другом, происходит перемешивание, то количество движения передается более медленно движущемуся слою. В нижнем слое, испытывающем сопротивление трения о подстилающую поверхность, необходимо затратить определенную работу, чтобы преодолеть его; таким образом, появляется составляющая скорости ветра в направлении низкого давления (рис. 4.3.1). С другой стороны, когда трение у поверхности невелико, как это часто бывает над морем, а скорость ветра возрастает с высотой достаточно быстро для того, чтобы нижние слои увлеклись в направлении движения верхних слоев (которое может отличаться от направления движения нижележащих слоев), ветер приобретает составляющую, направленную в сторону более высокого давления (рис. 4.3.2). Было бы неверным считать, что вблизи поверхности Земли фрикционная составляющая ветра всегда направлена в сторону низкого давления. Она



может быть направлена в сторону высокого давления, и даже в том случае, когда эта компонента направлена в сторону низкого давления, это может быть обусловлено тормозящим усилием со стороны слоев, движущихся либо медленнее, либо в ином направлении. В пассатах течение поперек изобар является преобладающим, поскольку либо верхние слои движутся медленнее, либо направление ветра меняется с высотой,

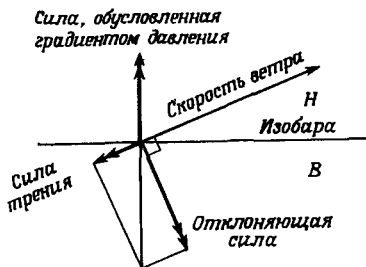


Рис. 4.3.1. Отклонение ветра от изобары за счет поверхностного трения.

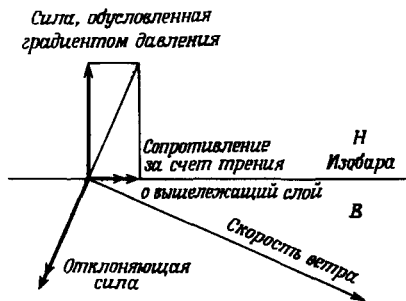


Рис. 4.3.2. Отклонение ветра в слое от изобары за счет фрикционного увлечения ветром вышележащего слоя.

либо имеется дрейф по направлению к экватору. Этот вопрос рассматривается в разд. 4.11.

#### 4.3.5. Градиентный ветер (криволинейный поток)

При движении по окружности ускорение можно представить величиной  $v^2/r$ , где  $r$  — радиус кривизны траектории. Если существенную роль играют только отклоняющая сила и сила градиента давления, то получается следующее уравнение, отражающее равновесие центростремительного ускорения и радиальных сил:

$$\mp \frac{v^2}{r} = \mp \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v f. \quad (4.3.76)$$

Верхний знак соответствует циклоническому движению, когда градиент давления направлен по радиусу вовнутрь, а отклоняющая сила — наружу. Для антициклона направления сил меняются на противоположные (рис. 4.3.3). Уравнение градиентного ветра (4.3.76) является хорошим приближением к действительности в случае криволинейного течения с незначительным тангенциальным ускорением.

### 4.3.6. Переменное поле давлений: изаллобарический ветер

Изаллобарический ветер представляет собой составляющую ветра, вызванную изменением поля давлений. Если в процессе своего изменения ветер приблизительно сохраняет геострофический характер, можно продифференцировать уравнение геострофического ветра по времени; тогда получим

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \times \mathbf{f}), \quad (4.3.8)$$

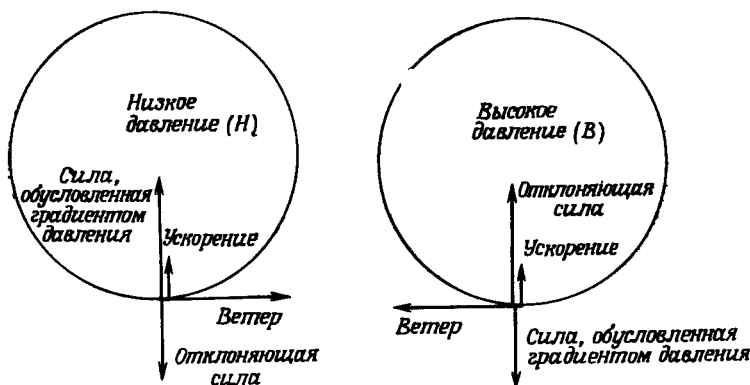


Рис. 4.3.3. Баланс сил в искривленном течении без трения.

или

$$\mathbf{f} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.3.9)$$

Если теперь предположить, что вариации ускорения от точки к точке малы, то можно приравнять полное ускорение  $d\mathbf{v}/dt$  к частному  $\partial \mathbf{v}/\partial t$ , что, без сомнения, оправдано во многих случаях. Следуя этому приближению, получим

$$\mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \frac{\partial p}{\partial t} = \mathbf{f} \times \mathbf{v}_i \times \mathbf{f}, \quad (4.3.10)$$

поскольку в этом случае изаллобарический ветер является агеострофическим и определяется выражением (4.3.6). Поэтому изаллобарический ветер направлен под прямым углом к изаллобарам (линиям постоянных  $\partial p/\partial t$ ) в сторону наибольшей

скорости падения давления. Скорость этого ветра определяется выражением

$$v_i = \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.3.11)$$

так как  $v_i$  и  $f$  приблизительно взаимно перпендикулярны.

Приведенный экскурс в классическую теорию дает весьма неудовлетворительное объяснение того, почему при быстром возрастании градиента давления ветер дует поперек изобар в сторону области, где падение давления максимально. Поскольку это падение происходит быстро, геострофическое равновесие не успевает установиться, и наличие такого ветра только подтверждает этот факт. Выражение (4.3.11) оказывается тогда совсем неверным, поскольку для времен, малых по сравнению с сутками, эффект Кориолиса не может играть решающей роли.

#### 4.3.7. Геострофическое ускорение: конвергенция и дивергенция потока

Когда течение происходит почти по прямой, а распределение давления близко к постоянному, так что можно пренебречь

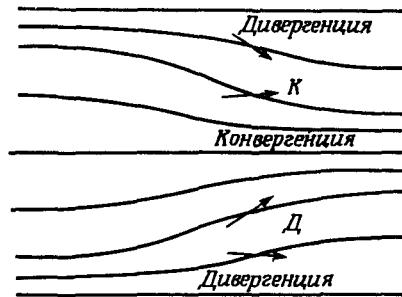


Рис 4.3.4. Агеострофическое течение за счет конвергенции и дивергенции (области К и Д).

эффектом искривления и изаллобарическим эффектом, то агеострофическую составляющую можно получить из производной геострофического ветра по направлению вдоль линий тока, т. е. вдоль изобар. Рис. 4.3.4 показывает, каким образом воздух движется поперек изобар в направлении высокого давления, где он замедляется, и в направлении низкого давления, где он ускоряется.

Течение называется *конвергентным* или *дивергентным* там, где оно соответственно ускоряется или замедляется. Если бы течение было геострофическим, оно было бы нерасходящимся, так как распределение скоростей обеспечивало бы одну и ту же

величину потока между двумя изобарами. Но там, где слева имеется область разрежения линий тока, а справа — область сгущения, в потоке образуется зона конвергенции (помеченная буквой *K* на рисунке) и зона дивергенции в противоположном случае (буква *D*). Так как ускорение приближенно равно  $(\mathbf{v}_g \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_g$ , то абсолютная величина агеострофического ветра в соответствии с (4.3.6) определяется выражением

$$v_a = \frac{1}{f} (\mathbf{v}_g \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_g, \quad (4.3.12)$$

и направлен он будет из-за ускорения в сторону низкого давления поперек изобар.

#### 4.4. Движение в верхних слоях атмосферы; изобарические карты

Карты распределения давления непрактично рисовать для каких бы то ни было абсолютных высот, кроме уровня земли. Вместо этого изображают линии равной высоты (изогипсы)

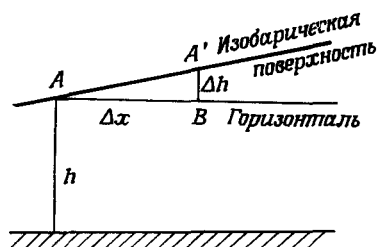


Рис. 4.4.1. Соотношение между изобарами на постоянной высоте и изолиниями равной высоты на изобарической поверхности.

для так называемых изобарических поверхностей. На рис. 4.4.1 показано вертикальное сечение изобарической поверхности перпендикулярно к изобарам на высоте  $h$ . Если  $\Delta p$  — разность давлений в точках *A* и *B*, расположенных на высоте  $h$ , а давление в точке *A'*, расположенной на высоте  $\Delta h$  над точкой *B*, равно давлению в точке *A*, то  $\Delta p = g \rho \Delta h$ . Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (4.4.1)$$

и изобары на высоте  $h$  могут быть представлены изолиниями на изобарической поверхности для данной точки. Уравнение геострофического ветра (4.3.4) при этом принимает вид

$$v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (4.4.2)$$

а карта изолиний на фиксированной изобарической поверхности становится очень похожей на карту изобар на постоянной высоте. Преимущество последней заключается в том, что множитель  $g/f$  не зависит от плотности, а следовательно, и от абсолютной высоты, так что один и тот же масштабный множитель можно использовать для карт изолиний на любой высоте.

### 4.5. Термический ветер

Если имеется горизонтальный градиент температуры, то горизонтальный градиент давления должен меняться с высотой, так как два соседних столба воздуха будут иметь различный

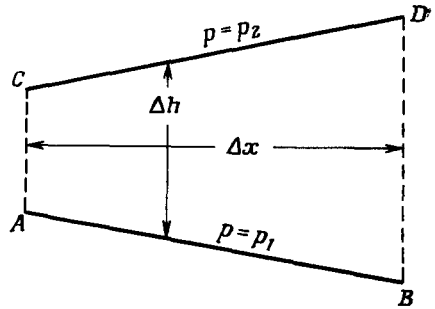


Рис. 4.5.1. Соотношение термического ветра и расстояний между изобарическими поверхностями.

вес. Рис. 4.5.1 представляет вертикальное сечение в атмосфере, перпендикулярное к горизонтальным изотермам, проведенным на поверхностях постоянного давления  $p_1$  и  $p_2$ . Так как уравнение (4.4.2) выполняется для двух уровней, обозначенных индексами 1 и 2, то разность геострофических ветров  $\Delta v_g$  для этих двух уровней определяется соотношением

$$\Delta v_g = \frac{g}{f} \Delta \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial x} \Delta h, \tag{4.5.1}$$

где  $\Delta h$  — толщина слоя между двумя изобарическими поверхностями. Так как высота столба воздуха, если заданы площадь его горизонтального сечения и вес, пропорциональна температуре, то толщина слоя также пропорциональна температуре при заданном давлении. Это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta h = \frac{\Delta h}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{p=\text{const}} \tag{4.5.2}$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} \approx \frac{\Delta v_g}{\Delta h} = \frac{g}{fT} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{p=\text{const}}. \tag{4.5.3}$$

На уровне, где изобарические поверхности горизонтальны, вертикальный градиент геострофического ветра направлен вдоль изотерм (низкая температура находится слева) и поэтому называется *термическим ветром*. Там, где изобарические поверхности негоризонтальны, требуется поправка, так что на практике на картах изображают не изотермы, а изолинии равных расстояний между двумя изобарическими поверхностями, которые описывают разность между скоростями ветра на этих уровнях. Это эквивалентно использованию выражения (4.5.1) вместо (4.5.3). Название «термический ветер» сохраняется, поскольку градиент ветра определяется температурным градиентом.

#### 4.6. Оценка вертикальной скорости

Перед специалистами по прогнозу погоды стоит проблема, связанная с тем, что образование облаков всех типов и выпадение осадков обусловлены восходящим движением воздуха, а исчезновение облаков происходит из-за нисходящих потоков. Но вертикальную скорость воздуха над большой территорией трудно измерить вследствие малости ее величины (от  $10^{-3}$  до 1 м/с). Более того, из-за большой разбросанности измерительных пунктов и низкой точности измерений невозможно определить поле горизонтального ветра настолько подробно, чтобы по горизонтальным градиентам  $u$  и  $v$  можно было найти вертикальную составляющую ветра, хотя бы с помощью упрощенной модификации уравнения неразрывности:

$$\omega = \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (4.6.1)$$

Дополнительная трудность заключается в том, что, даже измерив поле давлений достаточно аккуратно для того, чтобы, предполагая ветер геострофическим, найти его компоненты, можно легко убедиться в том, что поле геострофического ветра не обладает дивергенцией, а следовательно, вертикальная скорость получается равной нулю. Математически этот факт выражается следующим образом: так как компоненты геострофического ветра равны

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad u_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.6.2)$$

то, очевидно,

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial y} = 0, \quad (4.6.3)$$

если пренебречь горизонтальным градиентом величины  $\rho f$ , который настолько незначителен, что не позволяет получить какую-либо заметную величину для  $\omega$ . На практике во всех случаях вариации величины  $\rho f$  не вызывают появления вертикальных движений.

Иными словами, вертикальное движение связано с агеострофической компонентой ветра. Мы не рассматриваем здесь математический аппарат, используемый при численном прогнозе погоды, а хотим изложить основные понятия о механизмах, посредством которых вертикальные движения можно связать с измеримыми и по возможности легко наблюдаемыми явлениями. Многим эти соображения помогут понять смысл того, что они видят в небе или на карте погоды, и сделать собственный прогноз или употребить с большей пользой имеющийся официальный.

Если ветер можно считать геострофическим, то вертикальных движений, как мы видели выше, быть не может, так что эти движения определяются агеострофической компонентой ветра. Вместе с вертикальным движением должно происходить растяжение столба воздуха, поскольку скорость воздуха у поверхности Земли равна нулю. Атмосфера почти целиком обладает завихренностью, так как она вращается вместе с Землей. Даже в антициклонах вектор абсолютной завихренности положителен, т. е. направлен в ту же сторону, что и вектор скорости вращения Земли (хотя по абсолютной величине он, очевидно, меньше). Следовательно, растяжение вихревых линий увеличивает завихренность, по крайней мере вблизи поверхности Земли. На некоторой большей высоте вертикальный столб воздуха должен будет подвергнуться вертикальному сжатию и в нем возникнет горизонтальная дивергенция потока, а это вызовет уменьшение вертикальной компоненты завихренности до величины, вероятно, меньшей, чем абсолютная величина вектора скорости вращения Земли. Вследствие этого относительно поверхности Земли циркуляция оказывается антициклонической.

Следовательно, вблизи подстилающей поверхности в атмосфере должно происходить увеличение циклонической завихренности, порождающей восходящие потоки. Это означает увеличение циркуляции по контуру данного размера вблизи подстилающей поверхности. Отсюда следует возрастание градиента давления и падение давления в центре, под поднимающимся воздухом. Такова логика взаимосвязи между падением давления и подъемом воздуха. Восходящие потоки в свою очередь связаны с образованием облаков и осадков. Таким образом, подъем воздушных масс связан не столько с низким, сколько с падающим давлением. Раньше полагали, что низкое

давление служит причиной дождя, и эта связь иногда объяснялась тем, что сила трения вызывает приток воздуха в область низкого давления (детали такого процесса уже рассматривались нами в гл. 3). Однако следует подчеркнуть, что возникновение дождя связано, главным образом, с ложбинами низкого давления, что воздушные массы за ними очень часто опускаются и свободны от облаков и что вертикальные движения возникают, главным образом, при подъеме теплого и опускании холодного воздуха и имеют мало общего с силами трения. Верно, что силы трения вызывают течения, направленные в область низкого давления, но это обычно приводит лишь к заполнению центров низкого давления, поскольку трение уменьшает циркуляцию.

Поэтому на практике прогнозисты оценивают вертикальные движения по наблюдениям завихренности поля геострофического ветра и другими соответствующими способами. Интенсивность вертикальных потоков может быть непосредственно определена по известному полю давлений; она равна  $(1/\rho f) \nabla^2 p$ . Эта завихренность возрастает вследствие конвергенции в нижних слоях, а центры низкого давления формируются или углубляются за счет той же конвергенции. Создающаяся таким образом конвергенция далеко превосходит ту, которая получается за счет трения в тех широтах, где вращение Земли играет важную роль. Вблизи экватора, где пренебрежимо мала вертикальная компонента вектора вращения Земли, больших градиентов давления не образуется.

#### 4.7. Теория развития центров низкого давления Сатклиффа

Термин «развитие» используется для описания процесса образования центров низкого давления и сопровождающих его вертикальных движений и погодных явлений. Мы сосредоточим внимание на поле горизонтальных ускорений, которые в отсутствие сил трения являются причиной всех агеострофических движений.

Пусть индексы 1 и 2 соответствуют значениям вектора на двух различных уровнях,  $\text{grad}_r$  обозначает горизонтальные составляющие оператора градиента, а штрих характеризует разность значений на двух уровнях. Тогда

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad (4.7.1)$$

а ускорение на верхнем уровне будет равно

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2 \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}_1 + \\ + (\mathbf{v}' \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$



Поэтому

$$\frac{dv_2}{dt} - \frac{dv_1}{dt} = (\mathbf{v}' \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}_1 + \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \text{grad}_r \right] \mathbf{v}'. \quad (4.7.3)$$

В соответствии с (4.3.6) агеострофическое движение возникает полностью за счет ускорения. Восходящее движение связано с конвергенцией внизу и дивергенцией наверху, а также с возрастанием циклонической циркуляции и падением давления в нижних слоях. Уравнение (4.7.3) описывает разность ускорений между верхним и нижним слоями, которая количественно определяет циклогенез. Эта разность выражается через поле ветра в нижнем слое  $\mathbf{v}_1$ , адвекцию за счет термического ветра  $\mathbf{v}' \cdot \text{grad}_r$  и производную поля термического ветра  $\mathbf{v}'$ , действующего в верхнем слое (где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ ). Перейдем теперь к рассмотрению влияния различных участвующих в процессе факторов.

#### 4.7.1. Зависимость приземного поля давлений от термического ветра

Снова рассмотрим поле ветра в геострофическом приближении и вместо  $(\mathbf{v}' \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}_1$  напомним  $(\mathbf{v}'_g \cdot \text{grad}_r) \mathbf{v}_g$ . Это будет вектор, направленный вдоль поверхностных изобар, если двигаться по термическому ветру вдоль изотерм, имея холодный воздух слева по движению. Этот вектор перемещает приземное поле давления в направлении термического ветра и поэтому может быть назван *термическим сдвигом*.

Рассмотрим это на примере. Представим себе замкнутую циклоническую циркуляцию у поверхности Земли (рис. 4.7.1). Окружность изображает некоторую изобару, а прямые линии — изотермы. Холодный воздух показан находящимся на севере (в верхней части рисунка), так что мы фактически имеем дело со схематическим описанием типичной для средних широт ситуации циклона в западно-восточном переносе. Геострофический ветер в нижнем слое,  $\mathbf{v}_{g1}$ , циркулирует вокруг зоны депрессии, которую называют также областью низкого давления, или *циклоном*. При движении в направлении термического ветра от  $A$  к  $B$ , от  $C$  к  $E$  или от  $F$  к  $G$  приземный геострофический ветер меняется за счет добавки к нему составляющей, направленной на север (т. е. вдоль  $FA$  или  $GB$ ). Это и есть его вклад в относительное ускорение, описываемое формулой (4.7.3) (член, определяющий термический сдвиг, стоит на первом месте в правой части указанной формулы). В соответствии с (4.3.6) агеострофический ветер направлен к составляющей термического сдвига под прямым углом налево, т. е. на запад (рис. 4.7.1). Это означает, что воздух в более верхнем слое смещается, как

показано на нижней части рисунка, влево относительно нижних слоев. Такое смещение вызывает в передней части депрессии восходящее движение воздуха и развитие циклона, а в тыловой

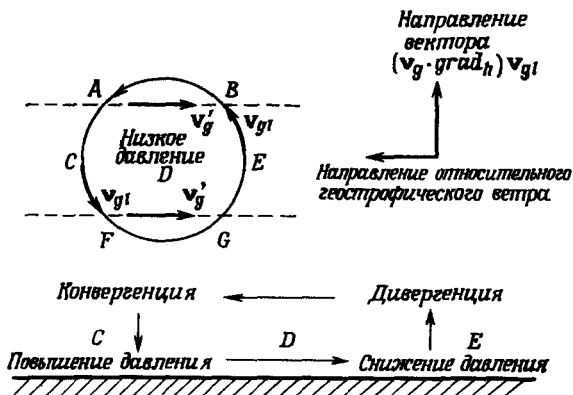


Рис. 4.7.1. Механизм движения депрессии, перемещающейся по термическому ветру.

части — соответственно нисходящее движение и развитие антициклона. Таким образом, депрессия смещается в направлении термического ветра.

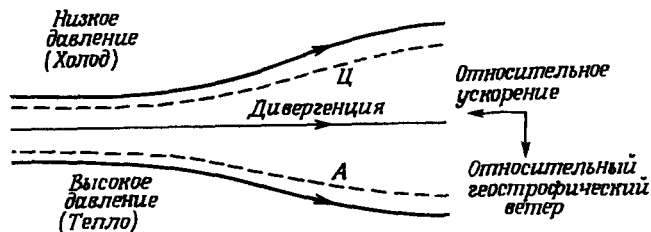


Рис. 4.7.2. Картина дивергенции потока в направлении термического ветра.

— изобара, --- изотерма.

Картина дивергенции потока, показанная на рис. 4.7.2, дает нам второй пример: здесь скорость геострофического ветра убывает вниз по потоку. Направление термического ветра выбрано совпадающим с направлением потока. Таким образом, вектор относительного ускорения будет направлен вверх по потоку, т. е. в нашем случае против ветра. При этом относительный агеострофический ветер, направленный к потоку под прямым углом, порождает в нижнем слое слева по потоку конвергенцию, а справа по потоку — дивергенцию. Следова-

тельно, слева образуется область циклогенеза (Ц), или падения давления, а справа — область антициклогенеза (А), или роста давления. Таким образом, градиент давления возрастает, поэтому рассматриваемое барическое образование будет перемещаться по направлению термического ветра. Интересно сравнить разобранный ситуацию с показанным на рис. 4.3.4 агеострофическим движением, которое выводилось без учета движения вышележащих слоев и термического ветра. В последнем случае ситуация оказалась совершенно иной.

Уравнение (4.7.3) можно записать в эквивалентной форме, поменяв местами индексы 1 и 2 и изменив знак у  $v'$ . Это позволяет обнаружить, что термический ветер смещает барическое поле в верхнем слое. Однако высказанные положения могут оказаться неверными, поскольку в этом случае соотношения между циклогенезом и вертикальным движением необязательно окажутся такими же, как у земной поверхности, где имеется жесткая граница, порождающая процесс сдвига. Можно было бы, конечно, утверждать, что барическое образование движется по направлению ветра в верхнем слое, поскольку само оно создано весом находящегося сверху воздуха. Однако это было бы ошибкой, так как барическое поле у поверхности Земли в действительности не зависит от массы воздуха в вышележащих слоях, который движется вместе с термическим ветром. Изотермы в случае, показанном на рис. 4.7.1, отнюдь не свидетельствуют о наличии теплого воздуха над циклоном. В действительности «холодные депрессии» представляют собой обычное явление в атмосфере, а ураганы являются экстремальным случаем. Область низкого давления создается теплым воздухом в стратосфере, и ее наличие обычно показывает, что тропопауза над ней находится ниже среднего уровня, так что теплый воздух не движется вместе с циклоном, а по тропопаузе движется волна, порожденная циклоном внизу.

Таким образом, хотя мы и показали на двух примерах, как барическое образование движется по направлению термического ветра, мы лишь обнаружили аргумент, который может быть использован в любом частном случае. Чтобы доказать положение Сатклиффа в общем виде, нам понадобилось бы формальное описание граничных условий на поверхности и ряд ограничений на характер движения в рассматриваемой окрестности. Это сделало бы циклогенез обязательным следствием агеострофического движения, обусловленного наличием ускорения, поскольку мы, очевидно, уже предположили, что в любом частном случае существуют компенсационные вертикальные движения. Тем не менее это может рассматриваться как теорема для некоторых предполагаемых условий, которые подобны условиям в реальной атмосфере.

Это — прекрасный пример возможности вывода всех важных аспектов реального движения из уравнений поля геострофического ветра, которое на самом деле не может служить их причиной. Тем не менее такой подход является весьма существенным шагом в развитии динамического мышления.

#### 4.7.2. Образование депрессий из-за нагрева

Член  $\partial v'/\partial t$  в правой части выражения (4.7.3) описывает эффект локальных изменений поля температур. Проиллюстрируем это явление следующим примером. Представим, что в летний день воздух нагрет над такой областью, как Британские острова или Иберийский полуостров; тогда термический ветер будет дуть так, чтобы область нагрева оказывалась справа. По отношению к рассматриваемой области движение будет антициклональным (рис. 4.7.3). В процессе развития антициклональной циркуляции локальная производная будет ориентирована в том же направлении. Как следует из уравнения (4.7.3), так же будет направлено и относительное ускорение, передаваемое вышележащими слоями нижним. Агеострофическая составляющая будет ориентирована относительно этого направления налево под прямым углом, т. е. наружу от нагреваемой области в верхних слоях, и наоборот — в нижних. Это порождает дивергенцию наверху и конвергенцию внизу, а следовательно, восходящее движение в центре области, увеличение завихренности в нижнем слое и образование зоны теплой депрессии.

Итак, мы пришли к выводу, что нагрев порождает центры низкого давления. Это может показаться совершенно очевидным результатом для читателя, хорошо усвоившего положение о том, что горячий воздух, создав низкое давление под собой, поднимается, потому что он имеет меньшую плотность. Читатель, вероятно, встречался с этим эффектом при возникновении морского бриза или подобных явлений. Однако во многих случаях вращением Земли можно пренебречь, а трение играет важную роль, так что ветры могут быть антитриптическими. Но в нашем случае влияние вращения Земли доминирует, а трением как раз можно и пренебречь. Это иллюстрирует тот принцип, что вращение Земли является причиной развития областей низкого давления посредством динамических атмосферных процессов вообще. Ураган служит самым ярким примером такого развития, потому что не наличие источника тепла и нагрев воздуха этим источником является причиной понижения давления в центре урагана.

Область низкого давления углубляется за счет притока туда воздушных масс вблизи Земли, поскольку это сопровождается растяжением вихревых линий по вертикали и увеличением цир-

куляции. Действительно, сила Кориолиса, отклоняющая втекающий воздух вправо, приводит к понижению давления. Если же, напротив, низкое давление возникает в отсутствие вращения Земли, то приток воздуха вызывает заполнение депрессии, а трение лишь немного замедляет этот процесс. В нашем случае

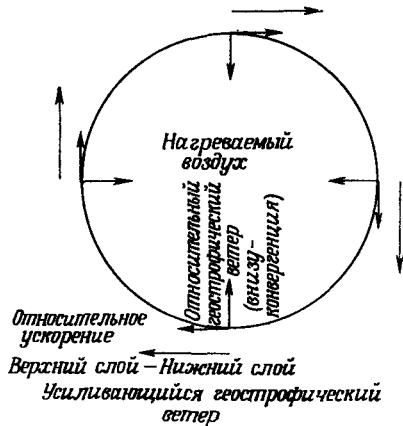


Рис. 4.7.3. Образование депрессии в приземном слое вследствие антициклонического ускорения иaverху вокруг нагреваемого воздуха.

трение, наоборот, способствует притоку воздуха в область низкого давления, не увеличивая при этом циркуляции и ускоряя тем самым процесс заполнения депрессии.

### 4.7.3. Увеличение температурных градиентов

Горизонтальные температурные градиенты могут еще более усилиться в уже существующей зоне значительных термических градиентов за счет ветров, дующих поперек изотерм в направлении области, где они поворачивают вдоль них, как, например, во фронтальной зоне. На рис. 4.7.4 слева показано течение, которое сближает теплый и холодный воздух и увеличивает температурный градиент за счет адвекции в верхних слоях, описываемой в уравнении (4.7.3) членом  $(v_2 \text{ grad}_h) v'$ . Термический ветер, дующий вдоль изотерм, усиливается вследствие адвекции, и, таким образом, относительный агеострофический ветер дует под прямым углом к образуемому вектору  $v'$ , порождая в верхнем слое течение по направлению от зоны возрастающего температурного градиента, а в нижнем слое — по направлению к этой зоне. Рассматриваемая зона, следовательно, становится областью падения давления. В разбираемом примере это ложбина низкого давления, а не центр, и развитие типично для холодного фронта.

Такой же результат можно получить для теплого фронта, как это показано на рис. 4.7.5.

Когда холодный фронт приближается к антициклону, а термальный ветер усиливается, давление падает перед фрон-

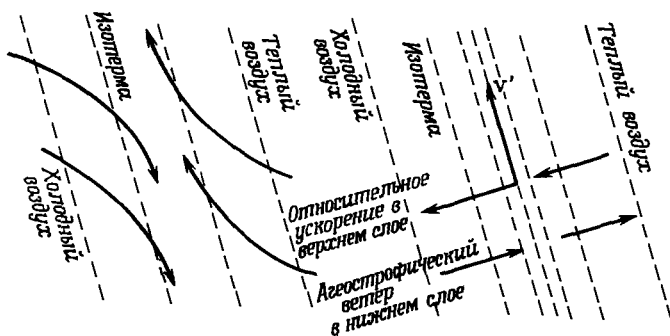


Рис. 4.7.4 Картина усиления температурного градиента для холодного фронта.

том и возрастает за ним таким образом, что перемещает фронт сквозь антициклон, который за фронтом восстанавливается.



Рис. 4.7.5. Картина усиления температурного градиента для теплого фронта.

а — изобары и положение теплого фронта вблизи подстилающей поверхности, б — влияние вторжения теплого воздуха на геострофический ветер (вертикальный разрез).

Теплый фронт, приближаясь к холодной воздушной массе, может вызвать противоположный эффект (рис. 4.7.5). Здесь дивергенция перед перемещающимся теплым воздухом сопровождается возрастанием давления, и фронт задерживается.

Вообще говоря, увеличение температурного градиента приводит к повышению давления в холодном воздухе и к падению — в теплом. Однако нужно помнить, что это только один из возможных механизмов, и в любом реальном случае результат может оказаться существенно сложнее.

Следует подчеркнуть, что какую бы роль трение ни играло в атмосферных течениях, его нельзя считать одной из главных причин развития атмосферных процессов в масштабе циклонов и антициклонов.

#### 4.8. Фронты

В гл. 7 будет показано, что градиенты температуры и скорости сглаживаются не за счет общего движения жидкости, а лишь вследствие молекулярных движений. Идея о том, что вихри способствуют сглаживанию градиентов в жидкости, возникла при рассмотрении общей картины турбулентных течений, на которой мелкомасштабные детали как бы смазываются. Реальные движения почти всегда сопровождаются увеличением градиентов температуры и скорости, тогда как механизмы молекулярной диффузии не играют существенной роли. Это положение не зависит от наличия или отсутствия вращения Земли. Однако, поскольку большие градиенты скорости свидетельствуют о существовании завихренности, а градиенты плотности ее порождают, можно ожидать, что те же механизмы увеличения градиентов действуют и в крупномасштабных процессах в атмосфере, которая завихрена в целом из-за вращения Земли.

Классическое описание фронта, данное Маргулисом, показывает важную роль вращения. Фронт является особым механизмом термического ветра, вызывающим разрыв скорости геострофического ветра на скачке температуры. Если поверхность температурного скачка  $\Delta T$  наклонена к горизонтальной плоскости под углом  $\alpha$ , то в вертикальной плоскости, проведенной через плоский угол  $\alpha$  указанного двугранного угла, горизонтальный градиент давления при переходе через температурный скачок снизу вверх испытывает приращение  $\Delta p \sin \alpha$  (рис. 4.8.1).

Если  $v$  и  $v + \Delta v$  — скорости геострофического ветра, перпендикулярные указанной вертикальной плоскости, то

$$v = \frac{1}{(\rho - \Delta\rho) f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v + \Delta v = \frac{1}{\rho f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta g^* \sin \alpha \right), \quad (4.8.1)$$

откуда (поскольку  $\Delta\rho/\rho = -\Delta T/T$ ) следует

$$\Delta v = \frac{\Delta T}{T} \left( \frac{g}{f} \sin \alpha - v \right). \quad (4.8.2)$$

Членом  $v\Delta T/T$ , характеризующим влияние разности плотностей в основном уравнении геострофического ветра (4.3.3), в реальных ситуациях можно пренебречь. Величина  $g/f$  в единицах СГС будет порядка  $10^7$ , а  $v$  — порядка  $10^3$ , так что, если  $\sin \alpha$  будет порядка  $10^{-2}$ , можно, используя приближение Буссинеска, написать

$$\Delta v_g = \frac{\Delta T}{T} \frac{g}{f} \sin \alpha. \quad (4.8.3)$$

Так как на фронте скорость геострофического ветра претерпевает скачок, то существует агеострофическая составляющая

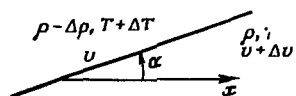
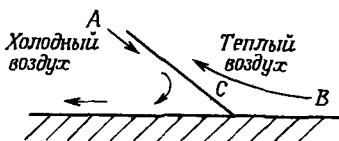
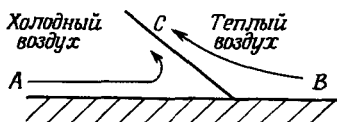


Рис 4.8.1. Положение поверхности скачка плотности  $\Delta \rho$  и скорости  $\Delta v$  по отношению к горизонту.

ветра, поэтому в воздушных массах по обе стороны фронта могут происходить движения вверх и вниз, которые могут увеличивать скачок температуры. На рис. 4.8.2 показаны движения, которые обычно происходят в вертикальной плоскости,



а



б

Рис. 4.8.2. Усиление температурных контрастов на фронте.

нормальной к фронту. Если воздух из точек  $A$  и  $B$  приходит в соприкосновение в окрестности точки  $C$ , то температурный градиент может увеличиться, а перемещающийся холодный воздух пересечет траекторию движения теплого в соответствии с механизмом, описанным в разд. 4.7.3.

В некоторых случаях движение приводит к уменьшению градиента температуры. Это часто случается вблизи холодного фронта типа рис. 4.8.2, а, так называемого *катафронта*, в котором холодный воздух нагревается при нисходящем движении. Вследствие этого агеострофический ветер в нижнем слое движется по направлению от фронта и в теплом воздухе также возникает нисходящее течение. В этом случае облачные системы (которые образуются, когда фронты вызывают циклогенез) быстро разрушаются.

Рис. 4.8.3 иллюстрирует трехмерные движения в теплом фронте тропического циклона, подобные движению, представ-



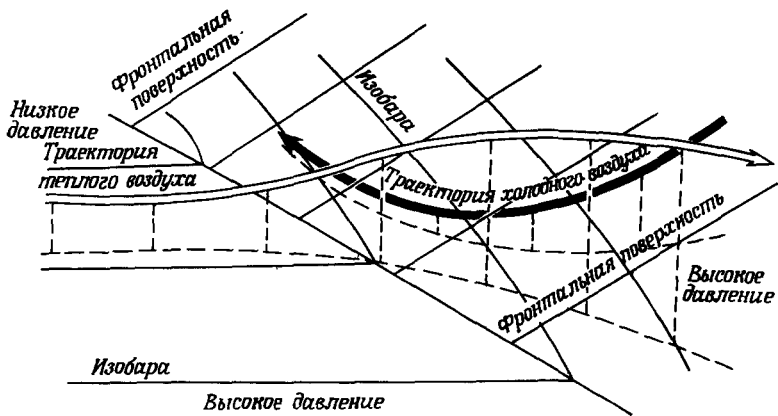


Рис. 4.8.3. Изобары в приземном слое, поверхность теплового фронта и типичные траектории: теплого воздуха — над этой поверхностью, а холодного — перед ней и ниже нее.

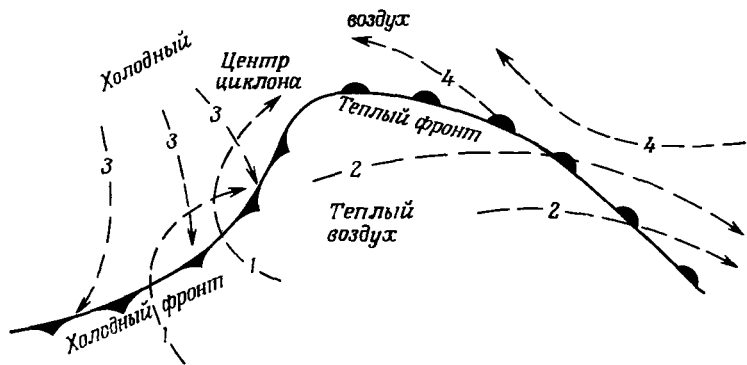


Рис. 4.8.4. Типичные траектории воздушных масс в теплом секторе циклона.

Положение фронтов показано на уровне Земли. На большей высоте теплый сектор больше. 1 — теплый воздух с более низкого уровня поднимается в холодном фронте; 2 — теплый воздух с более высокого уровня проходит над теплым фронтом; 3 — холодный воздух опускается за холодным фронтом; 4 — холодный воздух вытесняется теплым воздухом.

ленному на рис. 4.8.2, а. В холодном фронте движения будут такими же, но направленными в обратную сторону; траектории различных теплых и холодных воздушных масс показаны на рис. 4.8.4.

## 4.9. Струйные течения

Теплый воздух над фронтом подвергается воздействию термического ветра и поэтому обычно движется практически вдоль фронта так, что холодный воздух оказывается слева.

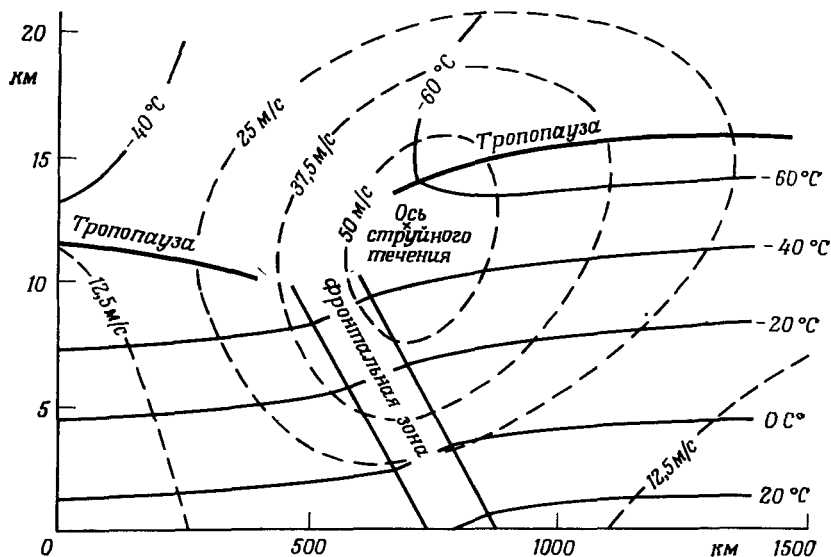


Рис. 4.9.1. Типичный масштаб и упрощенная структура струйного течения в вертикальном сечении, изотермы и изотакхи ветра, дующего в плоскость рисунка.

На рис. 4.9.1 показано сечение типичной фронтальной зоны (вертикальный масштаб значительно укрупнен). На рисунке представлены порядки величин максимума скорости ветра, а также горизонтальный и вертикальный масштабы описываемого процесса. Естественно, что конкретные случаи могут существенно отличаться от рассмотренного. Струйным течением называется зона максимальной скорости ветра. Такое резкое увеличение скорости легко воспроизводится во вращающейся массе жидкости, в которой имеются температурные градиенты. На рис. 4.9.1 фронт изображен скорее как зона больших гра-

диентов, чем зона разрыва. Это более соответствует действительности, а эффект воздействия больших градиентов оказывается таким же, как и у скачка.

Над струйным течением температурный градиент меняется на противоположный (обычно в стратосфере) и ветер убывает с высотой. Интенсивность струйного течения меняется вдоль фронта и имеет максимум к западу от центра циклона, активного во фронтальной зоне. Рис. 4.9.2 показывает типичное распределение скоростей струйного течения относительно положений теплого и холодного фронтов, движущихся много медленнее, со скоростью всего от 15 до 25 м/с. Поэтому теплый

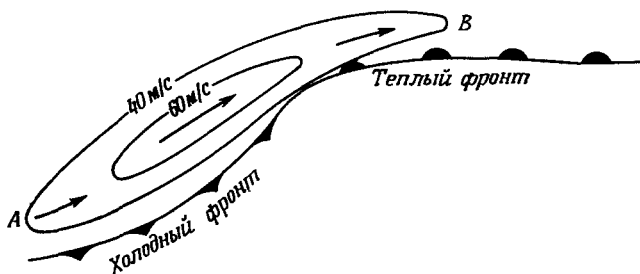


Рис. 4.9.2. Типичное положение струйного течения и распределение скоростей в нем по отношению к положению фронта в теплом секторе циклона.

Полезно интерпретировать этот рисунок в сочетании с рис 4.8.4, 4.8.5 и 4.9.1.

воздух в струйном течении догоняет циклон и ускоряется до максимума при входе в струйную зону (точка А) и замедляется на выходе из нее (точка В).

Необходимая для создания ускорения энергия получается за счет прямой циркуляции, когда холодный воздух опускается, а теплый — поднимается; при этом потенциальная энергия воздуха уменьшается. Движение в этой циркуляции — агеострофическое и по большей части объясняется «механизмом ускорения» геострофического ветра, описанным в разд. 4.7.3. На выходе из струи замедление вызывается обратной циркуляцией, когда теплый воздух опускается и движется агеострофически в сторону высокого давления: кинетическая энергия при этом преобразуется в потенциальную. Поскольку максимум скорости опускается вдоль по потоку в нижние слои, ось струи в ее начале находится обычно примерно на 1 км выше, чем в конце.

Депрессии, вопреки их унылому названию, создаются самыми восхитительными атмосферными механизмами. Общая анатомия депрессий, когда движение теплого воздуха обнаруживалось по появлению циррусов и альтокумулюсов, была известна морякам задолго до того, как депрессии стали

исследоваться пилотами, до того, как началось регулярное шаропилотное зондирование, и до того, как ученые подвергли их сколько-нибудь существенному анализу.

Конденсация облаков замедляет течение времени в депрессиях, поскольку теплый воздух может непрерывно нагреваться за счет конденсации и выпадения дождя. На Марсе, вероятно, невозможно существование циклонов, по масштабу сравнимых с земными. Венера и Юпитер окружены более глубокой атмосферой, а облака там имеют совершенно иной химический состав. Способность воды легко конденсироваться и создавать дождь, а также ее чрезвычайно высокая удельная теплота парообразования делают земную атмосферу в известном смысле уникальной. Во всяком случае, ни одна из планет Солнечной системы не имеет лишь частично покрытого облаками и столь быстро меняющегося неба.

#### 4.10. Ураганы

В разд. 7.8 и 7.10 описаны процессы, в результате которых завихренность может образовываться за счет конвективных токов в облаках. Информация об облаках изложена более детально в разд. 11.10. Отправной точкой этого рассмотрения является то, что воздушная масса уже обладает абсолютной завихренностью в силу вращения Земли. Особенностью ураганов, которая отличает их от больших циклонов, является то, что для них требуется постоянный приток тепла для поддержания циркуляции. Таким источником тепла является дождь, так как при конденсации паров воды высвобождающееся тепло передается воздушной массе, в которой происходит конденсация. Этот источник тепла существует только потому, что на уровне моря давление в центре урагана ниже, чем вокруг. Таким образом, температура в его центре на 3—5°C ниже, так как воздух, вовлекаемый в центр урагана, адиабатически расширяется. Вследствие этого там поддерживается более сильная конвекция.

Воздух, движущийся у поверхности моря по спирали к центру урагана, будет замедляться из-за трения вследствие шероховатости поверхности и больших скоростей ветра. В отсутствие трения тангенциальная скорость относительно местной системы координат возрастала бы, как  $r^{-1}$  ( $r$  — расстояние от центра урагана). Однако по данным наблюдений скорость потока при приближении к центру возрастает лишь как  $r^{-1/2}$ . Вблизи центра вращение вокруг оси, связанное с вращением Земли, вносит слабый вклад и может не учитываться. Воздух извне проникает не до самого центра урагана, а лишь до внеш-

него края так называемого «глаза бури». «Глаз бури» — это область, свободная от облаков. Воздух в нее попадает сверху из стратосферы за счет низкого давления в центре урагана. Стратосферный воздух в «глазу бури» ведет себя так же, как вода в воронке над сливом из ванны. Этот воздух очень теплый, так как исходит из стратосферы, а также и очень сухой. Однако вблизи поверхности Земли он перемешивается с окружающим воздухом и иногда содержит облака. Периферийная часть стратосферного воздуха перемешивается с облаками, окаймляющими «глаз бури», и вследствие испарения облаков охлаждается. В результате образуется мощный нисходящий каскад холодного воздуха с внутренней стороны стены облаков по периферии «глаза» (см. рис. 11.10.2). В самом же кольце облаков, окружающих «глаз бури», воздух поднимается и растекается вонне ниже тропопаузы. При этом оттоке тангенциальная скорость относительно местной системы координат убывает как  $r^{-1}$ , а на расстоянии трех или четырех радиусов «глаза бури» вращение расширяющегося облачного султана становится относительно Земли антициклональным. Это явление будет рассмотрено в разд. 11.10.

Когда воздух приближается к центру урагана, в области больших градиентов скорости, возникающих из-за быстрого увеличения тангенциальной скорости, конвективные облака вытягиваются в спиральную линию. При движении воздух охлаждается, увеличивая конвекцию, которая усиливается за счет агеострофического движения, порождающего конвергенцию, а также восходящего движения воздуха в области, к которой движется центр урагана. Небо проясняется быстрее всего в той четверти, откуда движется центр урагана.

Когда ураган проходит над сушей, его интенсивность быстро уменьшается, так как прекращается действие источника тепла. Часто безосновательно полагают, что это происходит из-за повышенного поверхностного трения над сушей, которое является важнейшей причиной заполнения центра низкого давления. Однако это предположение опровергается тем фактом, что когда холодный фронт «втягивается» в ураган в момент его движения от моря к суше, ураган будет существовать много дольше, прежде чем начнет подниматься давление в его центре. Этим иллюстрируется то важное положение, что здесь проявляется воздействие поднимающегося теплого воздуха (либо холодного воздуха за холодным фронтом, либо окружающего воздуха, который не нагревался над морем), который одновременно вызывает и конвергенцию, и интенсивное вращение. Низкое давление создается как бы понижением стратосферы в «глазу бури», вследствие чего сверху поступает теплый воздух.

Ураганы могут переродиться в среднеширотные циклоны, если они доходят до достаточно высокой широты (скажем,  $37^\circ$ ) и регенерируют за счет притока холодного фронта. Море здесь оказывается недостаточно теплым, чтобы стать источником тепла, необходимого для поддержания циркуляции урагана. Море отдает тепло преимущественно в виде скрытой теплоты испаренной воды.

В Тихом и Индийском океанах ураганы называются *тайфунами*. Общее их название — *тропические циклоны*. Они встречаются в Аравийском море, Бенгальском заливе, на западе Тихого океана и в Атлантическом океане в низких широтах. Эпизодически эти циклоны, пересекая Малайский полуостров, движутся в Индийский океан и оттуда к Бенгалии. Они известны в Северной Австралии и в Восточно-Китайском море. Сначала они движутся с востока в пассатах, но затем отклоняются вдоль восточных побережий континентов, встречаясь иногда с восточными ветрами, зарождающимися на западных побережьях Северной Америки и Японии. Временами они из Карибского моря, пересекая Центральную Америку, попадают в восточную часть Тихого океана, а из Аравийского моря доходят до Южной Америки, где являются причиной губительного нашествия саранчи.

Рис. 11.10.1 и 11.10.2 показывают типичное сечение развитого урагана и радарный снимок его вблизи побережья Флориды. Размеры урагана могут меняться очень существенно от случая к случаю, но обычно циркуляция и система облаков имеют 100—300 км в диаметре; «глаз бури» может быть от 5 до 50 км шириной; скорость ветра в центре меняется от очень малой до 7—10 м/с. Детальные описания этих драматических явлений можно найти в книгах Скорпера *Clouds of the World* и Таннехила *Hurricanes*.

Помимо сильного ветра наиболее серьезным последствием урагана является приливная волна, которая образуется, когда совпадают естественный высокий прилив и сильный ветер с моря в правой четверти приближающегося шторма. Если скорость ветра при шторме такова, что в центре шторма такая волна достигает высоты  $\sim 1$  м над обычным уровнем моря, то, падая в прибрежное мелководье, волна резко увеличивается по высоте, так что в некоторых случаях суда водоизмещением до 5000 тонн выбрасывало на сушу на 400 м от берега.

#### 4.11. Спираль Экмана

Рассмотрим случай обширной территории, над которой в каждом горизонтальном слое скорости ветра горизонтальны

и постоянны по направлению. Тогда уравнение (4.3.2) принимает вид

$$0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{v} \times \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (4.11.1)$$

Касательное напряжение (1.3.25) здесь выражено по типу вязкого напряжения через давление  $P$  и турбулентную вязкость  $K$ , умноженную на градиент скорости. Эта математическая форма удобна для представления напряжений Рейнольдса (см. разд. 7.3). Изменениями плотности  $\rho$  можно пренебречь почти всегда, за исключением тех ситуаций, когда они порождают термический ветер, который отражает изменения по вертикали горизонтального градиента давления. Градиент давления в соответствии с (4.3.4) можно представить при помощи геострофического ветра ( $u_g, v_g$ ); таким образом, выражение (4.11.1), переписанное для каждой из своих двух составляющих, приобретает вид

$$\begin{aligned} (u - u_g) f &= \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z}, \\ (v - v_g) f &= -\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.11.2)$$

Оригинальная теория Экмана относилась к движениям в океане, вызванным ветром. Тейлор применил эту теорию к атмосфере. Исследования Тейлора обобщены Брантом (1939). Принимая классические допущения о том, что термический ветер отсутствует (т. е. геострофический ветер постоянен), а  $K$  не зависит от  $z$ , можно получить решение уравнений (4.11.2) в виде

$$u + iv - (u_g + iv_g) = C e^{-(1+i) m z + i \gamma}, \quad (4.11.3)$$

где  $C$  и  $\gamma$  — действительные константы, определяемые из граничных условий. Здесь

$$m^2 = f/2K, \quad (4.11.4)$$

причем  $m$  — положительная величина. Отрицательный показатель в действительной части экспоненты выбран на том основании, что на достаточно большой высоте ветер становится равным геострофическому. Теория Тейлора была предназначена для того, чтобы можно было, измерив отклонения от изобар направления приземного ветра, получить оценку величины  $K$ , когда неизвестен даже ее порядок. В качестве граничного условия Тейлором было принято, что направления напряжений и приземного ветра совпадают. Это можно выразить, полагая  $u+iv$  параллельным  $\partial u/\partial z + i \partial v/\partial z$  при  $z=0$ . Дополнительные подробности можно найти в книге Бранта.

Уравнение (4.11.3) показывает, что вектор горизонтального ветра асимптотически стремится к геострофическому по мере возрастания  $z$  вдоль спирали. Для случая океана положительный показатель в экспоненте используется для описания течений, порожденных ветром, которые убывают по направлению вниз. Экман полагал, что на поверхности океана геострофическое течение равно 0. Это эквивалентно утверждению, что градиент давления в воздухе компенсируется чрезвычайно малым наклоном поверхности океана. В этом случае уравнение

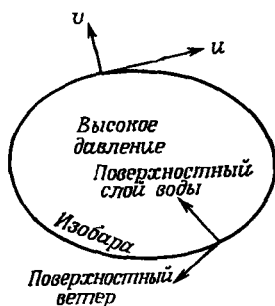


Рис. 4.11.1. Конвергенция в поверхностном слое океана под действием антициклона.

$u$  — компонента скорости ветра вдоль изобар, а  $v$  — компонента, направленная вовне (от антициклона); вода в поверхностном слое движется к центру высокого давления.

(4.11.2) принимает форму

$$U + iV = -i \frac{K \partial^2}{f \partial z^2} (U + iV). \quad (4.11.5)$$

Решение уравнения (4.11.5) имеет вид

$$U + iV = e^{(1+i) mz} (U_0 + iV_0), \quad (4.11.6)$$

где  $K$  и  $m$  — соответствующие коэффициенты для воды, а  $U_0 + iV_0$  — течение на поверхности. Таким образом, отсюда следует, что вектор скорости изменяет направление по спирали, убывая с глубиной по модулю.

Общий вектор количества движения порожденного ветром течения ориентирован в том же направлении, что и так называемое поверхностное океанское течение, а именно перпендикулярен напряжению, создаваемому ветром. Таким образом, полагая, что напряжение направлено вдоль ветра, получим, что суммарный момент перпендикулярен ветру. Поверхностное напряжение равно кориолисовой силе, действующей на течение, и противоположно ей по направлению. Отметим важное следствие этого: антициклон порождает в поверхностном течении в океане конвергенцию даже в случае, когда вблизи поверхности в воздухе имеется существенное истечение воздушных масс из области высокого давления. Этот механизм показан на рис. 4.11.1 и представляет классическое объяснение процес-



сов в Саргассовом море, которое находится в Бермудской области высокого давления. Чтобы эффект оказался существенным, антициклон должен существовать в определенной области в течение длительного времени. Только тогда соответствующее геострофическое течение в океане, которое является относительно медленным, сможет произвести заметный эффект.

Течение ветра поперек изобар из-за поверхностного сопротивления можно оценить для случая отсутствия термического ветра ( $u_g + iv_g = \text{const}$ ), проинтегрировав уравнение (4.11.2) от поверхности ( $z=0$ ) до бесконечности. Таким образом, если выбрать систему координат так, чтобы  $v_g$  равнялось 0, и оценить суммарное трансверсальное течение  $v$ , то получим

$$\int_0^{\infty} v \, dz = -\frac{1}{f} \left[ K \frac{\partial u}{\partial z} \right]_0^{\infty} = \tau_{xz} / \rho f, \quad (4.11.7)$$

где  $\tau_{xz}$  — напряжение в направлении  $x$  на поверхности. Этот результат не зависит ни от каких предположений о  $K$ . Вид уравнения (4.11.7) показывает, что напряжения на поверхности  $z=0$  можно определить по наблюдениям  $v$ , но попытки, предпринятые в этом направлении Шеппардом и другими, свидетельствуют о важности термических ветров. В действительности ветры не вращаются по спирали в соответствии с (4.11.3), а обнаруживают, что геострофический ветер существенно изменяется с высотой. Это происходит даже в области Наветренных островов, где следовало бы ожидать горизонтальной однородности из-за большой географической протяженности зоны пассатов.

Спираль Экмана в океане и спираль Тейлора в атмосфере представляют значительный теоретический интерес, так как объясняют влияние вращения Земли на движущиеся системы. Однако детали каждого конкретного случая сразу сильно осложняют анализ процесса, так что данная простая теория не позволяет получить точных количественных выводов.

## ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

## 5.1. Роль теории. Допущения, приближения, обозначения

Современный человек стремится решить как можно больше стоящих перед ним практических задач средствами математики. В каждом случае, чтобы чрезмерно не усложнять исследование, приходится делать те или иные допущения и идти на решение задачи в некотором приближении; однако обязательным является условие, чтобы принятая модель сохраняла основные черты реального явления.

Есть много оригинальных работ, в которых для решения задач используются весьма тонкие математические методы, однако лишь в редких случаях они приводят к полному совпадению предсказаний теории с известными наблюдаемыми (в натуральных условиях) или экспериментальными (т. е. получаемыми в лабораториях) фактами. Например, чтобы изучить структуру установившегося течения, можно представить себе, что оно начинается из состояния покоя, и попытаться выяснить, каким оно станет по истечении большого промежутка времени. Этот метод был использован для выявления характера течения на больших высотах и вблизи препятствий. Нет и, наверное, не может быть каких-либо наблюдаемых фактов, которые служили бы обоснованием правильности такого подхода. Более того, этим приемом нельзя пользоваться на практике как средством анализа, помогающим понять результаты наблюдений; он также не позволяет детально рассчитать обтекание реальной горы, так как в каждом конкретном случае доминирующими оказываются другие факторы. Тем не менее изучению течений на больших высотах теоретики в области физики атмосферы уделяли больше внимания, чем каким-либо другим задачам. Конечно, многие считают эту задачу решенной, хотя реальная атмосфера никогда полностью не соответствует принятым моделям. Действительно, почти всем реальным ситуациям присущи такие особенности, как наличие уровня с нулевой скоростью ветра, что делает невозможным их изучение средствами современной математики.

Очень большой трудностью, которая встречается на практике, является чрезвычайно сложная форма гор и исключи-

тельное непостоянство воздушных течений. Поэтому на первый взгляд кажется целесообразным сосредоточить усилия на разработке теории, которая позволяла бы рассчитывать обтекание тел любой заданной формы любым потоком. Однако это трудно сделать даже в двумерном случае для простых течений. В действительности же большую часть гор нельзя считать двумерными, а для расчета произвольных трехмерных течений не годятся даже лучшие из известных методов. Поэтому их нельзя считать по-настоящему полезными, так как с их помощью не удастся предсказать, каковы будут воздушные течения сегодня или завтра. Однако многие механизмы, определяющие реальные процессы, можно понять, изучая те частные теоретические случаи, в которых они доминируют.

Если бы и можно было применять для повседневных нужд более сложные методы расчетов, их эффективность была бы также низка. Причина в том, что различие между действительностью и теоретической абстракцией заключается в существенной нестационарности действительных течений, а также в том, что поток нередко отрывается от поверхности; особенно часто это происходит на подветренной стороне крутых препятствий, т. е. именно там, где расчет течения, если бы его удалось провести, был бы особенно полезен. Плавучесть, создаваемая облаками, переменность ветра и распределения температуры в течение суток, а также множество других не поддающихся алгоритмизации факторов, являющихся причиной возникновения различных видов турбулентности, мешают получить точные количественные оценки.

В этой ситуации источником удовлетворения служит то обстоятельство, что и простая теория позволяет весьма глубоко проникнуть в сущность реальных механизмов. Именно на таких более простых математических аспектах будет сосредоточено наше внимание. Важно также отдавать себе отчет, что высокая точность результатов расчета не всегда нужна, а затрата средств на ее получение может быть неоправданной. На своем жизненном пути мы преуспеваем обычно за счет большого «запаса прочности», который практически никогда не исчерпывается, и у нас имеется масса других дел и развлечений, не позволяющих глубоко вникнуть в количественную оценку быстролетных событий, участниками которых мы являемся. Усилия, затрачиваемые на сбор информации и выполнение точных расчетов всего, что мы делаем и испытываем, были бы пустой тратой времени, и по этой причине многое, возможное теоретически, никогда не будет сделано. Абсолютным критерием является понимание мира, в котором мы живем, и умение в нем жить, а не способность предсказывать происходящие в нем события или управлять им.

За исключением особо оговоренных случаев, мы будем изучать стационарные, адиабатические или несжимаемые, двумерные ( $\partial/\partial y=0$ ) течения невязкой жидкости, прямолинейное горизонтальное движение которых над ровной поверхностью возмущается прохождением над тем или иным препятствием. Невозмущенное, или начальное, состояние будем обозначать индексом 0. Таким образом,  $u_0$  — это скорость, которой обладает частица, находящаяся на линии тока далеко вверх по течению от препятствия. В случае адиабатического (или несжимаемого) течения  $\tau$  (или  $\rho$ ) постоянно вдоль линии тока и равно  $\tau_0$  (или  $\rho_0$ ).

Будем считать, что скорость и завихренность могут быть представлены в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v, \omega); \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(u_0, v_0, 0); \quad \omega = \omega(\xi, \eta, \zeta);$$

$$\omega_0 = \omega_0\left(-\frac{\partial v_0}{\partial z_0}, \frac{\partial u_0}{\partial z_0}, 0\right). \quad (5.1.1)$$

В потоке, который не изменяется в направлении  $y$ , нет градиентов давления или других сил (кроме силы Кориолиса в некоторых частных случаях), действующих в этом направлении, и поэтому всюду

$$v = v_0. \quad (5.1.2)$$

Это означает, что каждая поверхность Бернулли имеет свою скорость в направлении  $y$ . В силу своей неизменности она не влияет на другие компоненты движения. Поэтому  $v_0$  будет отсутствовать в наших уравнениях динамики, и к любому результату, полученному при  $\partial/\partial y=0$ , можно прибавить  $v_0(z)$ . Подобным же образом в наших выкладках будут отсутствовать компоненты завихренности  $\xi$  и  $\zeta$ .

Условие неразрывности течения между двумя поверхностями Бернулли требует, чтобы (рис. 5.1.1)

$$\rho_0 u_0 dz_0 = \rho u dz = -\rho \omega dx, \quad (5.1.3)$$

или в другом виде

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} u_0 \frac{\partial z_0}{\partial z}, \quad \omega = -\frac{\rho_0}{\rho} u_0 \frac{\partial z_0}{\partial x}. \quad (5.1.4)$$

Поэтому

$$\mathbf{grad} z_0 = \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}, 0, \frac{\partial z_0}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\rho_0 u_0} (-\omega, 0, u) = \frac{\rho}{\rho_0 u_0} \mathbf{v} \times \mathbf{j}, \quad (5.1.5)$$

где

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(0, 1, 0). \quad (5.1.6)$$

Если  $n$  — расстояние, измеряемое по нормали к поверхностям Бериулли, на которых  $z_0 = \text{const}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_0} &= \frac{\partial n}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\text{grad } z_0} \frac{\text{grad } z_0 \cdot \text{grad}}{\text{grad } z_0}, \quad \text{где } \text{grad } z_0 = |\text{grad } z_0| = \\ &= \frac{1}{(\text{grad } z_0)^2} \text{grad } z_0 \cdot \text{grad}, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z_0} = \frac{\rho_0 u_0}{\rho q_1^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \cdot \text{grad}. \quad (5.1.8)$$

Форма (5.1.7) применима для любого стационарного движения,

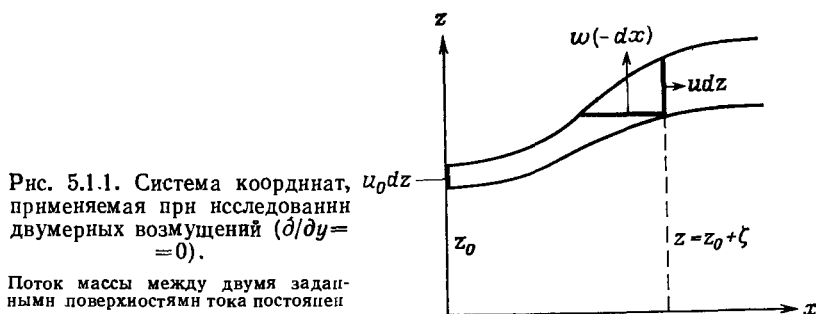


Рис. 5.1.1. Система координат, применяемая при исследовании двумерных возмущений ( $\partial/\partial y = 0$ ).

Поток массы между двумя заданными поверхностями тока постояен

а (5.1.8) — для двумерного случая, когда

$$q_1^2 = u^2 + w^2 \quad (5.1.9)$$

и

$$\text{grad } q_1^2 = \text{grad } q^2.$$

## 5.2. Уравнение стационарного движения

В случае течения невязкой жидкости уравнение завихренности (1.4.1) имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega \text{div } \mathbf{v} + (\omega \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{f}), \quad (5.2.1)$$

а уравнение неразрывности для установившегося движения

$$\rho \text{div } \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho. \quad (5.2.2)$$

Для двумерных течений, которые мы рассматриваем,  $v$ , проекция скорости на ось  $y$ , имеет градиент только в направлении нормали к поверхностям тока, которые содержат  $\omega$ . Следовательно, второй член в правой части уравнения (5.2.1) не дает

проекция на ось  $y$ . С помощью уравнения (5.2.2) проекцию уравнения (5.2.1) на ось  $y$  при установившемся движении можно представить в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \eta - \frac{\eta}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = [\mathbf{R} \times (\mathbf{g} - \mathbf{grad} \frac{1}{2} q^2) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}]_y. \quad (5.2.3)$$

Но

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dz_0} \mathbf{grad} z_0 = -\beta \mathbf{grad} z_0, \quad (5.2.4)$$

причем вектор  $\mathbf{R}$  параллелен  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ . (Совершенно аналогичное уравнение получается для течения несжимаемой жидкости, если  $\tau$  заменить на  $\rho$ .) Поскольку  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho_0 = 0$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \eta \right) &= \frac{\eta \rho_0}{\rho^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \eta = \\ &= \left[ \frac{\rho_0}{\rho} \beta \mathbf{grad} z_0 \times \mathbf{grad} (gz + \frac{1}{2} q^2) \right]_y = \\ &= \left[ \frac{\beta}{u_0} (\mathbf{v} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{grad} (gz + \frac{1}{2} q^2) \right]_y = \\ &= \frac{\beta}{u_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (gz + \frac{1}{2} q^2) = \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left[ \frac{\beta}{u_0} (gz + \frac{1}{2} q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

так как величина  $\beta/u_0$  постоянна вдоль линии тока и, следовательно, может быть внесена под знак оператора  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$ . Следовательно, вдоль линии тока

$$\frac{\rho_0}{\rho} \eta - \frac{\beta}{u_0} (gz + \frac{1}{2} q^2) = \text{const}. \quad (5.2.6)$$

Если жидкость несжимаемая, то  $\rho_0 = \rho$ , и это уравнение несколько упрощается.

Значение константы в уравнении (5.2.6) легко получить, если вывести его другим способом. В уравнении (1.7.4) вдоль линии тока

$$gH = \frac{1}{2} q^2 + \frac{\bar{\omega}}{\tau} + gz = \text{const}, \quad (5.2.7)$$

а уравнение движения имеет вид

$$\mathbf{grad} (gH) = \frac{\bar{\omega}}{\tau} \mathbf{grad} \frac{1}{\tau} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (5.2.8)$$

Согласно уравнению (5.1.7),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_0}(gH) &= \frac{1}{(\text{grad } z_0)^2} \text{grad } z_0 \cdot \text{grad } (gH) = \\ &= \frac{\bar{\omega}}{\tau} \tau \frac{d}{dz_0} \frac{1}{\tau} + \frac{\rho_0 u_0}{\rho q^2} \mathbf{v} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{\bar{\omega}}{\tau} \beta + \frac{\rho_0 u_0}{\rho} \eta, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

так как составляющая  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ , нормальная к  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{j}$ , равна  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\eta}$ , и, следовательно,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \times \boldsymbol{\eta} = q^2 \eta. \quad (5.2.10)$$

Поэтому, подставив  $\bar{\omega}/\tau$  из уравнения (5.2.7) в (5.2.9), исключим давление и получим выражение, эквивалентное уравнению завихренности,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_0}(gH) &= \beta(gH - 1/2 q^2 - gz) + \frac{\rho_0 u_0}{\rho} \eta \quad \text{и} \\ \frac{\rho_0}{\rho} \eta - \frac{\beta}{u_0} (1/2 q^2 + gz) &= \frac{1}{u_0} \left[ \frac{d}{dz_0}(gH) - \beta gH \right] = \frac{1}{u_0 \tau} \frac{d}{dz_0}(gH \tau). \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Последняя комбинация постоянна вдоль линии тока, так как полностью определяется значениями переменных на большом расстоянии вверх по потоку ( $\beta = \beta_0$ ,  $\tau = \tau_0$ ). В соответствующем уравнении для несжимаемой жидкости в левой части  $\rho = \rho_0$ , а в правой  $\tau$  заменяется на  $\rho$ . Тогда имеем

$$\eta - \frac{\beta}{u_0} (1/2 q^2 + gz) = \frac{1}{u_0 \rho} \frac{d}{dz_0} (\rho gH). \quad (5.2.12)$$

В уравнении (5.2.11)  $H$  и  $\tau$  [а в уравнении (5.2.12)  $H$  и  $\rho$ ] постоянны вдоль линии тока.

Таким образом, мы получили значение константы в уравнении (5.2.6). В основе полученных результатов лежит теорема об изопикнической завихренности (разд. 1.5), и они справедливы лишь в том случае, если вектор завихренности в потоке лежит на поверхностях постоянной плотности. В противном случае мы не могли бы заменить  $\boldsymbol{\omega}$  на  $\boldsymbol{\eta}$  и получить уравнение (5.2.10).

Уравнение (5.2.6) справедливо лишь для двумерного движения, так как только в этом случае поле скоростей, как и поле плотностей, определяется положением поверхностей Бернулли.

### 5.3. Уравнение движения в трехмерном случае

В трехмерном случае вместо уравнения (5.2.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_0}(gH) &= \frac{d}{dz_0} \frac{1}{\tau} + \frac{\mathbf{grad} z_0 \cdot \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}}{(\mathbf{grad} z_0)^2} = \\ &= \beta(gH - 1/2q^2 - gz) + \frac{|\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}|}{|\mathbf{grad} z_0|}, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

так как, согласно теореме (1.5),  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  параллельно  $\mathbf{grad} z_0$  всюду, если это условие выдерживается хотя бы в одной точке каждой линии тока. Поэтому

$$\frac{|\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}|}{|\mathbf{grad} z_0|} - \beta(1/2q^2 + gz) = \frac{1}{\tau} \frac{d}{dz_0}(gH\tau) = \text{const} \quad (5.3.2)$$

на поверхности тока (т. е. на поверхности Бернулли). В этой форме уравнение выглядит обманчиво простым. Однако чтобы пользоваться им, надо одновременно привлекать уравнение неразрывности. Так как это связано с большими трудностями, то маловероятно, чтобы кто-нибудь попытался это сделать. Это связано с трудностями задания граничных условий для среды, в которой могут распространяться волны, аналогичные изучаемому движению.

### 5.4. Волновое уравнение для установившегося двумерного движения несжимаемой стратифицированной жидкости

В этом случае  $\rho = \rho_0$ , и мы можем воспользоваться уравнением (5.1.4), чтобы выразить скорость и завихренность через  $z_0$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( u_0 \frac{\partial z_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{du_0}{dz_0} (\nabla z_0)^2 + u_0 \nabla^2 z_0, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

$$q^2 = u_0^2 (\nabla z_0)^2. \quad (5.4.2)$$

Тогда уравнение (4.2.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{u_0} - \frac{\beta}{u_0^2} (1/2q^2 + gz) &= \nabla^2 z_0 + \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dz_0} (\nabla z_0)^2 - \\ &- \frac{\beta}{u_0^2} [1/2u_0^2 (\nabla z_0)^2 + gz] = \nabla^2 z_0 (\alpha - 1/2\beta) (\nabla z_0)^2 - \\ &- \frac{g\beta z}{u_0^2} = \text{const} \text{ вдоль линии тока.} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$



Здесь

$$\alpha = \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dz_0} \quad (5.4.4)$$

— завихренность невозмущенного потока. Поэтому выражение

$$\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{d}{dz_0} (\ln u_0 + \frac{1}{2} \ln \rho) = \frac{d}{dz_0} \ln (\rho^{1/2} u_0) = S \quad (5.4.5)$$

представляет полную стратификацию течения за счет градиентов плотности и сдвиговых напряжений.

Удобно ввести в это уравнение величину смещения жидкости  $\zeta$ , определяемую выражением

$$z_0 = z - \zeta. \quad (5.4.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla z_0 &= \nabla z - \nabla \zeta = \left( -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, 1 - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\ (\nabla z_0)^2 &= 1 - 2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\nabla \zeta)^2, \quad \nabla^2 z_0 = -\nabla^2 \zeta, \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

а уравнение (4.4.3) приобретает вид

$$\nabla^2 \zeta - (\alpha - \frac{1}{2}\beta) \left[ 1 - 2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\Delta \zeta)^2 \right] + \frac{g\beta}{u_0^2} \zeta = \text{const на линии тока.} \quad (5.4.8)$$

В частности

$$\nabla^2 \zeta + (\alpha - \frac{1}{2}\beta) \left[ 2 - \frac{\partial \zeta}{\partial z} - (\nabla \zeta)^2 \right] + \frac{g\beta}{u_0^2} \zeta = 0 \quad (5.4.9)$$

в случае, когда невозмущенный поток горизонтален,  $\zeta$  и ее производные равны нулю и постоянная в уравнении (5.4.8) равна  $-\alpha + \frac{1}{2}\beta$ . Ламб [§ 235, уравнение (12)] дал это уравнение в линеаризованной форме, когда  $\alpha = 0$ .

## 5.5. Практические приближения

В тех случаях, когда на плотностную стратификацию существенное влияние оказывает сила тяжести, первый и последний члены в уравнении (5.4.9) играют большую роль. Например, возможен случай, когда  $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ , и может развиться волновое движение. Рассмотрим теперь член, содержащий  $\frac{1}{2}\beta$ , и отметим, что, видимо, возможны случаи, когда завихренность  $\alpha$  достаточно велика, чтобы играть значительную роль, так как

она может быть сколь угодно большой при достаточно большом градиенте скорости.

Если линия тока имеет вертикальную касательную, то производная  $\partial\zeta/\partial z$  равна единице и  $(\nabla\zeta)^2$  имеет тот же порядок величины, что и  $\zeta\nabla^2\zeta$ . Если длина волны равна  $2\pi/k$ , то, сравнивая первый и последний члены уравнения (5.4.9), оба существенные в случае гравитационных волн, можно видеть, что  $k^2$  по порядку величины равно  $g\beta/u_0^2$ . Член, содержащий  $1/2\beta$ , имеет сравнимую величину только в том случае, если  $\beta$  или  $1/2\beta\zeta^2k^2$  сравнимо с  $g\beta\zeta/u_0^2$ . Это равнозначно требованию, чтобы  $u_0^2$  было сравнимо с  $g\zeta$ , что вряд ли возможно для волн с достаточно большой амплитудой, так как течение вряд ли где-либо может быть вертикальным. Сравнивая первый член уравнения (5.4.9) с  $\beta(\nabla\zeta)^2$ , можно видеть, что второй член существен только при величине  $\beta\zeta$ , сравнимой с единицей. Это означает, что смещение должно быть сравнимым с высотой, на которой плотность (или потенциальная температура) убывает (возрастает) в  $e^{-1}$  раз. (Эту высоту часто называют *масштабом высоты*.) В действительности  $\beta\zeta$  приблизительно равна  $\Delta\rho/\rho$ , и аномалии плотности составляют небольшую долю самой плотности. В случае атмосферы  $\beta$  имеет порядок  $10^{-2}$  км $^{-1}$ , и, следовательно, чтобы член, содержащий  $\beta$ , был существенным, смещение должно быть порядка 100 км.

Пренебрегая этим членом, приходим к приближению Буссинеска (см. разд. 2.12), так как члены, содержащие  $\beta$ , но не содержащие  $g$ , получаются из члена  $\mathbf{R}\times\mathbf{f}$  в уравнении завихренности. В качестве вывода отметим, что ускорения, создаваемые силами плавучести, которые в свою очередь порождаются аномалиями плотности  $\Delta\rho \ll \rho$ , малы по сравнению с ускорением силы тяжести. Вариации плотности слабо влияют на инертную массу жидкости, но их влияние через изменение веса объемов жидкости может быть велико.

Другой подход состоит в том, что коэффициенты в уравнении (5.4.9) полагают постоянными, а смещения считают достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь нелинейным членом  $(\nabla\zeta)^2$ . В этом случае можем записать

$$\xi = e^{S^z}\zeta, \quad (5.5.1)$$

где

$$S = \alpha - 1/2\beta. \quad (5.5.2)$$

Тогда уравнение (5.4.9) приобретает вид

$$\nabla^2\xi + \left( \frac{g^2}{u_0^2} - S^2 \right) \xi = 0. \quad (5.5.3)$$

При  $\alpha=0$  член, содержащий  $\beta$ , но не содержащий  $g$ , существен только в том случае, если величина  $1/4\beta$  сравнима с  $g/u_0^2$ . Это условие на практике никогда не выполняется, так как масштаб высоты всегда много больше той высоты, при свободном падении с которой достигается скорость  $u_0$ .

В практически важных случаях градиенты скорости, выраженные через  $\alpha$ , могут играть гораздо бóльшую роль, чем градиенты плотности, выраженные через  $\beta$ . При этом, однако, надо иметь в виду, что создавать и поддерживать разрывы плотности гораздо легче, чем разрывы скорости. Разрывы плотности рассматриваются в разд. 5.8.

Если величиной  $S$  можно пренебречь в уравнении (5.5.3), то ею можно пренебречь и в уравнении (5.5.1), а это эквивалентно пренебрежению величиной  $\beta$  в уравнении (5.4.9). Подстановка (5.5.1) иногда применялась для получения уравнения вида (5.5.3), с которым удобнее работать, чем с уравнением (5.4.9). Это возможно лишь в том случае, если величина  $S$  постоянна по всей глубине рассматриваемой среды. Если решение уравнения (5.4.9) ищут в виде  $\exp i(Sz+kx)$ , то оказывается, что в любом диапазоне значений  $k$  нет ни одного решения, которое стремилось бы к нулю при больших  $z$ . Причиной этого является наличие члена, содержащего  $\beta(\partial \xi / \partial z)$ , который даже колебательные решения делает пропорциональными  $\exp(1/2\beta z)$ . В результате, если волны развиваются в атмосфере с  $\alpha=0$ , а  $\beta$  и  $u_0$  одинаковы на всех высотах, то амплитуда должна быть большой на больших высотах. Однако волновой процесс должен существовать достаточно долго для того, чтобы можно было пользоваться стационарным решением. Конечно, длинные волны, создаваемые полусуточными приливами в атмосфере, действительно имеют очень большую амплитуду на высотах около 80 км, но здесь они не рассматриваются. Если  $\alpha > 1/2\beta$ , затруднение исчезает. Смысл этого в том, что флуктуации давления, необходимые для затухания волн в атмосфере, могут происходить только тогда, когда амплитуда волны в слоях очень малой плотности на больших высотах весьма велика. Однако резкое увеличение скорости с высотой уменьшает амплитуду, так как увеличение скорости движения жидкости эквивалентно повышению ее плотности. Это хорошо видно из уравнения (5.4.5), согласно которому вариации скорости могут породить вариации  $\rho^{1/2}u_0$ , не уступающие по величине вариациям плотности.

В следующем разделе будет показано, что член, содержащий  $\beta$ , не создает существенных затруднений по сравнению с эффектами сжимаемости в атмосфере.

## 5.6. Волновое уравнение для сжимаемой атмосферы

Воспользовавшись полным уравнением неразрывности (5.1.4) вместо уравнений (5.4.1) и (5.4.2), для случая сжимаемой атмосферы получим

$$\eta = \frac{\rho_0}{\rho} \left[ \frac{du_0}{dz_0} (\nabla z_0)^2 + u_0 \nabla^2 z_0 \right] + u_0 \left[ \frac{\partial z_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (5.6.1)$$

$$q^2 = \frac{\rho_0^2}{\rho^2} u_0^2 (\nabla z_0)^2, \quad (5.6.2)$$

откуда с учетом уравнения (5.2.6) следует

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \left[ \frac{du_0}{dz_0} (\nabla z_0)^2 + u_0 \nabla^2 z_0 \right] + \frac{\rho_0}{\rho} u_0 \left[ \frac{\partial z_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\rho_0}{\rho} - \\ & - \frac{\beta_0}{u_0} \left[ \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} u_0^2 (\nabla z_0)^2 + gz \right] = \text{const вдоль линии тока.} \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

Обратимся теперь к уравнениям (5.4.6) и (5.4.7). Полагая смещения адиабатическими, уравнение (1.8.7) можем записать в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{g}{c^2} \zeta. \quad (5.6.4)$$

Это уравнение справедливо для смещений, которые малы по сравнению со слоем атмосферы толщиной 30 км. Тогда получим

$$\begin{aligned} & - \left( 1 + 2 \frac{g}{c^2} \zeta \right) \nabla^2 \zeta + (\alpha - 1/2\beta) \left( 1 + 2 \frac{g}{c^2} \zeta \right) \left[ (\Delta \zeta)^2 - 2 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{g}{c^2} \left( 1 + \frac{g}{c^2} \zeta \right) \left[ \left( 1 - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{g^2}{u_0^2} \zeta = 0. \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

Левая часть этого уравнения постоянна для каждой линии тока. Эта константа была положена равной нулю на основании предположения, что в потоке найдется место, где течение является невозмущенным и направлено по горизонтали, так что  $\zeta$  и ее две первые производные равны нулю. Мы пренебрегли также членами, содержащими квадраты  $g\zeta/c^2$ .

В атмосфере  $\beta$  и  $g\zeta/c^2$  имеют соответственно порядок  $10^{-7}$  и  $10^{-6}$  см $^{-1}$ . Следовательно, даже при  $\alpha=0$  членом, содержащим  $\beta$  без  $g$ , можно пренебречь. Физически это означает, что сжимаемость сильнее влияет на изменение массы единицы объема воздуха, чем стратификация. В практически важных случаях завихренность  $\alpha$  может играть важную роль, и поэтому

ее, вообще говоря, надо удерживать, однако по той же причине, по которой мы пренебрегаем членом, содержащим  $\beta$ , но не содержащим  $g$ , обычно можно пренебречь и большей частью членов, содержащих  $g/c^2$ .

Если положить  $[1+2(g/c^2)\zeta]^{-1}=1-2(g/c^2)\zeta$  и пренебречь членами, содержащими  $g^2/c^4$ , по сравнению с  $g\beta/u_0^2$ , то из уравнения (5.6.5) получается

$$\nabla^2\zeta - \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{g}{c^2}\right) (\nabla\zeta)^2 + \left(2\alpha - \beta - \frac{g}{c^2}\right) \zeta \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{g\beta}{u_0^2} \zeta \left(1 - 2\frac{g}{c^2}\zeta\right) = 0. \quad (5.6.6)$$

Так как средние члены здесь обычно можно отбросить (за исключением тех, которые содержат  $\alpha$ ), то видно, что основное влияние сжимаемости определяется последним членом. Член, содержащий  $\zeta^2$ , сравним с членом, содержащим  $\zeta$ , при  $\zeta$  порядка 5 км в атмосфере. Таким образом, применительно к атмосфере последнее уравнение можно переписать в виде

$$\nabla^2\zeta + \alpha \left[2 \frac{\partial\zeta}{\partial z} - (\nabla\zeta)^2\right] + \frac{g\beta}{u_0^2} \zeta \left(1 - 2\frac{g}{c^2}\zeta\right) = 0. \quad (5.6.7)$$

## 5.7. Уравнение неразрывности для сжимаемой атмосферы

Излагаемые ниже результаты в равной мере справедливы и для случая вращающейся Земли. Вращение представляется вектором  $\mathbf{f}$ , а уравнение движения приобретает вид (см. разд. 4.3)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{f}, \quad (5.7.1)$$

так что

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } p = -\rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = -\rho \frac{d}{dt} \frac{1}{2} q^2 - g\rho w, \quad (5.7.2)$$

где  $w$  — вертикальная составляющая скорости. В случае адиабатического движения

$$\frac{d\rho}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (5.7.3)$$

а уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div } \mathbf{v}. \quad (5.7.4)$$

Из этих трех уравнений получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{d}{dt} \frac{1}{2} q^2 + g w \right]. \quad (5.7.5)$$

Член, в который входит  $\partial p / \partial t$ , пренебрежимо мал по сравнению с членом, содержащим  $g$ , так как при локальной скорости изменения давления 1 мбар/мин, которая может быть превышена лишь при прохождении резко выраженного атмосферного фронта или торнадо, эти два члена сравнимы, если вертикальная составляющая скорости равна всего 15 см/с. Это очень мало по сравнению с той скоростью, которая возникла бы, если бы изменения давления были столь велики. Следовательно, вертикальное смещение воздуха в поле гидростатического давления создает на практике гораздо большую дивергенцию, чем локальные изменения давления. Член  $\frac{1}{2} q^2$ , стоящий под знаком полной производной, определяет изменения давления, которые имеют место при ускорении воздушных масс и также составляют 1–2 мбар для всех интересующих нас полей течения. Ими можно пренебречь, так как они соответствуют вертикальному смещению от 10 до 20 м, которое много меньше, чем в интересных с точки зрения динамики случаях. Таким образом, уравнение неразрывности приобретает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{g}{c^2} w. \quad (5.7.6)$$

Оно показывает, что единственной важной причиной расширения элементарных объемов воздуха (часто называемых «воздушными частицами») является их вертикальное перемещение в поле давления, создаваемом силой тяжести.

## 5.8. Волны малой амплитуды и влияние вращения Земли

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями малых возмущений  $(u, v, w)$ ,  $\tau$ ,  $\bar{\omega}$  относительно невозмущенного потока  $(U, V, 0)$ ;  $\tau_0$  и  $\bar{\omega}_0$ , в котором все невозмущенные величины являются функциями  $z$ . Произведениями малых величин будем пренебрегать. Так как волны большой амплитуды определяются другими эффектами, то вращением Земли также можно пренебречь, а там, где оно будет учитываться, применим метод малых возмущений. Задаче о волнах большой амплитуды с учетом вращения до сих пор не уделялось достаточного внимания.

Условие адиабатического состояния имеет вид

$$\frac{d\tau}{dt} = 0, \quad (5.8.1)$$

а уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \text{grad } \bar{\omega} + \mathbf{g} + \mathbf{v} \times \mathbf{f}. \quad (5.8.2)$$

Примем, что амплитуда волнового движения пропорциональна  $e^{ikx}$ , так что для возмущений

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik, \quad (5.8.3)$$

а во всех других случаях  $\partial/\partial x$  равна нулю. Рассматриваемое движение будем считать двумерным, так как именно это ограничение позволяет представить решение в виде, содержащем множитель  $e^{i\mu y}$ . Оно дает волны Кельвина, распространяющиеся вдоль стенки, оказывающей на жидкость давление, противодействующее отклоняющей силе. Такие волны могут распространяться в море вдоль береговой линии или вдоль глубинного разрыва сплошности, но они представляют собой весьма специфическое явление, которое мы не будем рассматривать. Подобные волны могут, вероятно, возникать и в атмосфере при движении воздушных масс вдоль горных хребтов, однако распространяющиеся устойчивые волны, не стационарные относительно земли, не играют значительной роли в атмосфере. Некоторые волновые процессы, в которых не проявляется влияние вращения, описываются далее в этой главе, но они никогда не рассматривались как волны Кельвина в атмосфере. Чтобы невозмущенный поток находился в состоянии геострофического равновесия, величина  $\bar{\omega}_0$  должна, конечно, меняться в направлении  $y$ . Таким образом, уравнения невозмущенного движения имеют вид

$$-\frac{1}{\tau_0} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x} + Vf = 0, \quad (5.8.4)$$

$$-\frac{1}{\tau_0} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial y} - Uf = 0, \quad (5.8.5)$$

$$-\frac{1}{\tau_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} - g = 0. \quad (5.8.6)$$

Здесь мы пренебрегли горизонтальными составляющими угловой скорости вращения Земли  $\mathbf{f}$ , так как их влияние на изучаемые явления незначительно. Будем рассматривать  $f$  как вертикальную составляющую  $\mathbf{f}$ , которая в горизонтальном направлении изменяется незначительно, и наши выводы, следовательно,

не пригодны для областей, охватывающих большой диапазон широт.

В полном виде проекция уравнения (5.8.2) на вертикаль выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} (\tau_0 + \tau) \left[ (U + u) \frac{\partial}{\partial x} + (V + v) \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial z} \right] \omega = \\ = - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}) - g(\tau_0 + \tau). \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

Вычитая из этого уравнения выражение (5.8.6), пренебрегая членами второго порядка малости, соответствующими возмущениями, и обозначая штрихом частные производные по  $z$ , получаем

$$\tau_0 ikU\omega + \bar{\omega}' + g\tau = 0. \quad (5.8.8)$$

Аналогичным образом для проекций уравнения (5.8.2) на оси  $x$  и  $y$  имеем

$$\tau_0 ikUu + \tau_0 U'w + ik\bar{\omega} - \tau_0 fv = 0 \quad (5.8.9)$$

и

$$ikUv + V'w + fu = 0. \quad (5.8.10)$$

Условие адиабатичности (5.8.1) и уравнение неразрывности (5.7.6) соответственно приобретают вид

$$ikU\tau + \tau_0'w = 0, \quad (5.8.11)$$

$$iku + w' - \frac{g}{c^2} w = 0. \quad (5.8.12)$$

Из трех последних уравнений величины  $v$ ,  $\tau$  и  $u$  можно выразить через  $w$ . Тогда уравнение (5.8.9) позволяет выразить  $\bar{\omega}$  через  $w$ :

$$\begin{aligned} ik\bar{\omega} = \tau_0 U \left[ \frac{g}{c^2} w - w' \right] + \tau_0 U'w + \tau_0 f \times \\ \times \left[ \left( \frac{V'}{ikU} - \frac{fg}{k^2 U c^2} \right) w + \frac{f_1}{k^2 U} w' \right]. \end{aligned} \quad (5.8.13)$$

Это уравнение можно продифференцировать по  $z$  и исключить из него  $\bar{\omega}$  при помощи уравнения (5.8.8). В результате получим приведенное ниже уравнение (5.8.16), в котором использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{U'}{U}, \quad \beta = -\frac{\tau_0'}{\tau_0}, \quad \alpha_1 = \frac{V'}{U}, \quad \beta_1 = \frac{T'}{T}, \\ F^2 = \frac{f^2}{k^2 U^2}, \end{aligned} \quad (5.8.14)$$

$$c^2 = \gamma RT, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{g}{c^2} = -\beta_1 \frac{g}{c^2}. \quad (5.8.15)$$



Эти величины представляют собой основные характеристики невозмущенного физического состояния. Величины  $\alpha$  и  $\alpha_1$  могут быть одного порядка; их значения для атмосферы лежат в диапазоне от нуля до  $10^{-5}$  см $^{-1}$ , хотя для тонких слоев они могут достигать  $10^{-2}$  см $^{-1}$ , а в ситуациях, ведущих к образованию облачных валов, на короткое время и  $10^{-1}$  см $^{-1}$ . Величина  $\beta_1$  имеет тот же порядок, что и  $\beta$ , которая изменяется от  $10^{-7}$  см $^{-1}$  вблизи земной поверхности до вчетверо большей величины в стратосфере или в тонких слоях. Отношение  $g/c^2$  равно приблизительно  $10^{-6}$  см $^{-1}$ , а  $f$  в средних широтах составляет около  $4 \cdot 10^{-5}$  с $^{-1}$ .

Исключая все переменные, кроме  $\omega$ , получаем

$$(1 - F^2) \omega'' - \left[ \frac{g}{c^2} + \beta - F^2 \left( \alpha + \beta + \frac{g}{c^2} \right) - iF\alpha \right] \omega' + \\ + \left\{ \frac{g\beta}{U^2} - \frac{U''}{U} - k^2 + \alpha \left( \beta - \frac{g}{c^2} \right) + \frac{g}{c^2} (\beta + \beta_1) - \right. \\ \left. - iF \left[ \alpha_1 (\beta + \alpha) - \frac{V''}{U} \right] - F^2 \frac{g}{c^2} (\alpha + \beta - \beta_1) \right\} \omega = 0. \quad (5.8.16)$$

Всеми членами, содержащими  $F$ , можно пренебречь, если  $F$  не равно по порядку величины единице. В последнем случае время перемещения на расстояние, равное длине волны, составляет около суток. Если же это время равно лишь небольшой части суток, то вращение Земли можно не учитывать. Это важный результат, который, помимо устойчивых волн, применим к широкому классу явлений и, в частности, к явлениям, обусловленным конвекцией. В других местах этой книги отмечается, что геострофические силы могут усиливать температурные градиенты [см. разд. 4.7.3, 4.8 и 6.4], однако облачные валы, для которых характерное время меньше, подавляются маломасштабными эффектами среднемасштабного движения. На облачные улицы (см. разд. 9.8.1) оказывает влияние геострофический ветер, однако неустойчивость их движения порождается отнюдь не отклоняющей силой, как некоторые думают.

Если величина  $F$ , характеризующая число Росби, имеет порядок единицы, то основными членами в уравнении (5.8.16) являются

$$(1 - F^2) \omega'' + (F^2\alpha + iF\alpha_1) \omega' + \\ + \left[ \frac{g\beta}{U^2} - \frac{U''}{U} - k^2 - iF \left( \alpha\alpha_1 - \frac{V''}{U} \right) \right] \omega = 0, \quad (5.8.17)$$

а если  $F \ll 1$ , то

$$\omega'' + \left( \frac{g\beta}{U^2} - \frac{U''}{U} - k^2 \right) \omega = 0. \quad (5.8.18)$$

В тех случаях, когда вращение Земли существенно, масштаб

движения скорее всего будет таким, что членами, содержащими  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $U''$  и  $V''$ , можно пренебречь. Тогда рассматриваемое уравнение имеет вид

$$(k^2 U^2 - f^2) \omega'' + g\beta k^2 \omega = 0, \quad (5.8.19)$$

и, следовательно,  $\partial/\partial z$  имеет порядок  $[g\beta k^2 / (k^2 U^2 - f^2)]^{1/2}$ , что по порядку величины равно  $(g\beta/U^2)^{1/2}$ , т. е. является примерно таким же, как в случае отсутствия вращения Земли. Соответствующие волны вполне могут быть названы *волнами Куини*, так как ои первым детально исследовал их в 1947 г. Для них длина волны в вертикальном направлении с точностью до множителя  $2 \div 3$  равна  $2\pi$ , а в направлении течения при  $U$  порядка 10 м/с, как в средних широтах, по порядку величины составляет  $2\pi(U/f) \approx 500\pi$  км.

В этом случае, согласно уравнению (5.8.10),  $u$  и  $v$  по порядку величины равны, а  $u/\omega$ , как следует из уравнения (5.8.12), приблизительно равно отношению длин волн в горизонтальном и вертикальном направлениях. Таким образом, широтное и меридиональное смещения примерно в 250 раз превосходят вертикальное и, следовательно, наклон линий тока мал.

В случае волн Куини доминирующими являются силы статической устойчивости и силы, обусловленные вращением Земли. При этом смещения происходят по поверхностям, наклон которых к горизонту составляет  $\sim 1/250$ .

Чтобы ввести в уравнение (5.8.15), соответствующее случаю коротких волн, когда  $f$  пренебрежимо мало, вертикальное смещение  $\zeta$ , заметим, что после линеаризации

$$\omega = \frac{d\zeta}{dt} = ikU\zeta \quad (5.8.20)$$

и, следовательно,

$$\omega' = ik(U'\zeta + U\zeta'), \quad (5.8.21)$$

а

$$\omega'' = ik(U''\zeta + 2U'\zeta' + U\zeta''). \quad (5.8.22)$$

Отсюда уравнение смещения получаем в виде

$$\zeta'' + 2\alpha\zeta' + \left(\frac{g\beta}{U^2} - k^2\right)\zeta = 0, \quad (5.8.23)$$

что представляет собой линеаризованный вариант уравнения (5.6.7), полученный в предположении, что  $\zeta$  пропорционально  $\cos kx$ .

В случае  $\alpha=0$  и  $c^2=\infty$  (т. е. в отсутствие сдвига для несжимаемой жидкости или при  $\zeta$ , достаточно малом, чтобы обеспечивалось  $g\zeta/c^2 \ll 1$ ) уравнение (5.6.7) линейно и может быть

записано в виде

$$\zeta'' + \left( \frac{g\beta}{U^2} - k^2 \right) \zeta = 0, \quad (5.8.24)$$

т. е. имеет тот же вид, что и уравнение (5.8.23) при  $\alpha=0$ . Следовательно, это уравнение можно получить и не прибегая к допущениям теории малых возмущений. В частности, не обязательно, чтобы выполнялось условие  $u \ll U$  и т. д., и уравнение (5.8.23) хорошо аппроксимирует полное уравнение при достаточно больших смещениях, а при сколь угодно больших смещениях, когда  $\alpha=0$  и  $g\beta/U^2$  не зависит от  $z$ , оно является точным. Поэтому классический вывод волнового уравнения обычными методами малых возмущений вводит в заблуждение относительно условий, при которых оно справедливо и неоправданно ограничен в своих приложениях.

Уравнение (5.6.7), очевидно, нелинейно относительно  $\zeta$  из-за наличия членов, явным образом содержащих  $\zeta^2$ . Но если  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u_0$  зависят от  $z_0$ , то при наличии смещения они зависят и от  $\zeta$ , и важнейшими ограничениями, которые должны быть наложены на практике, чтобы получить линейное уравнение, являются ограничения на профиль течения, а не на амплитуду волны.

## 5.9. Линейные волны большой амплитуды в несжимаемой жидкости

Уравнение (5.4.3) можно представить в виде

$$\nabla^2 z_0 + S (\nabla z_0)^2 + l^2 z = S + l^2 z_0, \quad (5.9.1)$$

где  $S + l^2 z$  — сумма, постоянная вдоль линии тока, если  $z = z_0$  далеко вверх по потоку, где

$$S = \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{\rho^{1/2} u_0} \frac{d}{dz_0} (\rho^{1/2} u_0), \quad l^2 = g\beta/u_0^2. \quad (5.9.2)$$

Рассмотрим теперь предположение, что существует такая переменная  $\psi = \psi(z_0)$ , относительно которой это уравнение является линейным. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla z_0 &= \frac{dz_0}{d\psi} \nabla \psi, \\ \nabla^2 z_0 &= \left( \nabla \psi \frac{d}{d\psi} \right)^2 z_0 = \frac{dz_0}{d\psi} \nabla^2 \psi + \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} (\nabla \psi)^2, \\ (\nabla z_0)^2 &= \left( \frac{dz_0}{d\psi} \right)^2 (\nabla \psi)^2, \end{aligned} \quad (5.9.3)$$

и, следовательно, волновое уравнение (5.9.1) можем представить в виде

$$\nabla^2 \psi + (\nabla \psi)^2 \frac{d\psi}{dz_0} \left[ \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + \left( \frac{dz_0}{d\psi} \right)^2 S \right] = \frac{d\psi}{dz_0} [S + l^2 (z - z_0)]. \quad (5.9.4)$$

Член, содержащий  $(\Delta \psi)^2$ , исчезает, если

$$\frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + \left( \frac{dz_0}{d\psi} \right)^2 \frac{d}{dz_0} \ln(\rho^{1/2} u_0) = \frac{1}{\rho^{1/2} u_0} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \rho^{1/2} u_0 \frac{\partial z_0}{\partial \psi} \right) = 0. \quad (5.9.5)$$

Так будет, если

$$\rho^{1/2} u_0 (dz_0/d\psi) = \text{const}. \quad (5.9.6)$$

Положив  $\text{const}=1$ , можем записать

$$\frac{d\psi}{dz_0} = \rho^{1/2} u_0 \quad \text{или} \quad \psi = \int \rho^{1/2} u_0 dz_0. \quad (5.9.7)$$

Этот результат принадлежит Лонгу (1953). Уравнение (5.9.1) приобретает вид

$$\nabla^2 \psi - S \rho^{1/2} u_0 - l^2 (z - z_0) \rho^{1/2} u_0 = 0 \quad (5.9.8)$$

или, в более общей форме,

$$\nabla^2 \psi - F(\psi) - G(\psi) z = 0. \quad (5.9.9)$$

Чтобы это уравнение было линейным относительно  $\psi$ , функции  $F$  и  $G$  должны иметь вид

$$\begin{aligned} F(\psi) &= (S - l^2 z_0) \rho^{1/2} u_0 = A\psi + B, \\ G(\psi) &= l^2 \rho^{1/2} u_0 = C\psi + D, \end{aligned} \quad (5.9.10)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — постоянные, не зависящие от  $z_0$ , а сами уравнения (5.9.10) ограничивают вид профилей  $\rho$  и  $u_0$  определенными функциональными зависимостями от  $z_0$  в невозмущенном потоке. Тогда с учетом уравнения (5.8.3) волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (A + k^2) \psi + B + (C\psi + D) z. \quad (5.9.11)$$

Исключая  $l^2 \rho^{1/2} u_0$  и  $S$  из уравнений (5.9.10), (5.9.7) и (5.9.2), получаем уравнение

$$\frac{d^2 \psi(z_0)}{dz_0^2} = A\psi(z_0) + B + [C\psi(z_0) + D] z_0, \quad (5.9.12)$$

решения которого имеют такую же функциональную форму,

как и решения уравнения (5.9.11). Если  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  уже выбраны, то из уравнения (5.9.12) можно найти  $\psi(z_0)$ , а затем из уравнения (5.9.11) — линии тока  $\psi = \text{const}$ , т. е. линии, для которых  $z_0 = \text{const}$ . Профили  $\rho$  и  $u_0$  в потоке можно получить из уравнения (5.9.10), однако ясно, что профили, представляющие практический интерес, могут быть найдены лишь в результате интегрирования уравнения (5.9.10) при соответствующем подборе значений постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Довольно легко выявить интересные частные случаи, наиболее очевидным из которых является случай  $S=0$ ,  $B=C=0$ ,  $\psi \sim z_0$ , когда  $l^2$  и  $\rho^{1/2}u_0$  постоянны и не зависят от  $z_0$ . Этот случай анализируется ниже. Можно рассмотреть еще ряд случаев, когда значения  $u_0$  и  $\rho$  меняются в зависимости от  $z_0$  в более широких пределах, но все они требуют, чтобы среда была ограничена твердыми стенками сверху и снизу, так как пока не найдено ни одного решения, которое не давало бы экспоненциального роста при больших  $z$ . Упомянувшийся в конце разд. 5.5 случай, когда возмущение остается ограниченным при больших  $z$ , соответствует постоянному  $S$  и  $u_0$ , приблизительно пропорциональному  $z_0$ , и, следовательно, не имеет практического значения.

Чтобы не быть тривиальными, решения уравнения (5.9.12) должны представлять собой монотонные функции  $z_0$ , так как  $\psi$  есть функция тока, определяемая уравнением (5.9.7). Более того,  $u_0$  не должно быть равно нулю, так как в противном случае  $l^2$  становится бесконечно большим и решение в этой окрестности будет нулевым. Анализ этого случая изложен в разд. 5.17. Все решения уравнений (5.9.11) и (5.9.12) подобны функциям Эри, которые являются либо колебательными, либо экспоненциальными и не могут быть алгебраическими при больших  $z$ .

Другой подход к представлению реальной атмосферы в виде ряда слоев, для каждого из которых имеется простое решение, из-за нелинейности граничных условий полезен лишь в том случае, если смещения на границах слоев малы. Обычно граничные условия ставятся для невозмущенной границы слоев; если же их поставить на смещенных границах, то практически невозможно проследить их зависимость от  $\zeta$ .

Или использовал линейные решения такого типа в случаях, когда сверху жидкость ограничена свободной поверхностью, которая из-за очень большой разности плотностей ведет себя как твердая граница. Главным достоинством таких решений применительно к атмосфере является то, что они объясняют некоторые механизмы, которые, как показал Лонг, играют важную роль в атмосферных процессах. Перейдем теперь к детальному рассмотрению этого аспекта проблемы.

## 5.10. Стоячие волны и вихри

Покажем сущность этого явления на простейших примерах. Ясно, что существуют и более сложные случаи, однако они связаны с действием каких-либо других механизмов. Будем пользоваться уравнением вертикального смещения  $\zeta$ , так как в рассматриваемых случаях оно линейно. Уравнение для вертикальной составляющей скорости  $w$  линейно только при малых амплитудах — в форме уравнения (5.8.18), так как  $\zeta$  и  $w$  в двумерном случае связаны нелинейной зависимостью

$$w = \frac{d\zeta}{dt} = u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (5.10.1)$$

Начнем с уравнения (5.6.7) и рассмотрим ряд частных случаев.

### 5.10.1. Однородное стратифицированное течение несжимаемой жидкости между твердыми горизонтальными границами

В этом случае волновое уравнение с учетом  $\zeta \sim \cos kx$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + (l^2 - k^2) \zeta = 0, \quad (5.10.2)$$

и с учетом обозначений

$$\frac{g\beta}{[u_0^2]} = l^2, \quad v^2 = l^2 - k^2 \quad (5.10.3)$$

решение, удовлетворяющее граничным условиям  $\zeta=0$  при  $z=0$  и  $z=h$  принимает вид

$$\zeta = A \sin vz \cos kx, \quad (5.10.4)$$

где

$$\sin vh = 0 \quad \text{или} \quad vh = n\pi. \quad (5.10.5)$$

Последнее уравнение определяет длину волны  $2\pi/k$  для каждого значения  $n$ . На рис. 5.10.1 показаны линии тока при  $n=1$ . При  $n=2$  профиль  $\zeta$  имеет один узел внутри потока, и течение в каждой его половине соответствует показанному на рисунке, но находится одно по отношению к другому в противоположных фазах.

Существует только одно возможное значение  $k$  при  $\pi < lh < 2\pi$ , ни одного при  $lh < \pi$ , два при  $2\pi < lh < 3\pi$  и т. д. Хотя число возможных значений  $k$  может быть велико, обычно в практически важных случаях их бывает одно или два, а когда их больше, то не все моды оказываются возбужденными до значительных амплитуд.

Могут существовать области возвратного течения, обычно с замкнутой циркуляцией, однако в этих случаях горизонтальная составляющая скорости в некоторых областях течения должна быть отрицательной, т. е.

$$1 - \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial z_0}{\partial z} < 0$$

в соответствии с уравнением (4.1.4), или

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} > 1. \quad (5.10.6)$$

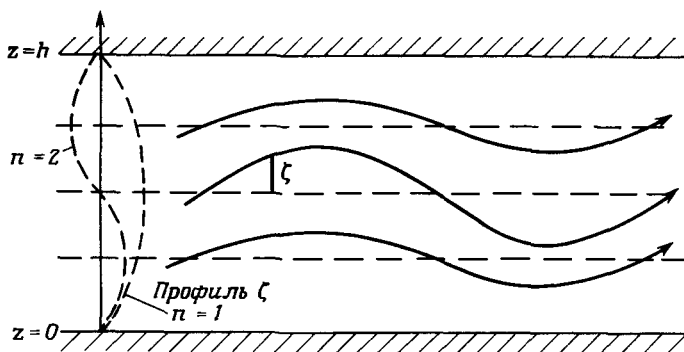


Рис. 5 10 1. Система координат и граничные условия для стратифицированного течения между двумя твердыми границами.

Линии тока построены для профиля  $\zeta$  при  $n=1$ .

В этом случае в некоторых частях поля течения должно быть

$$Av \cos vz \cos kx > 1, \quad (5.10.7)$$

т. е.

$$Av > 1. \quad (5.10.8)$$

В случае первой моды  $vh=\pi$ ; тогда последнее условие приобретает вид

$$A > h/\pi, \quad (5.10.9)$$

и возвратное течение имеет место в окрестности  $\cos vz = \cos kx = 1$  или  $\cos vz = \cos kx = -1$ . В этом случае около указанных точек существуют области замкнутой циркуляции, причем каждая из точек лежит на границе, а области циркуляции называются *вихрями*.

Точки торможения в центре областей циркуляции определяются условиями

$$\cos kx = \pm 1, \quad Av \cos vz = \pm 1, \quad (5.10.10)$$

а точки, лежащие на поверхности узлов, — условиями

$$\cos v z = \pm 1, \quad A v \cos k x = \pm 1. \quad (5.10.11)$$

Линия, на которой скорость направлена вертикально, являющаяся границей области, в которой  $u$  отрицательна и существует возвратное течение, определяется выражением

$$A v \cos v z \cos k x = 1. \quad (5.10.12)$$

На рис. 5.10.2 показана структура течения при  $n=2$ . Видно, что вихри на поверхности узлов  $z=h/2$  являются парными. Здесь же показана граница возвратного течения.

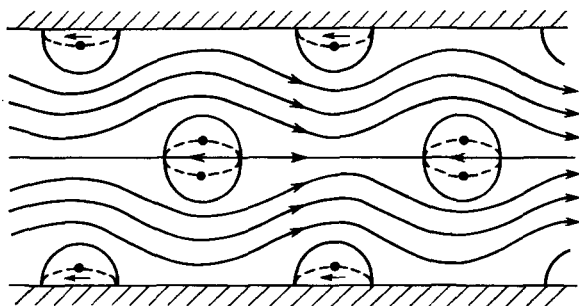


Рис. 5.10.2. Распределение линий тока при  $n=2$ , когда амплитуда волны достаточно велика, чтобы появились вихри.

Штриховыми линиями ограничены области возвратного течения. В центрах вихрей показаны точки торможения, около которых вращается жидкость. Вихри внутри потока — двойные.

В областях возвратного течения жидкость находится в состоянии статической неустойчивости, даже если в остальных областях течение устойчиво. Поэтому следует ожидать, что конвекция за счет плавучести будет происходить внутри вихря до тех пор, пока плотность жидкости в нем не станет более или менее однородной. Это в свою очередь создаст небольшой скачок плотности на границе вихря и может привести к образованию облачных валов посредством механизма, описанного в гл. 6.

Жидкость внутри вихря с математической точки зрения имеет плотность, равную плотности жидкости, находящейся по другую сторону поверхности узлов. Поэтому жидкости внутри вихрей на нижней границе приписываются плотность и значение  $z_0$ , соответствующие жидкости на более низком уровне. Так как это в действительности невозможно, то жидкость внутри вихря должна быть статически неустойчивой и развитая теория в этом случае совершенно неприменима. Внутри парных вихрей, нахо-



дящихся на центральной поверхности узлов, жидкости приписывается та плотность, которой она обладает в какой-то другой части системы, однако такое распределение плотности при наличии волн с достаточно большой для образования вихрей амплитудой маловероятно.

Важной особенностью течения с вихрями является его очень высокая скорость между точками торможения на поверхностях узлов и неодинаковая форма горбов и впадин линий тока — вблизи поверхности узлов они уплощены, а выше и ниже вихрей имеют большую кривизну.

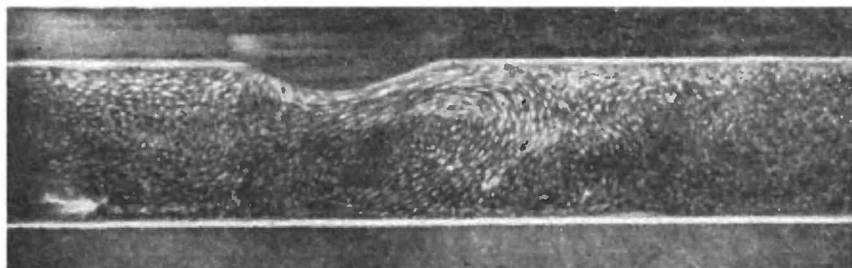


Рис. 5.10.3. Визуализация линий тока, вдоль которых движутся частицы, плавающие на поверхности воды в баке.

Фотосъемка с большой выдержкой. Стратификация достигнута добавлением соли. Модель препятствия движется поступательно справа налево, и чтобы получить поле скоростей, образующееся при обтекании неподвижного препятствия, надо вычесть скорость движения модели из скоростей частиц. В правой части снимка возмущения малы (она соответствует тому торцу бака, от которого начало двигаться препятствие, находившееся в состоянии покоя).

В эксперименте такое течение легче всего воспроизвести, двигая препятствие по дну бака с покоящейся стратифицированной жидкостью. На рис. 5.10.3 показаны возмущения, создаваемые движущимся препятствием. Визуализация достигнута путем съемки с некоторой достаточно большой экспозицией.

### 5.10.2. Безграничная атмосфера с одним разрывом статической устойчивости

Будем предполагать, что смещение достаточно мало, чтобы можно было пренебречь сжимаемостью воздуха и пользоваться уравнением (5.10.2) во всей рассматриваемой области. Поставим условие, чтобы амплитуда стремилась к нулю при  $z \rightarrow \infty$  и была строго равна нулю при  $z = -h$ . Тогда для верхнего слоя, опуская  $\cos kx$ , решение можно представить в виде

$$\zeta = Ae^{-\mu z}, \quad (5.10.13)$$

где

$$\mu = (k^2 - l_s^2)^{1/2}, \quad (5.10.14)$$

а другое решение пропорционально  $e^{\mu z}$  и неприемлемо при больших  $z$ . Величина  $l^2$  для верхнего слоя равна  $l_s^2$ .

Для нижнего слоя, чтобы получить нуль при  $z = -h$  и выполнить условия на границе слоев при  $z = 0$ , необходимо иметь решение такого же вида, как в разд. 5.10.1. Из этих условий вытекают требования непрерывности смещения  $\xi$  и давления, определяемого уравнением

$$\frac{\bar{\omega}}{\tau} + \frac{1}{2}q^2 + gz = \text{const}. \quad (5.10.15)$$

Запишем

$$\begin{aligned} q^2 &= u^2 + w^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho} u_0\right)^2 \left[ \left(\frac{\partial z_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 \right] = \\ &= \left(\frac{\rho_0}{\rho} u_0\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 - k\zeta^2 \right] \end{aligned} \quad (5.10.16)$$

и рассмотрим простейший вид разрыва, возможного при  $z = 0$ , а именно такого, при котором  $\rho_0$  и  $u_0$  непрерывны и, следовательно,  $\rho$  также непрерывно. Так как  $\xi$  непрерывно, то для непрерывности  $\bar{\omega}$  и  $\tau$  на границе слоев в соответствии с уравнениями (5.10.15) и (5.10.16) требуется, чтобы  $\partial \zeta / \partial z$  также было непрерывно. Этот результат справедлив независимо от величины смещения поверхности раздела, которая в этом случае соответствует  $z_0 = 0$  и описывается уравнением  $z = \xi$ .

В нижнем слое, где  $l^2 = l_i^2$ ,

$$\zeta = B \sin \nu (z + h) \quad (\zeta = 0 \text{ при } z = -h). \quad (5.10.17)$$

Здесь

$$\nu = (l_i^2 - k^2)^{1/2}. \quad (5.10.18)$$

Поэтому, приравнивая выражения (5.10.13) и (5.10.17) для  $\xi(z)$ , а также соответствующие производные  $\partial \xi / \partial z$ , получаем

$$A = B \sin \nu h, \quad -A\mu = B\nu \cos \nu h, \quad (5.10.19)$$

откуда

$$\nu \operatorname{ctg} \nu h = -\mu. \quad (5.10.20)$$

Структура этого решения показана на рис. 5.10.4. На нижней границе (при  $z = -h$ ) вихрь будет существовать, если в какой-то части поля течения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = B\nu \cos kx > 1,$$

или

$$Bv > 1. \quad (5.10.21)$$

Вихрь образуется и на поверхности раздела ( $z=0$ ) там, где  $\partial\zeta/\partial z$  достигает максимума, если

$$Bv \cos \nu h > 1. \quad (5.10.22)$$

На рис. 5.10.4 показан случай, когда нет вихрей, а также случай, когда они имеются на обеих поверхностях. Вихрь на поверхности раздела имеет меньшие размеры. Если удовлет-

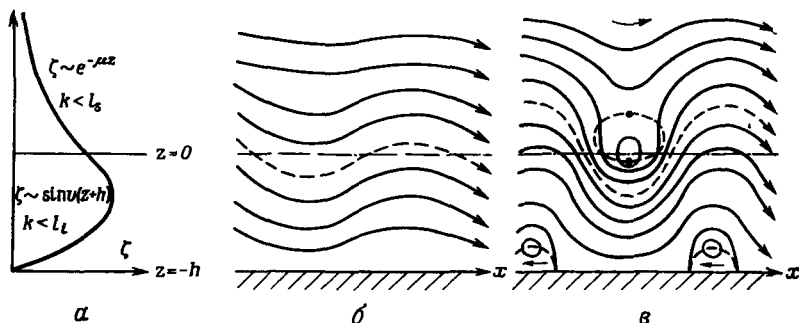


Рис. 5.10.4. Модель атмосферы с одним разрывом статической устойчивости.

*a* — профиль  $\zeta$  для случая двух слоев (верхний слой простирается в бесконечность); *b* — форма линий тока при малой амплитуде; *в* — появление вихрей; --- смещенное положение поверхности раздела. Граница области возвратного течения проходит через две точки торможения.

воряется условие (5.10.21), но не условие (5.10.22), то вихрь образуется только на нижней границе.

Уравнение (5.10.20) выражает  $k$  через другие параметры задачи, а именно через  $l_i$ ,  $l_s$  и  $h$ . На рис. 5.10.5 сплошными кривыми показана зависимость  $\nu \operatorname{ctg} \nu h$  от  $\nu h$ , а штриховыми — зависимость  $\mu$  от  $\nu h$ . Штриховые кривые являются дугами окружности, так как

$$\mu^2 = l_i^2 - l_s^2 - \nu^2. \quad (5.10.23)$$

Если значение радиуса окружности заключено между  $1/2\pi$  и  $3/2\pi$ , то существует единственное значение  $\nu h$ , при котором  $\nu \operatorname{ctg} \nu h = -\mu$ . Если же значение радиуса лежит между  $3/2\pi$  и  $5/2\pi$ , то таких значений два. В общем случае число значений равно  $n$ , если

$$\frac{(2n-1)\pi^2}{2h} < l_i^2 - l_s^2 < \frac{(2n+1)\pi^2}{2h}. \quad (5.10.24)$$

Если  $l_s^2 > l_i^2$ , то не существует ни одного аналогичного решения с нулем на нижней границе и с экспоненциально

убывающим значением при больших  $z$ . Во всех случаях, когда имеется решение,

$$l_i > k > l_s. \quad (5.10.25)$$

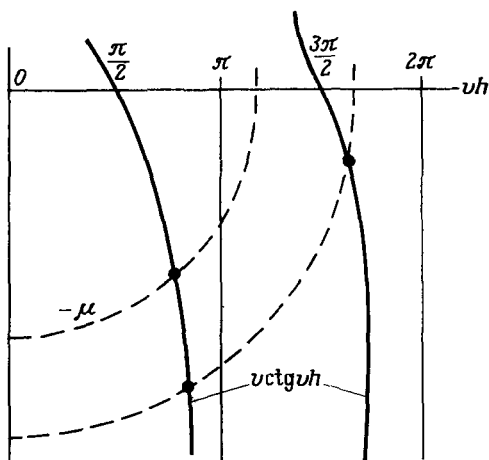


Рис. 5.10.5. Графическое решение уравнения (5.10.20).

Зависимости левой (сплошные линии) и правой (штриховые линии) частей уравнения от  $\nu h$ .

### 5.10.3. Общее требование для захваченных волн

Рассмотренный выше случай дает пример захваченных волн в части воздушного потока вблизи поверхности земли. Условие существования по крайней мере одной волны выражается неравенством (5.10.24) при  $n=1$ , т. е. имеет вид

$$l_i^2 - l_s^2 > \frac{\pi^2}{4h^2}. \quad (5.10.26)$$

В более общем случае возможность существования волн можно исследовать, рассмотрев случай малой амплитуды. Эта уверенность основывается на соображении, что вряд ли существуют сложные случаи, отличающиеся от прочих тем, что из возможности существования периодических волн большой амплитуды не следует возможность существования волн малой амплитуды, хотя обратное не всегда верно. Для малых амплитуд можно обратить преобразование  $w$  в  $\zeta$ , выраженное уравнениями (5.8.20) — (5.8.23), и получить уравнение для  $w$  в том же приближении, что и уравнение (5.8.20), т. е. при  $u, w \ll U$ . Тогда из уравнения (5.8.18) найдем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (l^2 - k^2) w = 0, \quad (5.10.27)$$

где теперь

$$l^2 = \frac{g^2}{u_0^2} - \frac{1}{u_0} \frac{d^2 u_0}{dz_0^2}. \quad (5.10.28)$$

Для того, чтобы волна стала захваченной, профили  $w$  и  $\xi$  должны асимптотически стремиться к нулю при  $z \rightarrow \infty$ . Следовательно, вторая производная  $\partial^2 w / \partial z^2$  должна быть положительной, т. е. должно выполняться условие  $k^2 > l^2$ . С другой стороны, чтобы достигать нуля на уровне земли, подобно профилю  $\xi$  на рис. 5.10.3, кривизна профиля  $w$  в приземных слоях должна меняться на обратную. Итак, в нижних слоях должно обеспечиваться либо условие  $l^2 > k^2$  в сравнительно глубоком слое, либо  $l^2 \gg k^2$  в слое, лежащем на меньшей глубине. Следовательно, значение  $k$  во всех случаях равно некоторому значению  $l$ , занимающему в профиле  $l$  среднее положение между его крайними значениями, и чтобы условие типа (5.10.26) выполнялось, эти крайние значения должны различаться на достаточно большую величину.

#### 5.10.4. Захват за счет скачка плотности

В гл. 6 будет показано, что скачок скорости не сохраняется, но могут существовать скачки плотности. Причины их возникновения рассматриваются в разд. 6.4, 11.1.2 и 11.1.5.

В случае стационарного двумерного течения для каждой линии тока имеем

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + gz = \text{const}, \quad (5.10.29)$$

а в случае адиабатического течения  $p/\rho$  можем заменить на  $\bar{\omega}/\tau$  и получить аналогичный результат. На поверхности раздела давление  $p$  непрерывно, и поскольку  $\bar{\omega}$  в случае газа однородного состава [см. выражение (1.6.4)] зависит только от  $p$ , то  $\bar{\omega}$  на скачке плотности также должно быть непрерывно. В то же время  $\rho$  и  $\tau$  терпят разрыв. Переменная часть  $p$ , полученная из уравнения (5.10.29), одинакова по обе стороны разрыва плотности. При переменных вдоль линии тока  $q$  и  $z$ , положив  $z$  равным  $\xi$  путем такого выбора  $z$ , чтобы оно равнялось нулю на невозмущенной стороне разрыва, и обозначив индексами  $i$  и  $s$  нижний и верхний слой, получим

$$\begin{aligned} -\rho_s u_0^2 \frac{\partial \xi_s}{\partial z} + g \rho_s \xi_s &= \text{const} - p_s = \text{const} - p_i = \\ &= -\rho_i u_0^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial z} - g \rho_i \xi_i; \end{aligned} \quad (5.10.30)$$

Здесь мы положили  $\zeta_i = \zeta_s = \zeta$ , и в каждом слое, согласно уравнению (5.10.16), переменная часть  $q^2$  с точностью до членов, содержащих  $\zeta$  в первой степени, равна  $-2u_0^2 \partial \zeta / \partial z$ . Следовательно, уравнение

$$\rho_i u_0^2 \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} = g \zeta (\rho_i - \rho_s) + \rho_s u_0^2 \frac{\partial \zeta_s}{\partial z} \quad (5.10.31)$$

выражает непрерывность давления при переходе через поверхность разрыва плотности. Особенно интересны следующие два случая:

1. Если верхний слой имеет очень малую плотность и представляет собой газ с почти постоянным давлением, находящийся над жидкостью, то можно считать, что на поверхности жидкости  $\rho_s = 0$  или  $p = \text{const}$ . В этом случае на поверхности

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial z} = \frac{g \zeta_i}{u_0^2}. \quad (5.10.32)$$

Это означает, что рассматриваются внешние волны, т. е. волны на свободной поверхности, а на них внутренняя стратификация не оказывает практически никакого влияния. Если же изучаются внутренние волны, то необходимо поставить граничное условие, означающее, что смещение свободной поверхности пренебрежимо мало по сравнению с внутренними смещениями. Иначе говоря, граничное условие должно иметь вид  $\zeta = 0$ . Вариации давления по поверхности обусловлены ее смещениями в вертикальном направлении, которые малы и рассчитываются по уравнению (5.10.32) после того, как  $\partial \zeta / \partial z$  получено в предположении, что  $\zeta$  на этой поверхности равно нулю.

2. Если скачок плотности мал по сравнению с самой плотностью, то можно положить

$$\rho_s = (1 - \varepsilon) \rho_i \quad (5.10.33)$$

и пренебрегать квадратами  $\varepsilon$ . Тогда уравнение (5.10.31) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial z} = \frac{\varepsilon g \zeta}{u_0^2} + \frac{\partial \zeta_s}{\partial z}. \quad (5.10.34)$$

Разрыв плотности ведет себя как очень тонкий слой, в котором  $\beta$  весьма велико, а производная от  $\zeta$  при пересечении этого слоя может менять знак. Поэтому допустимо рассматривать два слоя с малой статической устойчивостью в верхнем, с нулевой — в нижнем и с устойчивым разрывом плотности на поверхности раздела. Такая ситуация часто возникает в атмосфере, когда солнце нагревает земную поверхность и вызывает

термическую конвекцию в нижнем слое. В этом случае

$$\zeta_s \sim e^{-\mu z}, \quad \zeta_i \sim \text{sh } k(z+h), \quad (5.10.35)$$

и, следовательно, волны исчезают на большой высоте и имеют нулевую амплитуду на поверхности земли при  $z=-h$ . Тогда условие на поверхности раздела (5.10.34) при  $z=0$  имеет вид

$$k \text{ ctg } kh = \frac{\varepsilon g}{u_0^2} - \mu, \quad (5.10.36)$$

если скорость  $u_0$  всюду постоянна, а  $\mu$  определяется уравнением (5.10.14). Значение  $h$ , удовлетворяющее этому условию, определяется неравенством  $\text{cth } kh > 1$  или

$$\varepsilon g > u_0^2(k + \mu). \quad (5.10.37)$$

При теоретическом исследовании цель анализа обычно состоит в определении  $k$ , однако на практике длины волн, если они наблюдаются, можно измерить, а затем приближенно определить  $u_0$  и  $\mu$ , пользуясь результатами обычного зондирования атмосферы. Таким образом, теория позволяет найти значение, которое  $\varepsilon$  должно было превысить, а действительное его значение находится из уравнения (5.10.36), если известно приближенное значение  $h$ .

## 5.11. Незахваченные волны

Волны могут возникать в потоке при обтекании препятствий, но при этом они не обязательно должны быть захваченными. В разд. 5.12 будет подробнее рассмотрен вопрос о возбуждении захваченных волн, однако должны быть рассмотрены волны всех длин, соответствующие составляющим Фурье для препятствия данной формы. На уровне земли незахваченные волны имеют конечную амплитуду, однако на поверхности раздела они должны удовлетворять тем же граничным условиям, что и захваченные волны. Продемонстрируем свойства незахваченных волн с помощью двухслойной модели, описанной в разд. 5.10.2. Теория как для более сложных, так и для более простых случаев строится аналогичным образом.

В верхнем слое, который будем обозначать индексом  $s$ , экспоненциально убывающее решение отсутствует, так как

$$l_s^2 > k^2. \quad (5.11.1)$$

Поэтому мы должны рассмотреть физические свойства двух волн

$$\text{Re}(\zeta_s) = \text{Re } C e^{\pm i v_s z + i k x}, \quad (5.11.2)$$

где

$$v_s^2 = l_s^2 - k^2.$$

Если верхний слой простирается в бесконечность, то волны не отражаются от верхней границы, и обычно считают, что должно применяться «условие излучения», т. е. энергия должна переноситься вверх волнами, так как возмущение генерируется на подстилающей поверхности. Это означает, что жидкость, находящаяся ниже данной поверхности Бернулли, действует на жидкость набегающего потока над этой поверхностью с силой,

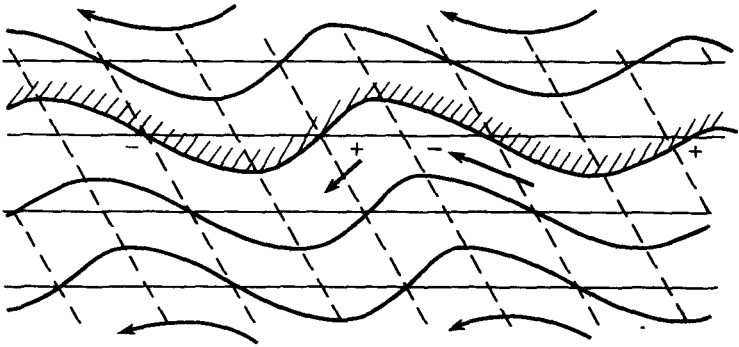


Рис. 5.11.1. Волны с гребнями, смещенными навстречу набегающему потоку.

На склоне, обращенном назад, скорость больше, а давление меньше. Поэтому жидкость под каждой линией тока давит на жидкость, находящуюся над ней, с силой, направленной против набегающего потока.

совершающей работу над этой жидкостью в процессе ее перемещения вдоль стационарного волнового профиля.

Волны, соответствующие знаку «плюс» в уравнении (5.11.2), ограничены поверхностями, гребни и впадины которых смещены навстречу набегающему потоку (рис. 5.11.1). В результате скорость на стороне волны, обращенной к набегающему потоку, оказывается меньше, чем на противоположной ее стороне. Для давления получается обратная картина. В результате на текущую вдоль этой поверхности жидкость действует сила, направленная против течения, а это значит, что гребень оказывает сопротивление текущей над ним жидкости, которая в свою очередь действует на него с силой, направленной по потоку. Такие волны переносят количество движения вниз по потоку. Рассмотренные в предыдущем разделе захваченные волны имеют одну и ту же фазу на всех уровнях и не оказывают сопротивления потоку. Так и должно быть, поскольку подстилающая поверхность в этом случае горизонтальна и не может действовать на поток с силой, направленной в указанном на-



правлении. У волн, соответствующих знаку «минус» в уравнении (5.11.2), гребни наклонены по потоку. Такие волны не могут возникнуть при обтекании препятствия, а создаются в результате отражения от поверхности раздела в жидкости. В случае захваченных волн происходит полное отражение, и волны, распространяющиеся вверх и вниз по потоку, идентичны.

Волны, соответствующие двухслойной модели, описанной выше в разд. 5.10.2, имеют вид

$$\zeta_i = A \cos(kx - v_i z) + B \cos(kx - v_s z), \quad (5.11.3)$$

т. е. не исчезают ни при каких  $x$  и  $z$  и имеют одну и ту же амплитуду на всех высотах в пределах нижнего слоя. Если  $\zeta$  и ее производная по вертикальной координате на поверхности раздела при  $z=0$  непрерывны, то должны быть справедливы соотношения

$$C = A + B, \quad v_s C = v_i A - v_s B, \quad (5.11.4)$$

из которых следует

$$A = \frac{v_i + v_s}{2v_i} C, \quad B = \frac{v_i - v_s}{2v_i} C, \quad (5.11.5)$$

т. е. волна, распространяющаяся вниз по потоку и имеющая амплитуду  $B$ , имеет меньшую интенсивность, чем волна, распространяющаяся вверх по потоку. В случае, когда они одинаковы,  $v_s=0$  (или  $k=l_s$ ) и амплитуда в верхнем слое не зависит от  $z$ . Это может соответствовать стоячей волне над уровнем земли, если  $v_i h = \pi/2$ , так как в этом случае  $\zeta$  при  $x=-h$  обращается в нуль. Однако такая ситуация вряд ли может реализоваться на практике, поскольку она требует, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\pi^2}{4h^2} = v_i^2 = l_i^2 - k^2 = l_i^2 - l_s^2, \quad (5.11.6)$$

налагаемое на профиль потока, а это соответствует предельному случаю уравнения (5.10.26). Незахваченные волны в стратосфере обсуждались Беркшайером и Уорреном (1970).

## 5.12. Затухающие волны

Возникает вопрос, можно ли изучать затухающие волны, предполагая, что  $\zeta \sim e^{(-m+ik)x}$ , где  $m$  и  $k$  считаются положительными. В этом случае, рассматривая волновое уравнение в форме (5.4.9) и пренебрегая  $(\nabla \zeta)^2$  и членом, содержащим  $1/2\beta$ , получаем

$$\nabla^2 \zeta + \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial z} + l^2 \zeta = 0, \quad (5.12.1)$$

и, следовательно, если существует решение вида  $\zeta \sim e^{(\mu+iv)z}$ , то должно иметь место равенство

$$(-m + ik)^2 + (\mu + iv)^2 + \alpha(\mu + iv) + l^2 = 0. \quad (5.12.2)$$

В свою очередь это требует, чтобы выполнялись условия

$$m^2 - k^2 + \mu^2 - v^2 + \alpha\mu + l^2 = 0 \quad (5.12.3)$$

и

$$v(\mu + \frac{1}{2}\alpha) = mk, \quad (5.12.4)$$

а так как  $m$  и  $k$  положительны, то  $v$  и  $\mu + \frac{1}{2}\alpha$  должны иметь одинаковые знаки. В случае  $\alpha=0$  это означает, что если амплитуда волны с высотой убывает ( $\mu < 0$ ), то волна распространяется вниз. Следовательно, энергия поступает к подстилающей поверхности и оказывает на поток тормозящее действие. Если существует сила, действующая в противоположном направлении, то волна, затухающая экспоненциально вниз по течению, должна экспоненциально усиливаться, распространяясь вверх, и с ростом высоты ее гребни должны смещаться вверх по потоку.

Затухающие волны такого рода могут возникать за препятствием, которое послужило причиной их образования, но значение этих волн, как правило, невелико по сравнению с незатухающими волнами, распространяющимися вниз по потоку. Кроме того, так как эти волны экспоненциально усиливаются, распространяясь вверх, то их нельзя с достаточным основанием считать стационарными, и для полного изучения необходимо получить решения уравнений, зависящие от времени. Однако этот вопрос выходит за рамки данной книги.

### 5.13. Волны на подветренной стороне препятствия

Применение метода, основанного на использовании интегралов Фурье, продемонстрируем на примере волн в ограниченном сверху и снизу течении, подобном рассмотренному в разд. 5.10.1. Пусть его верхняя граница плоская, а на нижней границе, которую будем считать поверхностью земли, имеется бугор. Тогда решение в соответствии с уравнением (5.10.4) имеет вид

$$\zeta = -\zeta_{-h} \sin v z / \sin v h. \quad (5.13.1)$$

Здесь принята система координат, в которой уровень поверхности земли соответствует  $z = -h$ . Это означает, что если

$$\zeta_{-h} = \int_0^{\infty} F(k) \cos kx dk \quad (5.13.2)$$

есть функция  $x$ , представляющая значение  $\zeta$  при  $z=-h$  и тем самым определяющая форму нижней границы, то смещение при других значениях  $z$  определяется выражением

$$\zeta = - \int_0^{\infty} F(k) \cos kx \frac{\sin yz}{\sin yh} dk. \quad (5.13.3)$$

Такой вывод справедлив лишь в случае, если уравнение, решением которого является выражение (5.13.1), линейно относительно  $\zeta$ , так как только при этом условии можно складывать компоненты интеграла, чтобы получить решение для данной формы граничной поверхности. Приведенные в данном разделе решения недействительны, если указанное уравнение нелинейно относительно  $\zeta$ . В выражении (5.13.3)  $v$  — функция  $k$ , которая

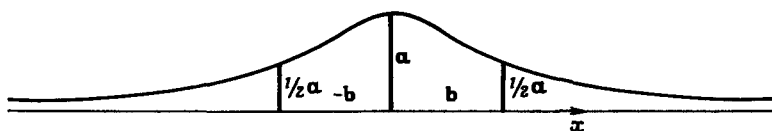


Рис. 5.13.1. Функция  $\zeta$ , определяемая уравнением (5.13.5).

при  $k > l$  становится мнимой. В этом случае ее можно заменить на  $\mu$  и получить вместо уравнения (5.13.1)

$$\mu^2 = k^2 - l^2, \quad \zeta \sim \text{sh } \mu z. \quad (5.13.4)$$

Выберем теперь наиболее известную и широко распространенную форму препятствия, которая определяется следующим легко вычисляемым интегралом Фурье:

$$\text{Re}(\zeta_{-h}) = \text{Re} \left( ab \int_0^{\infty} e^{-kb + ikx} dk \right) = a \frac{b^2}{b^2 + x^2}. \quad (5.13.5)$$

Эта форма показана на рис. 5.13.1. Параметр  $a$  дает максимальное значение  $\zeta$ , которое достигается при  $x=0$ , а  $b$  называется *полушириной* и представляет собой расстояние от точки максимума до точки, в которой высота препятствия равна  $1/2 a$ . Мнимая часть того же интеграла,

$$\text{Im}(\zeta_{-h}) = \text{Im} \left( iab \int_0^{\infty} e^{-kb + ikx} dk \right) = -a \frac{bx}{b^2 + x^2}, \quad (5.13.6)$$

дает профиль поднятия, расположенного за впадиной (рис. 5.13.2). Этот профиль не имеет большого практического значения, так как при больших  $x$  он убывает как  $x^{-1}$ , т. е. довольно медленно. В соответствии с выражением (5.13.3)

профиль (5.13.5) дает для смещения на высоте  $z$

$$\zeta = -ab \int_0^{\infty} e^{-kb + ikx} \frac{\sin v z}{\sin v h} dk = -ab \int_0^l e^{-kb + ikx} \frac{\sin v z}{\sin v h} dk, \quad (5.13.7)$$

или

$$\zeta = -ab \int_l^{\infty} e^{-kb + ikx} \frac{\operatorname{sh} \mu z}{\operatorname{sh} \mu h} dk. \quad (5.13.8)$$

Так как поверхность земли соответствует  $z = -h$ , то координата  $z$  всегда отрицательна и при  $k = l \sin v z / \sin v h = \operatorname{sh} \mu z / \operatorname{sh} \mu h = z/h$ , так как  $\mu = v = 0$ . Подынтегральная функция

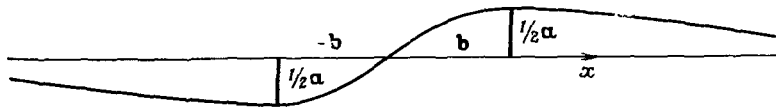


Рис 5.13.2. Функция  $\zeta$ , определяемая уравнением (5.13.6).

имеет особую точку при  $vh = n\pi$ , что соответствует  $\zeta_{-h} = 0$  [уравнение (5.10.4)]. Вычет в этой точке равен

$$R = e^{-k^*b + ik^*x} \sin v^* z \left/ \left\{ \frac{\partial}{\partial k} [\sin v(k) h] \right\} \right|_{k=k^*}, \quad (5.13.9)$$

где звездочка означает  $k = k^*$ , а  $k^*$  определяется из условия

$$v^* h = n\pi. \quad (5.13.10)$$

Деформируя контур интегрирования в плоскости  $k$ , как показано на рис. 5.13.3, видим, что  $iR$  входит под интеграл (5.13.7). Так как действительная часть  $iR$  пропорциональна  $\sin k^*x$ , то, по-видимому, существует простирающаяся в бесконечность последовательность волн, которую будем называть *подветренными волнами*. Поскольку  $R$  представляет собой решение волнового уравнения и в силу условия (5.13.10) равно нулю на границе  $z = -h$ , решение нашей задачи можно умножить на любую постоянную, и тем не менее оно будет удовлетворять исходному уравнению. При этом для определения величины  $R$  в окончательном решении необходимо привлечь дополнительное условие. Вычисляемый интеграл представляет собой интеграл от 0 до  $\infty$  вдоль действительной оси  $k$ . Особая точка лежит на контуре, и так как последний стягивает угол  $\pi$  в полюсе, то интеграл (5.13.7) равен

$$- \int_0^{\infty} - \int_{\infty, \theta}^0 a b e^{-kb + ikx} \frac{\sin v z}{\sin v h} dk + \pi i R, \quad (5.13.11)$$

где угол  $\theta$  положителен при положительных  $x$ , так как в противном случае подынтегральное выражение при больших значениях мнимой части  $k$  будет расти экспоненциально. Если же координата  $x$  отрицательна, то угол  $\theta$  также должен быть отрицательным и вычет надо брать со знаком минус, так как контур стягивает в особой точке угол  $-\pi$ . Таким образом, разность значений интеграла при больших положительных и отрицательных  $x$  составляет  $2\pi iR$ . Практическое значение имеет решение, не содержащее возмущений при больших отрицательных значениях  $x$ , т. е. далеко вверх по потоку от препятствия. В этом случае решение в области вверх по потоку от препятствия представляет собой интеграл без вычета в приведенной выше

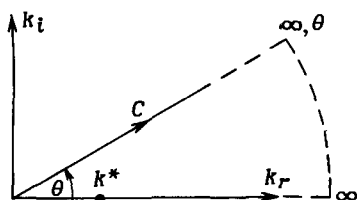


Рис. 5.13.3. Интеграл по действительной оси до бесконечности, сводящийся к интегралу по радиусу  $C$ .

Интеграл включает половину вычета в точке  $k^*$  подынтегрального выражения.

формуле, а течение вниз по потоку от препятствия представляется членом  $2\pi iR$ .

Этот вывод равноценен утверждению, что на самом деле особая точка лежит выше действительной оси в плоскости  $k$  и имеет положительную мнимую часть  $k_i$ , хотя она может быть сколь угодно малой. В этом случае вычет содержит множитель  $e^{-k_i^* x}$  и подветренные волны медленно затухают по мере перемещения вниз по потоку. Если они обладают этим свойством, то набегающий на препятствие поток не будет содержать волн; по той же причине, как и предполагалось, на большом расстоянии вверх по потоку от препятствия волны также будут отсутствовать. Ламб (§ 242, 245) получил такой же результат для подветренных волн на поверхности воды. Трение он представил в виде демпфирующей силы, пропорциональной скорости, и это позволило ему получить экспоненциальное затухание. Однако такой метод решения искусствен, так как требует сильных допущений о законе трения, которые, как отмечал сам Ламб, заведомо не соответствуют действительности и имеют смысл лишь постольку, поскольку позволяют получить желаемый результат.

Интеграл по дуге в бесконечности равен нулю, так как содержит множитель  $e^{-k_r b - k_i x}$ , который делает его экспоненциально убывающим. Поэтому в уравнении (5.13.11) остается интеграл вдоль радиуса  $C$  при угле  $\theta$ . Чтобы найти его

приближенное значение, заметим, что, во-первых, он содержит экспоненциальный член с отрицательным показателем степени, о котором только что говорилось, во-вторых, он имеет колебательный характер, так как содержит множитель  $e^{i(k_r x - k_l t)}$  (а это означает, что наибольший вклад в интеграл достигается при малых  $|k|$ ) и, в-третьих, множитель  $\sin v z / \sin v h$ , являющийся функцией  $k^2$ , в начале координат имеет нулевую производную по  $k$ . Следовательно, можно подставить значение этого множителя в начале координат ( $k=0$ ) и получить приближенное выражение

$$-ab \frac{\sin lz}{\sin lh} \int_0^{\infty, \theta} e^{-kb + -ikx} dk = -a \frac{b^2}{b^2 + x^2} \frac{\sin lz}{\sin lh}. \quad (5.13.12)$$

Тогда полное решение с учетом уравнения (5.13.9) и соотношений  $\partial v / \partial k = -k/v$  и  $\cos v^* h = (-1)^n$  получается в виде

$$\zeta = -a \frac{b^2}{b^2 + x^2} \frac{\sin lz}{\sin lh} + (-1)^{n+1} 2\pi \frac{abv^* e^{-k^* b}}{k^* h} \sin v^* z \sin k^* x. \quad (5.13.13)$$

Такой вид это уравнение имеет при  $x > 0$ ; если же  $x < 0$ , то второй член отсутствует. Если отсутствуют внутренние поверхности с узлами, то  $n=1$ , а при  $n=2$  появится дополнительный второй член (указанного вида).

Эта приближенная формула дает правильное значение  $\zeta$  на границе  $z=-h$ , а также на верхней границе при  $z=0$ , однако она, видимо, неверна вблизи  $x=0$  при промежуточных значениях  $z$ . Причиной является то, что член, соответствующий подветренным волнам, имеет разрыв производной при  $x=0$  и равен нулю при  $x < 0$ . Так как

$$-bk + ikx = [-(b \cos \theta + x \sin \theta) - i(b \sin \theta - x \cos \theta)] |k|, \quad (5.13.14)$$

то наилучшее приближение, по-видимому, можно получить при максимальном значении отрицательного показателя степени, который пропорционален  $b \cos \theta + x \sin \theta$  и дает  $\operatorname{tg} \theta = x/b$ . Однако при этом становится равной нулю колебательная составляющая, и приближение становится плохим, если контур, по которому ведется интегрирование, проходит вблизи особой точки, как это бывает, когда  $x$  и, следовательно,  $\theta$  малы. Вблизи особой точки допущение, что  $\sin v h$  можно заменить постоянной величиной, равной  $\sin lh$ , является ошибочным. Поэтому формула (5.13.11) дает плохие результаты при малых  $x$  на некотором удалении от границ  $z=-h, 0$ .

Правильней было бы сказать, что эта формула дает плохие результаты при малых  $x$ , когда  $b$  мало, так как мы предполо-

жили, что подинтегральное выражение при расстоянии  $k^*$  от начала координат имеет большую отрицательную степень. Поэтому  $bk^*$  должно быть большим (около 2 или более), так как в противном случае разрыв в производной подветренных волн при  $x=0$  нельзя считать малым.

За исключением тех случаев, когда  $b$  мало по сравнению с длиной подветренной волны, эти неточности можно устранить, проведя гладкие линии тока вблизи  $x=0$  и не обращая внимания на излом контура в этом месте. Однако при малых  $b$  на линиях тока есть волны, которые не учитываются при  $x \approx 0$ .

Чтобы определить параметры волн в модельном течении, подобном рассмотренному в разд. 5.10.2, заметим, что смещение при фиксированном  $k$  определяется формулами

$$\zeta_i = \operatorname{Re} [(Ae^{ivz} + Be^{-ivz})e^{ikx}], \quad (5.13.15)$$

$$\zeta_s = Ce^{-v_s z + ikx}, \quad k > l_s,$$

$$\zeta_s = Ce^{i(v_s z + kx)}, \quad k < l_s. \quad (5.13.16)$$

Здесь, как и в уравнении (5.13.3), поверхность раздела соответствует  $z=0$ , а поверхность земли  $z=-h$ . При  $z=0$   $\zeta$  и ее производная непрерывны и при  $k < l_s$ .

$$2Av = (v + v_s)C, \quad 2Bv = (v - v_s)C \quad (5.13.17)$$

и

$$\zeta_i \sim \operatorname{Re} [(v \cos v z + i v_s \sin v z) e^{ikx}]. \quad (5.13.18)$$

Если граничное условие на подстилающей поверхности при  $z=-h$  определяется уравнением (5.13.5), то полное возмущение в нижнем слое определяется выражением

$$\zeta_i = \operatorname{Re} \left[ ab \int_0^\infty e^{-kb + ikx} \frac{v \cos v z + i v_s \sin v z}{v \cos v h - i v_s \sin v h} dk \right] \quad (5.13.19)$$

совместно с членом, описывающим подветренные волны, который рассмотрим несколько позже. Вычисляя этот интеграл в том же приближении, что и ранее, положим в подинтегральном выражении  $v=l_i$  и  $v_s=l_s$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \zeta_i &= abp \int_0^\infty e^{-kb} [\cos kx (l_i^2 \cos l_i h \cos l_i z - l_s^2 \sin l_i h \sin l_i z) - \\ &\quad - l_i l_s \sin kx (\cos l_i h \sin l_i z + \sin l_i h \cos l_i z)] dk = \\ &= \frac{ab^2 p}{b^2 + x^2} (l_i^2 \cos l_i h \cos l_i z - l_s^2 \sin l_i h \sin l_i z) + \\ &\quad + \frac{abx p_i}{b^2 + x^2} l_i l_s \sin l_i (z + h), \end{aligned} \quad (5.13.20)$$

где

$$\rho^{-1} = l_i^2 \cos^2 l_i h + l_s^2 \sin^2 l_i h. \quad (5.13.21)$$

Член, описывающий подветренные волны, получим из интеграла, введя в него  $\mu_s$  вместо  $\nu_s$ , так как условие захвата волны имеет вид  $k^* > l_s$ . Поэтому  $i\nu_s$  в уравнении (5.13.17) заменим на  $-\mu_s$  и найдем для полного возмущения

$$\zeta_i = ab \int_0^\infty e^{-kb + ikx} \frac{\nu \cos \nu z - \mu_s \sin \nu z}{\nu \cos \nu h + \mu_s \sin \nu h} dk. \quad (5.13.22)$$

Уравнение для  $k^*$  получим, приравняв знаменатель подынтегрального выражения нулю:

$$\nu^* \operatorname{ctg} \nu^* h = -\mu_s^*. \quad (5.13.23)$$

Это уравнение, естественно, совпадает с уравнением (5.10.20). Член, учитывающий подветренные волны, можно упростить, используя уравнение (5.13.23), и с помощью вычета подынтегрального выражения в уравнении (5.13.22) привести к виду

$$2\pi \frac{ab\nu^*{}^3 \mu_s^* e^{-k^* b} \sin \nu^*(z+h) \sin k^* x}{k^* \sin^2 \nu^* h [\nu^*(\mu^* h - 1) - \mu^*{}^2(1 + k^* h)]}. \quad (5.13.24)$$

В верхнем слое подветренная волна пропорциональна  $e^{-\nu^* z}$  и равна значению в нижнем слое при  $z=0$ . Следовательно, она равна

$$2\pi \frac{ab\nu^*{}^3 \mu_s^* e^{-k^* b - \mu_s^* z} \sin k^* x}{k^* \sin^2 \nu^* h [\nu^*(\mu^* h - 1) - \mu^*{}^2(1 + h^* k)]}. \quad (5.13.25)$$

Интеграл в верхнем слое равен интегралу (5.13.19) при  $z=0$  и пропорционален  $e^{i(\nu_i z + kx)}$ . Поэтому его можно представить в виде

$$\zeta_s = \operatorname{Re} \left[ ab \int_0^\infty e^{-kb + ikx + i\nu_s z} \frac{\nu}{\nu \cos \nu h - i\nu_s \sin \nu h} dk \right], \quad (5.13.26)$$

или в том же приближении, что и выше, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{ab^2 p l_i}{b^2 + x^2} (l_i \cos l_i h \cos l_s z - l_s \sin l_i h \sin l_s z) + \\ & + \frac{abx p l_i}{b^2 + x^2} (l_i \cos l_i h \sin l_s z + l_s \sin l_i h \cos l_s z). \end{aligned} \quad (5.13.27)$$

Последнее выражение совпадает с выражением (5.13.20) при  $z=0$ . Чтобы образовать полное решение при  $x > 0$ , к нему прибавлен член (5.13.24), учитывающий подветренные волны.



Очевидно, более сложные модели, например трехслойные, связаны с гораздо более громоздкими выкладками, но в принципе не отличаются от описанной. Кроме того, используя соот-



Рис. 5.13.4. Амплитуда подветренной волны, создаваемой препятствием заданной высоты.

Амплитуда достигает максимума, когда ширина препятствия равна примерно  $2/\pi$  длины волны. Форма препятствия показана на рис. 5.13.1.

ветствующие интегралы Фурье, можно рассматривать препятствия различных очертаний. Примеры таких исследований

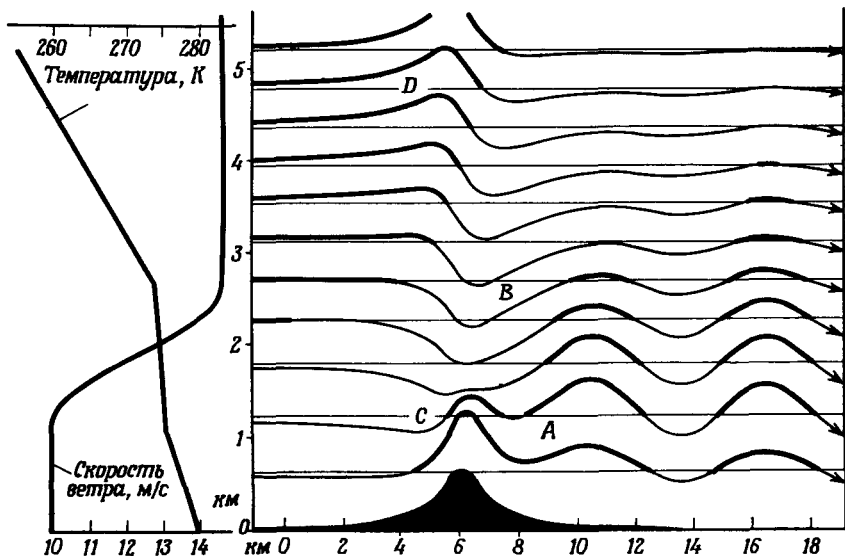


Рис. 5.13.5. Результаты расчета подветренных волн за двумерным горным хребтом в случае их захвата

Слева показаны профили скорости ветра и температуры. Эффект трехслойной модели достигнут с помощью двухслойной модели В верхней половине нижнего слоя значение величины  $P$ , определяемой уравнением (5.10.28), поддерживалось постоянным, хотя  $U_0$  менялось Это позволило избежать разрыва  $U_0$  на поверхности раздела

приведены в работе Уоллингтона (1958). Скорер и Клифорт (1959) использовали трехслойную модель специального вида, чтобы лучше аппроксимировать граничное условие на поверхности раздела. В рассмотренном ими случае непрерывными на поверхности раздела, где амплитуда велика, были не только  $\zeta$

и  $\partial \zeta / \partial z$ , но и  $\partial^2 \zeta / \partial z^2$ . Это позволяло лучше удовлетворять граничные условия для возмущенного положения поверхности раздела.

Все формулы в этом примере содержат множитель  $b e^{-k^* z}$ , учитывающий поведение подветренных волн. При заданном  $k^*$ , он достигает максимума при  $b k^* = 1$ . Это означает, что волны наибольшей амплитуды возбуждает возвышенность, половина ширины которой равна примерно  $1/6$  длины волны (рис. 5.13.4).

За примерами отошлем читателя к работам Скорера (1949 и 19536). Структура волн, приведенная в первой из этих работ, показана на рис. 5.13.5. Сойер (1960) выполнил вычисления, в которых более точные значения интеграла были получены путем прямого численного интегрирования. На всех его диаграммах показано смещение  $\zeta$ , вычисленное при постоянных значениях  $z$ , и не используется то обстоятельство, что разработанная теория справедлива при сравнительно больших  $\zeta$ . Поэтому на них не видны вихри там, где, судя по числовым значениям переменных, они должны быть. На некоторых диаграммах Сойера линии тока пересекаются, однако это следует рассматривать не как ошибку, а как результат графического представления вычисленных значений  $\zeta$ .

#### 5.14. Влияние ветрового профиля на подветренные волны

Рассмотрим волновое уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\beta^2 - k^2)\zeta = 0. \quad (5.14.1)$$

Если набегающий поток имеет вертикальный градиент скорости, то  $\beta^2$  зависит от высоты  $z_0$  (если  $\beta$  не меняется так, что  $\beta^2 = g\beta/u_0^2$  остается постоянным), которая в свою очередь зависит от  $\zeta$ , и рассматриваемое уравнение становится нелинейным. Однако влияние на  $\beta^2$  точно такое же, как если бы менялось  $\beta$ . Поэтому некоторые особенности влияния ветрового градиента можно понять, изучая влияние члена, содержащего  $\alpha$ , и полагая  $\beta^2$  постоянным или меняющимся в незначительных пределах. Если  $\beta^2$  и  $\alpha$  — постоянные величины, то решение имеет вид

$$\zeta \sim \exp(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + k^2})z. \quad (5.14.2)$$

Отсюда вытекает, что если величина  $\alpha$  положительна и, следовательно, скорость ветра с высотой увеличивается, как  $e^{\alpha z}$ , то влияние ветрового градиента будет двояким. Благодаря члену  $e^{-\alpha z}$  волны быстрее ослабевают с высотой, и в то же время значение  $k$ , которому соответствуют характеристики потока, при

замене  $k^2$  на  $\alpha^2 + k^2$  убывает. В результате более длинные волны синусоидально изменяются по высоте в более узком диапазоне длин волн. Те волны, длины которых отвечают условию  $l^2 > k^2 > l^2 - \alpha^2$ , имеют скорее экспоненциальный, чем синусоидальный характер изменения в зависимости от  $z$ .

Если величина  $\alpha$  отрицательна, то последнее свойство остается таким же, но теперь смещение  $\zeta$  пропорционально  $e^{\alpha z}$ . Это следствие того обстоятельства, что жидкость, движущаяся с большей скоростью, ведет себя так, как если бы она обладала большей инерцией, чем жидкость, движущаяся с меньшей скоростью, и, следовательно, если верхние слои движутся медленнее, амплитуда волны должна быть больше, чтобы создать поле давления, необходимое для поддержания волн на меньших высотах. Поэтому увеличение скорости ветра с высотой означает, что амплитуда волны убывает и в то же время влияние увеличения  $u_0^2$  на  $l^2$  такое же, как если бы убывало  $\beta$ , и, следовательно, как уже отмечалось, диапазон длин волн, в котором вертикальное смещение меняется по синусоиде, сужается. Выше уже отмечалось, что для захвата подветренных волн  $l^2$  в верхних слоях должно быть малым. Теперь мы видим, что увеличение скорости ветра с высотой в верхних слоях делает захват в нижних слоях более эффективным, если  $l^2$  при смещении вниз увеличивается.

Если ограничиться изучением волн малой амплитуды, то для вертикальной составляющей скорости в соответствии с уравнением (5.8.20) можно записать

$$\zeta = \frac{w}{iku_0}. \quad (5.14.3)$$

Тогда при  $\beta = 0$  получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left( \frac{1}{u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z_0^2} + k^2 \right) w = 0, \quad (5.14.4)$$

при выводе которого предполагается, что частные производные по  $z$  и  $z_0$  равны, а это допустимо лишь при малых  $\zeta$ . Из уравнения (5.14.4) следует, что отрицательная вторая производная  $\partial^2 u_0 / \partial z_0^2$  равнозначна положительному  $\beta$  [см. уравнение (5.10.28)]. При  $\partial^2 u_0 / \partial z^2 = \text{const} = m^2$  уравнение (5.14.4) имеет решение

$$w \sim \sin n(z - z_1), \quad (5.14.5)$$

где

$$n^2 = k^2 - m^2. \quad (5.14.6)$$

Однако в то же время

$$u_0 \sim \sin m(z - z_0) \quad (5.14.7)$$

и так как  $m > n$ , то расстояние по вертикали между нулями  $u_0$  меньше, чем между нулями  $w$ , или, иначе говоря, кривизна профиля  $u_0$  больше, чем кривизна профиля  $w$ . Отсюда следует, что если нас интересуют условия, при которых стоячие волны возникают за счет кривизны профиля скорости, а не вследствие того, что  $\beta$  в нижних слоях положительно, то мы получим нулевое значение  $w$  для уровня земли на меньшей высоте, чем нулевое значение  $u_0$ . Однако из уравнения (5.14.3) вытекает, что ситуация, когда значение  $u_0$  в потоке равно нулю, невозможна. Поэтому сама по себе кривизна профиля скорости не может обеспечить захват стоячих волн в приземных слоях атмосферы.

Некоторые авторы предполагали, что положительное значение  $\partial^2 u_0 / \partial z_0^2$  оказывает такое же влияние, как отрицательное  $\beta$ , и поэтому является дестабилизирующим. Этот вывод неверен, так как указанное влияние сводится лишь к изменению диапазона значений  $k$ , в котором проявляются те или иные свойства устойчивых волн. Однако если  $u_0$  не обращается в нуль, то присутствие слоев, в которых величина  $\partial^2 u_0 / \partial z_0^2$  сравнима с  $g\beta/u_0$ , иногда позволяет захватить волны с определенным волновым числом  $k$ , которые не были бы захвачены, если бы ветровой профиль не был криволинейным (см., например, Скорер, 1949).

Хорошо известна теорема (см., например, Дрейзин и Хоуард, 1966), согласно которой поток жидкости постоянной плотности при некоторых длинах волн может быть неустойчивым, если на профиле скорости двумерных волн есть точка перегиба; в противном случае поток устойчив. Это значит, что для возникновения неустойчивости должен существовать слой, в котором ветровой градиент максимален, т. е. слой с большей завихренностью, чем слои, расположенные над и под ним. Возникающее при этом явление подробно анализируется в гл. 6.

С другой стороны, совсем не просто указать условия, при которых сложные профили скоростей могут приводить к появлению стоячих волн. В недавно опубликованной работе Бэнкса, Дрейзина и Затурской (1976) показано, насколько сложной может быть эта задача, когда максимум и минимум скорости достигаются в самом потоке, а не на границах.

## 5.15. Подветренные волны при обтекании трехмерных препятствий

Так как расчет обтекания трехмерных препятствий крайне сложен, продемонстрируем основные особенности таких течений на простейшем примере, встречающемся в природе. С этой

целью рассмотрим волны за источником возмущений, каким является, например, судно, движущееся по поверхности глубокой воды. Вся структура возникающих при этом волн остается неподвижной относительно судна и может рассматриваться как подветренные волны. Скорость волн на глубокой воде  $U$  определяется выражением

$$U^2 = \frac{g}{k}, \quad (5.15.1)$$

и если линейное возмущение составляет с нормалью к направлению движения угол  $\varphi$ , то поперечная составляющая  $U \cos \varphi$  создает волны. Продольную составляющую скорости можно добавить после того, как форма волновой структуры найдена.

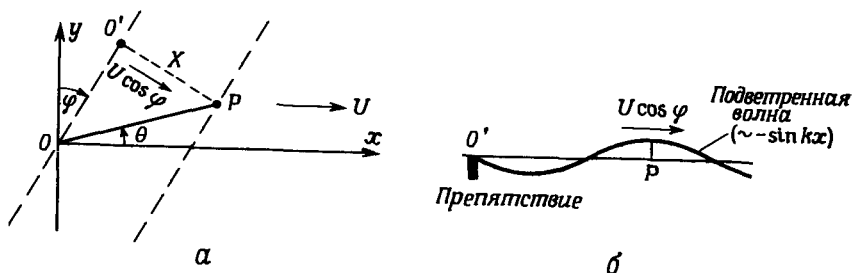


Рис. 5.15.1. Система координат (а) и подветренная волна в вертикальной плоскости за препятствием (б).

Волна в точке  $P$ , параллельной линейному препятствию  $OO'$ , составляющему с нормалью к набегающему потоку угол  $\varphi$ . Набор линейных препятствий с разными углами  $\varphi$  образует в точке  $O$  изолированное препятствие. Подветренные волны получаются суммированием отдельных подветренных волн. Справа показана элементарная подветренная волна в вертикальной плоскости, проведенной через  $O'P$ .

Если подветренные волны пропорциональны  $\sin kx$ , где  $x$  — расстояние, отсчитываемое вниз по потоку в направлении перпендикуляра к линейному препятствию (рис. 5.15.1), то для точки  $P$  с полярными координатами  $r, \theta$  из определения  $X$  и уравнения (5.15.1) получим следующие два уравнения:

$$X = r \cos(\varphi + \theta), \quad k = \frac{g}{U^2 \cos^2 \varphi}. \quad (5.15.2)$$

Представим теперь себе возмущение с центром в точке  $O$ , образованное системой линейных препятствий с углами  $\varphi$ , лежащими в интервале  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  и образующими каждое свои подветренные волны. Общая волновая картина за препятствием представляет собой сумму всех подветренных волн. Если точка  $P$  лежит на гребне волны в общей волновой структуре, то ее положение соответствует огибающей линии гребней отдельных подветренных волн, где

$$kX = N, \quad (5.15.3)$$

а  $N$ , в случае гребня,— фаза. Точно так же узлы и впадины суммарной волновой структуры представляют собой огибающие отдельных линий узлов и впадин, причем  $\varphi$  служит параметром, определяющим ту или иную из подветренных волн. Огибающая получается как геометрическое место пересечений линий, соответствующих уравнению (5.15.3), с линиями для соседнего значения  $\varphi$ . Ее уравнение найдем, решая совместно уравнение (5.15.3) и уравнение, получающееся в результате его дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (kX) = 0. \quad (5.15.4)$$

С помощью уравнения (5.15.2) эти два уравнения легко приводятся к виду

$$r \sec^2 \varphi \cos(\varphi + \theta) = a = NU^2/g, \quad (5.15.5)$$

$$2 \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi + \theta), \quad (5.15.6)$$

Если теперь положим  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ , то получим следующие уравнения для фазовых линий суммарной волновой структуры:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi (2 - \cos^2 \varphi), \\ y &= a \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (5.15.7)$$

причем параметр  $\varphi$  меняется в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ .

Наиболее интересной чертой этой волновой картины, показанной на рис. 5.15.2, является то, что она заключена между двумя значениями  $\theta$ . Так как из уравнения (5.15.6) следует

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad (5.15.8)$$

то ясно, что угол  $\theta$  равен нулю при  $\varphi=0$  или  $\pm\pi/2$ , а его максимум достигается при

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{2}, \quad (5.15.9)$$

т. е. при

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = 2^{-3/2},$$

или

$$|\theta_{\max}| = 19^\circ 28'. \quad (5.15.10)$$

Все фазовые линии волновой картины имеют одинаковую форму и получаются при последовательных значениях  $N$ , которые увеличиваются на  $2\pi$  при переходе от одного гребня к другому.

Полученные формулы имеют простой вид благодаря простоте уравнения (5.15.1), которое связывает длину волны со скоростью на глубокой воде. В стратифицированной жидкости простейшим соотношением является уравнение (5.10.5) для случая течения между твердыми горизонтальными границами. Тогда уравнения (5.15.2) заменяются уравнениями

$$X = r \cos(\varphi + \theta), \quad k^2 = \frac{g^2}{U^2 \cos^2 \varphi} - \frac{r^2 n^2 \pi^2}{h^2}, \quad (5.15.11)$$

и уравнения (5.15.3) и (5.15.4) сильно усложняются. Теперь при

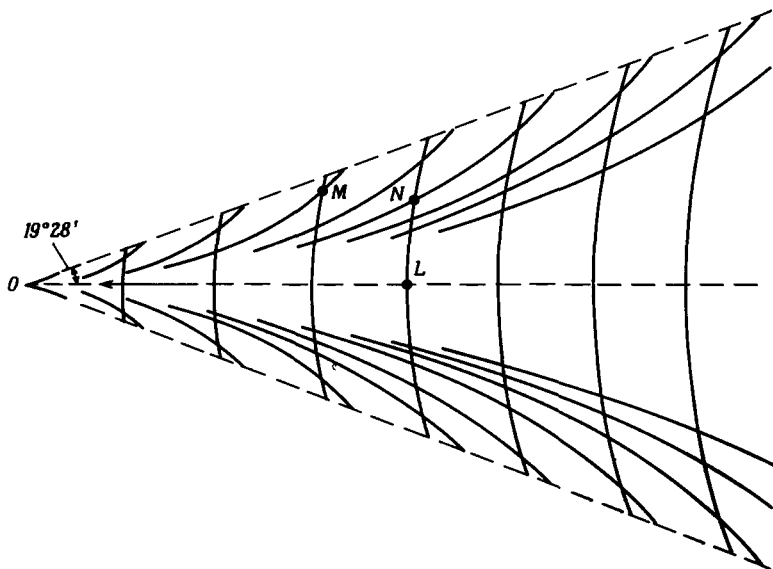


Рис 5.15.2. Линии гребней суммарной структуры подветренных волн за возмущением с центром в точке  $O$ , движущимся по поверхности глубокой воды.

Другие линии постоянной фазы имеют аналогичную форму. Точки  $M$ , в которых расходятся линии постоянной фазы пересекают такие же поперечные линии, соответствуют максимуму амплитуды волны. Иногда достигается второй максимум в точке  $N$ , но его не следует путать (в случае корабля) с гребнями волн типа  $M$ , создаваемых кормой корабля. Поперечные волны в точках  $L$  велики, однако для хорошо спроектированного корабля, идущего с расчетной скоростью, суммарное возмущение, создаваемое главным образом его носом и кормой, здесь минимально, и этим обеспечивается минимум волнового сопротивления.

$\varphi$ , стремящемся к  $\pm\pi/2$ ,  $n$  можно последовательно полагать равным 2, 3, ... и получать более высокие моды подветренных волн, вносящих свой вклад в волновую структуру. Обычно вклад этих мод пренебрежимо мал, так как они ограничены малым диапазоном углов  $\varphi$  и их амплитуда в двумерном случае, для которого они и получены, имеет меньшие значения. Поэтому в дальнейшем будем ими пренебрегать, полагая  $n=1$

в уравнениях (5.15.11) и аналогичных уравнениях для других случаев.

Некоторые детали волновой картины можно получить с помощью следующего альтернативного подхода. Возмущение произвольной формы в точке  $O$  можно представить в виде

$$\zeta(r, \theta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\varphi) f(X) d\varphi, \quad (5.15.12)$$

где  $f(X)$  — профиль одной из его составляющих, а  $\Phi(\varphi)$  — ее амплитуда, изменяющаяся в зависимости от  $\varphi$ . Таким образом, если  $\Phi=1$ , т. е. все препятствия одинаковы и имеют в поперечном сечении вид тонкой стенки с единичной площадью, то на расстоянии  $r$  от начала координат высота препятствия, определяемая уравнением (5.15.12), обратно пропорциональна  $r$ . Если ширина «стенки»  $b$ , то при  $r < b$  препятствие имеет плоскую вершину; при  $r > b$  его высота убывает и при больших  $z$  становится обратно пропорциональной  $r$ .

Если подветренные волны за линейными препятствиями пропорциональны  $\sin kX$ , то суммарная волновая картина описывается выражением

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\varphi) e^{ikX} \zeta(z, \varphi) d\varphi, \quad (5.15.13)$$

где  $\zeta(z, \varphi)$  представляет изменение отдельных волн по высоте, зависящее от  $\varphi$ .

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся принципом стационарной фазы. Запишем

$$kX = k^* X^* + 1/2 (\varphi - \varphi^*)^2 (k^* X^*)'' + 0 (\varphi - \varphi^*)^3, \quad (5.15.14)$$

где звездочками обозначены значения функций при  $\varphi = \varphi^*$ , а  $\varphi^*$  — значение  $\varphi$ , при котором

$$(kX)' = 0 \quad \text{и} \quad (k^* X^*)' = 0. \quad (5.15.15)$$

Штрихом здесь обозначена частная производная по  $\varphi$ . Раз  $e^{ikX}$  — колебательная функция  $\varphi$ , то основной вклад в интеграл (5.15.13) вносится в окрестности значений  $\varphi$ , удовлетворяющих уравнению (5.15.15), так как здесь  $e^{ikX}$  меняется очень медленно, поскольку фаза  $kX$  в области интегрирования стационарна лишь в этой точке. Поэтому хорошее приближенное значение интеграла получим, заменив переменные  $\Phi(\varphi)$  и  $\zeta(z, \varphi)$  их значениями при  $\varphi = \varphi^*$ . Воспользуемся также формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{im^2 \xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{i(\pi/4)}, \quad (5.15.16)$$



в которой  $i$  можно всюду заменить на  $-i$ . Если  $m^2$  — отрицательная величина, то правая часть этого уравнения заменяется на  $\pi^{1/2} e^{i\pi/4} / |m|$ . Поэтому в рассматриваемом случае приближенное значение действительной части интеграла (5.15.13) имеет вид

$$\Phi(\varphi^*) \zeta(z, \varphi^*) \left( \frac{2\pi}{|(k^* X^*)''|} \right)^{1/2} \cos \left( k^* X^* \pm \frac{\pi}{4} \right), \quad (5.15.17)$$

причем верхний или нижний знак берется в зависимости от того, является  $(k^* X^*)''$  положительным или отрицательным. Теперь  $\varphi^*$  — параметр, и можно видеть, что там, где фаза постоянна,  $k^* X^* = \text{const} = N$ , т. е. справедливо уравнение (5.15.3). Кроме того, уравнения (5.15.15) эквивалентны уравнению (5.15.4). Максимальное значение  $\theta$  в уравнении (5.15.8), которое соответствует уравнению (5.15.4), записанному для частного случая структуры волн на глубокой воде, было получено дифференцированием по  $\varphi$ . Это означает, что на внешней границе области, в которой развиваются волны,  $(k^* X^*)''$  равно нулю и меняет знак при прохождении  $\varphi$  через значение, при котором  $\theta$  становится максимальным. В соответствии с этим меняется знак в уравнении (5.15.17) и к фазе  $N$  прибавляется  $\pi/2$ . Поэтому волны на рис. 5.15.2 изображены так, что фазы поперечных и расходящихся волн сдвинуты на  $\pi/2$ .

Выводя уравнение (5.15.17), мы заменили пределы интегрирования в интеграле (5.15.13) на  $\pm\infty$ . При этом мы исходили из того, что периодические изменения величины подынтегрального выражения на значительном удалении от стационарной фазы мало влияют на величину интеграла.

Тот факт, что вблизи границы амплитуда велика, становится очевидным из уравнения (5.15.17), хотя это приближение теряет смысл на границе, где  $(k^* X^*)'' = 0$ . Поэтому следует ожидать, что волны будут особенно сильно выражены в этой окрестности. Более точное вычисление значения интеграла в этой области с учетом члена, содержащего  $(k^* X^*)'''$  и  $(\varphi - \varphi^*)^3$ , методом, описанным Скорером (1950), было выполнено Уорреном (1961). Формула (5.15.17) показывает также, как амплитуда волн зависит от функции  $\Phi$ . Поперечные волны, которые возникают при  $0 < |\varphi| < \varphi^*$ , обладают наибольшей интенсивностью, когда препятствие имеет большую протяженность поперек потока, а препятствия, вытянутые в направлении движения, имеют большие  $\Phi$  при  $|\varphi| > \varphi^*$ . Поэтому длинная узкая лодка, такая как восьмерка, создает только расходящиеся волны, а короткая с плоским транцем — только поперечные. Эти особенности подветренных волн иллюстрируются рис. 5.15.3 и 5.15.4.

Точно так же можно изучать подветренные волны за холмом в стратифицированном потоке, когда могут возникать стоячие



Рис. 5.15.3. Волновая структура за быстро движущейся моторной лодкой.

Снимок сделан с Эйфелевой башни. Видны только расходящиеся волны.

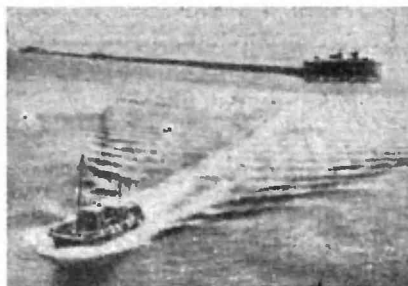


Рис. 5.15.4. Волновая структура за буксирным катером.

Превалируют поперечные волны.

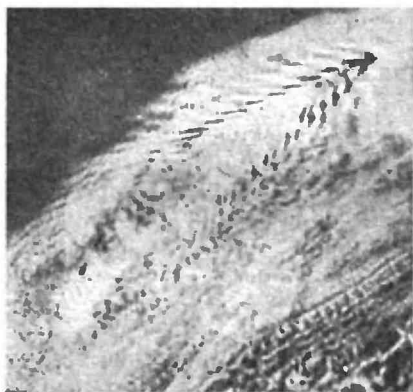


Рис. 5.15.5. Подветренные волны за островом Ян-Майен при северном ветре.

Дополнительные волны с западной стороны созданы пиком меньшей высоты (см. рис. 2.11.3). Снимок сделан со спутника NOAA 5. Этот и следующий фотоснимки публикуются с разрешения электротехнического факультета Университета Данди.



Рис. 5.15.6. Облака над Ирландией с ярко выраженной структурой типа волн за кораблем.

Видны поперечные волны за горами Маурн (852 м). Снимок сделан со спутника NOAA 5.

волны. Пример такого исследования был дан Скорером и Уилкинсом (1956). Максимальное значение  $\theta$ , при превышении которого возмущения отсутствуют, зависит от условий течения, и в указанном примере было показано, что волновая структура

при соответствующем выборе параметров может охватывать область внутри угла  $\pm 45^\circ$  (с точностью до  $\pm 1^\circ$ ). Пример очень узкой области распространения волновой структуры показан на рис. 5.15.5, а пример широкой области с поперечными волнами — на рис. 5.15.6.

Если функция  $\Phi(\varphi)$  не симметрична относительно  $\varphi=0$ , то и волновая структура не симметрична. Форма возмущения, создаваемого овальным препятствием, наклоненным под некоторым углом к потоку, была получена Скорером (1956). Очевидно, существует бесчисленное множество разных случаев, основные особенности которых можно выявить изложенным способом. Следует также помнить, что, пользуясь подобными методами, нет смысла стремиться получить более детальную картину, так как в практически важных случаях невозможно с какой-либо точностью задать граничные условия и профиль скоростей набегающего воздушного потока. Беркшайер (1975) применял подобные методы для изучения трехмерных волновых структур в стратосфере, чтобы получить качественные результаты, однако расчеты такого рода вряд ли могут дать полезные результаты. Их можно применить лишь для изучения причин явлений в хорошо документированных случаях, которое может быть выполнено значительное время спустя после того, как явление имело место.

## 5.16. Некоторые важные свойства подветренных волн

Волны над препятствием и вблизи него очень сильно зависят от его формы. Действительная трудность применения изложенной выше теории заключается в характере допущений. Так, было сделано допущение, что профиль течения на большом расстоянии перед препятствием может быть задан и его можно считать невозмущенным. Если препятствие внезапно помещается в поток, то от него вверх по потоку всегда распространяется уступообразная волна (бор), которая изменяет высоту поверхностей Бернулли в набегающем потоке. Неверно будет предполагать, что данный поток и данное препятствие совместимы в том смысле, что прежде чем будет достигнуто стационарное состояние, не возникнет никаких возмущений такого типа.

Предполагалось также, что стационарное состояние существует, однако в пользу этого не было приведено никаких аргументов. Это особенно важно в случае отрыва потока от поверхности, так как вслед за отрывом устанавливается периодическое течение (разд. 5.18), подобное сбеганию вихрей с цилиндра.

Тем не менее волны над горами и подветренные волны действительно существуют, а волны, распространяющиеся от препятствий вверх по потоку, никогда достоверно не регистрировались. Формулы, выведенные для подветренных волн, например (5.13.11), показывают, что амплитуда подветренной волны может быть равна или даже больше высоты препятствия. В случае захваченных волн в рамках двухслойной модели формулы, подобные (5.13.19) и (5.13.23), показывают, что при профиле потока, позволяющем захватить волны, возмущение над горой может достигать большей высоты, чем в потоке, не содержащем таких волн.

Иногда подветренные волны могут быть по высоте гораздо больше, чем само препятствие, и, подбирая параметры, входящие в формулы, можно предсказать, при каких условиях это будет. На практике самые большие подветренные волны образуются, когда воздушные массы стекают вниз с плато, не отрываясь от поверхности. Этот эффект обусловлен подводом к потоку дополнительной энергии. Наши решения построены так, что источник энергии в явном виде отсутствует. В случае течения между двумя жесткими границами это может быть оправдано падением давления в направлении течения, однако для потока бесконечной глубины без каких-либо возмущений на верхней границе такое объяснение неприемлемо. В атмосфере поток мог бы ускориться за счет отклонения в сторону низкого давления, поперек изобар, но такое ускорение не может оказывать большого влияния на расстояниях, которые очень малы по сравнению с расстояниями, на которые переносятся воздушные массы в течение суток. С другой стороны, теория, развитая для случая отсутствия верхней границы, исходит из малости амплитуды, и энергетические соображения к ней неприменимы, так как энергия представляется квадратичными членами.

Другой причиной, вызывающей большие подветренные волны, помимо стекания воздушных масс с плато, является наличие нескольких параллельных хребтов, удаленных друг от друга на целое число длин подветренных волн. Амплитуда волны может удваиваться вторым препятствием, находящимся на расстоянии длины волны вниз по потоку от первого.

Точно так же второе препятствие, если поместить его вниз по потоку на расстоянии, равном нечетному числу полуволн, может полностью погасить подветренные волны, созданные первым препятствием. В общем случае второе препятствие просто меняет фазу подветренных волн. На рис. 5.16.1 показаны горы 1 и 2, обтекаемые двумя воздушными потоками, причем для потока, показанного штриховыми линиями, длина подветренных волн равна половине длины волн в другом потоке.

Если гора 2 смещена вниз по потоку на одну или три длины волны, то подветренные волны складываются, а если она смещена на половину или полторы длины волны, то они гасятся.

Так как составляющая скорости вдоль двумерного хребта не подвержена его влиянию и сохраняет свое невозмущенное значение на всех поверхностях Бернулли, то поток с заданным ветровым профилем может создавать подветренные волны,

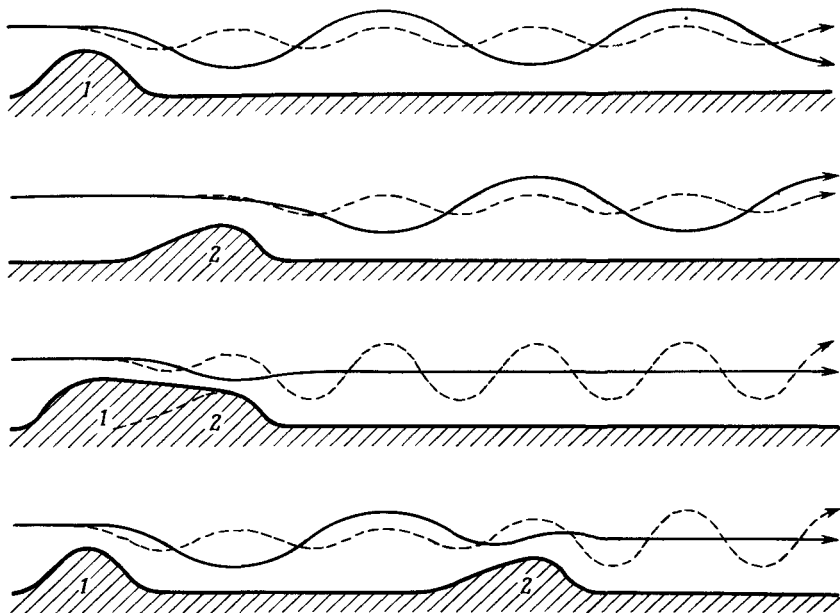


Рис. 5.161 Обтекание гор двумя воздушными потоками

Гора 1 создает подветренные волны в двух воздушных потоках, причем длина волны в одном вдвое больше, чем в другом. Если за горой 1 расположена гора 2, то подветренные волны могут усиливаться или ослабевать. В данном случае амплитуда коротких волн удваивается, а длинные волны, наоборот, гасятся.

когда он пересекает два параллельных хребта под одним углом, и не создавать волн, когда пересечение хребтов происходит под разными углами. Редкое стечение обстоятельств может привести к возникновению очень больших подветренных волн, и тогда во впадине волны возникает очень сильный ветер, хотя в целом погода может быть безветренной; может развиться также возвратное течение в случае образования вихря у поверхности земли под гребнем волны. Подобные подветренные волны срывали крыши с домов в пригороде Шеффилда, хотя многие из них спокойно простояли по 50 и более лет. Вызвавший это происшествие порыв ветра особенно примечателен по

той причине, что по обе стороны от него — и совсем недалеко — ветра не было. Редким стечением обстоятельств в этом случае было совпадение длины подветренных волн в воздушном потоке с расположением трех последовательных линейных препятствий.

Когда ветер переносит насекомых через горный хребет, то они скорее всего опустятся в зоне затишья под гребнем подветренной волны, а не в зоне сильного ветра под впадиной, и их распределение может выглядеть подозрительно, как если бы кто-то с враждебными намерениями сбрасывал их рядами. На о-ве Мэн существует поверье, что крышу дома или сарая срывают феи, недовольные строительством на их территории. Эта теория «подтверждается» тем, что крыша после ремонта опять слетает. На самом деле причиной является строго локализованный ветер, который нигде поблизости не ощущается.

Одной из присущих подветренным волнам особенностей является то, что они сильнее проявляются по ночам. На заре небо обычно покрыто волнистыми облаками, которые днем исчезают и заменяются конвективными облаками. При заходе солнца часто опять появляются волнистые облака. Облачные валы, образование которых связано с волнистыми облаками, обнаруживают те же суточные вариации. Наиболее сильные порывы в подветренных волнах случаются по ночам, и именно в это время «феи» срывают крыши сараев.

Одним из наиболее замечательных примеров вечерних волн является происходящее в центре планерного спорта в Грейт-Хаклоу близ Шеффилда (см. Роупер, 1952), недалеко от того места, где были сорваны крыши. Центр расположен на вершине второй гряды и по вечерам подвержен действию подветренных волн. Их называли вечерними термиками, так как думали, что они связаны с подъемом теплого воздуха по западному склону, который последним обогрывается лучами заходящего солнца. На самом деле это место часто оказывается в зоне полного штиля под гребнем первой подветренной волны от гряды, расположенной вверх по потоку (рис. 5.16.2). Поэтому хотя трудно бывает поднять планер, катапультируя его с вершины хребта в движущийся вверх по склону поток, планерам, уже находящимся в воздухе на высоте нескольких сотен метров, часто бывает очень легко найти восходящую часть волны и подняться вместе с ней на большую высоту.

Ранее это явление объясняли реверсированием разрушения устойчивой стратификации в приземных слоях, вызываемого нагревом земли солнечным излучением в утренние часы; при этом, как предполагали, уменьшалось значение  $l^2$  вблизи земли и захват волн становился невозможным. Теперь кажется более вероятным, что это результат прекращения отрыва потока от подветренной стороны препятствия. (Изучению отрыва потока

посвящен разд. 5.18.) Причина, по которой первое объяснение с привлечением волн вряд ли является правильным, состоит в том, что устойчивая стратификация, создаваемая охлаждением земной поверхности, оказывает влияние только на очень тонкий слой воздуха вблизи поверхности в первые несколько часов после захода солнца. С другой стороны, утренний нагрев поверхности может изменить стратификацию на большей глубине за короткое время.

В северной Англии в долине реки Иден, где подветренные волны известны уже давно, образующееся в первой подветрен-

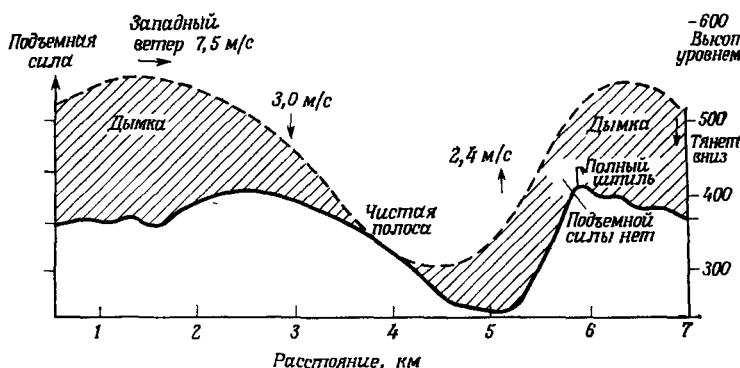


Рис. 5.162 Связь между вечерними волнами в воздушных потоках и верхней границей дымки.

Этот пример, заимствованный из работы Роупера (1952), демонстрирует наблюдавшуюся ситуацию, когда после появления вечерних волн образовалась волна, при которой на вершине второй гряды воздух был совершенно неподвижен. «Чистая полоса» могла быть отчасти оптической иллюзией, так как дымка в вечерней тени на восточном склоне холма не видна.

ной волне облако по утрам постепенно удаляется от горного хребта и наконец исчезает. Местное предание гласит, что оно никогда не пересекает реку (см. Мэнли, 1945). Таким образом, длина подветренной волны увеличивается ( $k^*$  убывает), как и следует ожидать, поскольку глубина устойчивого слоя в нижней части воздушного потока убывает снизу за счет дневной конвекции и время, за которое совершается одно колебание, увеличивается. Однако, опираясь на идеи, высказанные в разд. 5.10.3, можно предположить, что так как слой с большим  $\beta$  утончается, то для достижения нуля на поверхности земли потребуются меньшее значение  $k$ . Это связано с увеличением кривизны профиля  $\zeta$  в слое с  $l > k$  и, наоборот, с уменьшением его кривизны в слоях с  $l < k$ . По мере утончения слоя достигается такая его толщина, при которой нулевое значение  $\zeta$  на уровне земли уже невозможно, и подветренные волны исчезают.

Планеристы уже в первое время использования подветренных волн для парения пришли к выводу, что максимум амплитуды подветренной волны достигается примерно на высоте верхней границы облачного слоя (если он имеется). Очень часто верхняя граница облачного слоя является в то же время верхней границей слоя воздуха, возмущенного приземной конвекцией, а разрыв плотности (температуры), существующий в его верхней части, обуславливает возникновение волн (разд. 5.10.4). Как поясняется в гл. 11, верхушка облака обычно представляет собой уровень, с которого происходит потеря тепла путем излучения во внешнее пространство, и, следовательно, лежащий ниже слой постоянно охлаждается, за счет

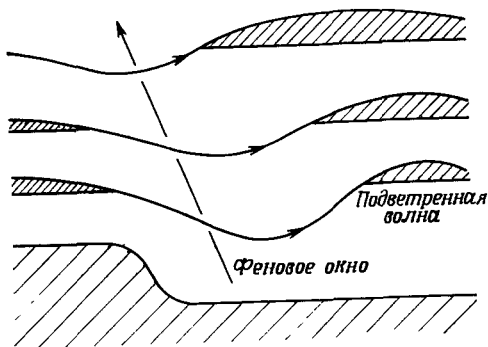


Рис. 5.16.3 Феновое окно.

Независимо от того, видна ли подветренная волна в облаках или нет, иногда в вышележащем слое воздуха поднимается выше уровня конденсации, тогда как в приземном слое он опускается. В таких случаях с подветренной стороны возвышенности виден небольшой клочок ясного неба (феновое окно)

чего возникает устойчивый скачок температуры. Так как это по сути дела тонкий слой, обладающий очень большой устойчивостью, то здесь кривизна профиля  $\zeta$  весьма велика и отрицательна, и, следовательно, этот уровень почти неизбежно оказывается уровнем, на котором профиль имеет максимум.

Поскольку облачный слой может быть сплошным, т. е. достаточно толстым, чтобы не рассеиваться во впадине волн, то присутствие волн не всегда заметно с земли. Если слой воздуха, в котором образовалось облако, хорошо перемешан, то все поверхности тока имеют один и тот же уровень конденсации и облако оказывается ограниченным снизу горизонтальной плоскостью. Иногда влажный слой располагается над более сухим, и тогда на нижней части облака видны волны.

В горных районах нередко наблюдают, как при стекании воздушных масс с плато слой облаков над плато исчезает, так как воздух на уровне облаков при этом также опускается. Однако столь же часто слой облаков наблюдается над низинами, а не над плато; иногда бывает даже, что в слое облаков образуется просвет, и не где-нибудь, а как раз над горным хребтом. Это явление называется *феновым окном* (рис. 5.16.3),



так как голубое небо видно только сквозь два или более слоев облаков в окрестности склона. Из формулы (5.13.25) для смещения линий тока вблизи хребтов следует, что фаза смещения по  $z$  меняется на противоположную с периодом  $2\pi/l_s$ , и от этого зависит, происходит ли смещение над краем плато вверх или вниз на том уровне, где расположен облачный слой.

### 5.17. Захваченные волны второго рода

Если на какой-то высоте скорость ветра относительно земли равна нулю, а на меньшей высоте воздушный поток взаимодействует с препятствием, то приемлемое решение волнового уравнения найти не удастся, так как при нулевом  $u_0$   $l^2$  становится бесконечно большим. Кроме того, если  $du_0/dz_0$  на этой высоте не равно нулю, то  $\alpha$  также стремится к бесконечности.

Аналитические решения уравнения (5.6.7) построены так, что по мере приближения к высоте, на которой  $u_0=0$ , поверхности узлов располагаются все плотнее (Скорер, 1951), а значение  $\xi$  превышает расстояние между поверхностями узлов там, где  $u_0$  близко к нулю. Это в свою очередь означает, что в потоке появляются вихри. Единственной альтернативой является образование структуры типа «кошачий глаз» с рядами вихрей на уровне нулевого  $u_0$  и с волнами выше и ниже этого уровня (см. нижнюю схему на рис. 6.2.1). Этот вопрос рассматривали также Куини (1955) и Жербье и Беранже (1961).

Относительно того, что происходит в этом случае, был сделан ряд предположений. Ряд авторов, например Букер и Бреттертон (1967), дали уровню нулевого  $u_0$  довольно неопределенное и неспецифическое название «критический уровень». Они предполагают, что энергия любой волны, распространяющейся снизу, на этом уровне поглощается. Это значит, что находящемуся на указанном уровне воздуху передается некоторое количество движения и что волны не отражаются. Теория, которой обосновывается эта идея, весьма умозрительна, справедлива только для очень коротких волн и неприменима для типичных подветренных волн в атмосфере. Так как количество движения должно передаваться воздуху, который поглощает кинетическую энергию, то присутствие слоев с нулевым  $u_0$ , по-видимому, должно означать, что воздушный поток на этом уровне в результате указанного поглощения замедляется и что значительная часть сопротивления горы приложена к воздуху на этом уровне. Этот вывод основывается на неполном математическом описании, которое неприемлемо для рассматриваемых длин волн.

Вероятно, наиболее важным является то, что если ниже уровня нулевого  $u_0$  ветровой градиент велик, то в случае волн, длина которых велика по сравнению с толщиной сдвигового слоя, он может быть ограничен достаточно тонким слоем, на верхней границе которого скорость равна нулю, и вести себя

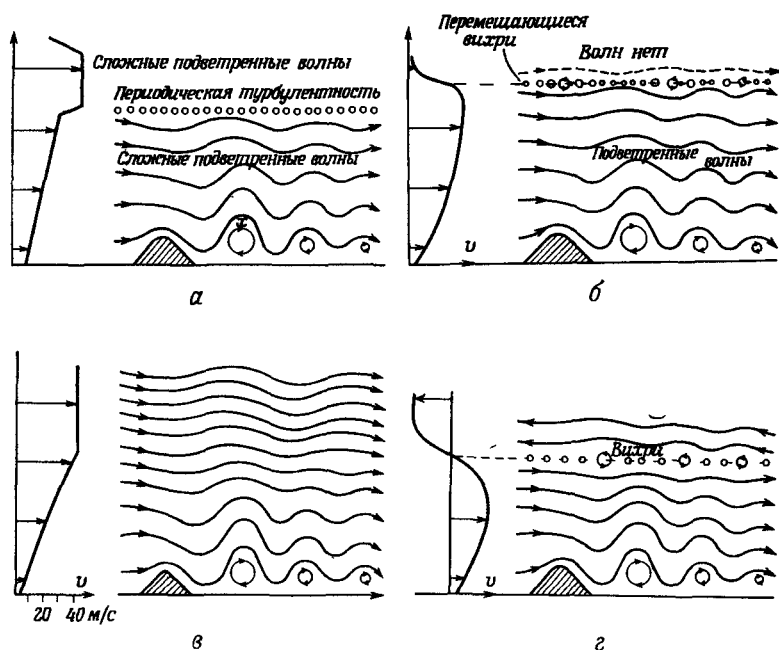


Рис 5.17.1. Структуры течения, наблюдавшиеся во Французских Альпах при четырех разных ветровых профилях.

Неясно, являются ли вихри на уровне нулевой скорости валами или вихрями типа «кошачий глаз» (Куини, 1955). По мере смещения вниз по потоку размеры вихрей в подветренных волнах уменьшаются. На схеме а на большей высоте показаны наблюдавшиеся здесь более длинные волны.

как разрыв скорости. Хотя это значит, что такое движение может превратиться в волновое (см. гл. 6), в случае длинных волн оно имеет тенденцию проявляться как статически устойчивый разрыв плотности и скорости со слоем покоящегося воздуха сверху. При этом могут образовываться стоячие волны, а воздух вблизи верхней границы слоя стремится перейти в состояние маломасштабного неустойчивого движения. Такая возможность была предсказана ранее (Скорер, 1949). Действительно, подобные волны иногда наблюдаются планеристами (например, в Лонг-Минде, см. Скорер, 1953 а).

Хотя теория не дает исчерпывающего объяснения этого явления, некоторые авторы по мере накопления знаний изображали его схематически. Приведенные на рис. 5.17.1 схемы заимствованы из работы Жербье и Беранже (1961). Форхтготту (1949) принадлежат схемы, основанные на наблюдениях движущихся вихрей.

## 5.18. Отрыв потока от поверхности

В теории волн до сих пор нет заметного прогресса в области изучения нестационарных волновых процессов. Не видно даже путей к достижению заметных успехов в этой области, и причиной этого является отрыв потока (см. Скорер, 1955). Связанные с отрывом явления настолько сложны и разнообразны, что лучше всего их можно описать с помощью простых схем.

### 5.18.1. Острая кромка

Рассмотрим случай, когда форма препятствия такова, что имеется острая кромка, которая и вызывает отрыв потока. Это

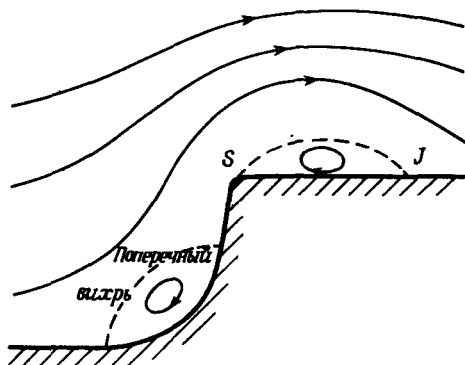


Рис. 5 18.1 Обтекание потоком крутого наветренного склона.

Отрыв потока на верхней кромке в точке  $S$  с последующим присоединением в точке  $J$ . Там, где на наветренной стороне поток расширяется, в результате отрыва может образоваться поперечный вихрь.

может происходить при обтекании стены, а также за кромкой резкого изменения рельефа (рис. 5.18.1—5.18.3). Такое же явление может иметь место и на улице, застроенной высокими домами (рис. 5.18.4).

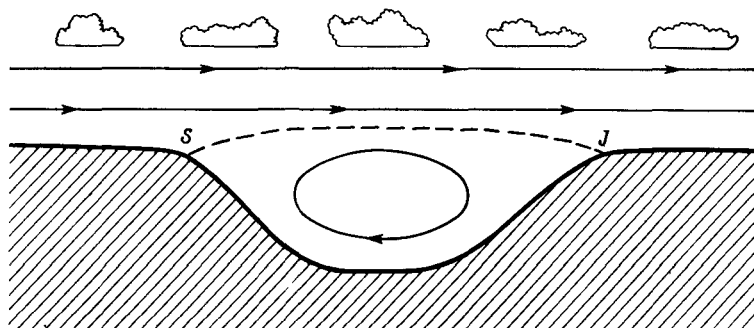


Рис 5.18.2 Отрыв потока на подветренном склоне ложбины  
Вихрь заполняет долину и не оказывает влияния на течение в верхних слоях.

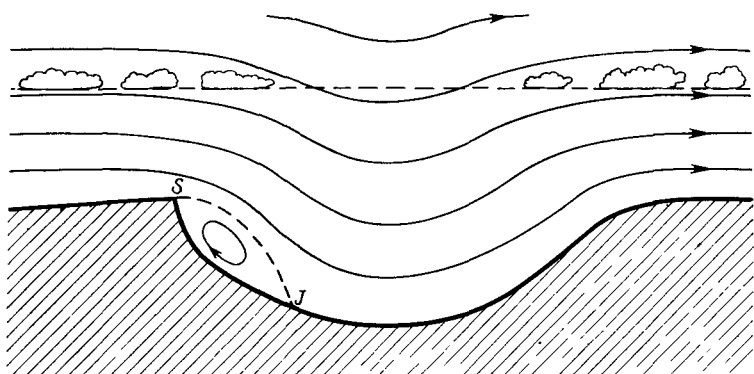


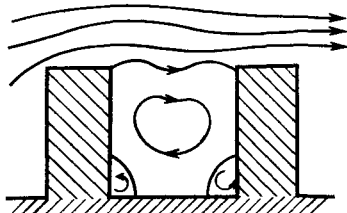
Рис. 5.18.3. Обтекание острой кромки подветренного склона.

При таком обтекании может образоваться небольшой вихрь. Широкая долина в целом может создавать направленное вниз течение, при котором облака над ней рассеиваются.

### 5.18.2. Угловые вихри

Это вихри, образующиеся в пограничном слое у подножия крутого обрыва или здания (рис. 5.18.1 и 5.18.4). Иногда их

Рис 5.18.4 Образование вихрей на плотно застроенной улице.



На улице могут образовываться стационарные вихри, в том числе угловые вихри, индиферентные основному вихрю. Внешний поток обычно нестационарен и содержит вихри, сбегающие с препятствий, расположенных вверх по потоку. Он может также иметь составляющую скорости, направленную вдоль улицы, которая влияет на характер зон отрыва. Так как архитектурные формы разнообразны, то эта схема показывает характер течения лишь в первом приближении.

называют *поперечными вихрями*. Можно показать, что их появление связано с профилем скоростей пограничного слоя и что отрыв в этом случае подобен отрыву в пограничном слое на клине, когда перед его вершиной расположена твердая поверх-

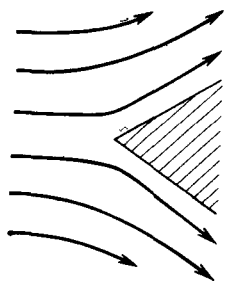


Рис. 5.18.5. Обтекание острого клина.

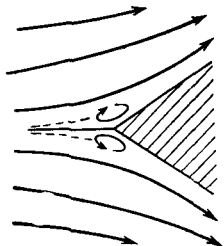


Рис. 5.18.6. Обтекание острого клина с продольной пластиной перед вершиной.

ность. При этом вихри индуцируются у вершины клина (рис. 5.18.5 и 5.18.6).

### 5.18.3. Вихри на подветренной стороне препятствия

При отрыве потока на подветренной стороне препятствия, когда основное течение расширяется и направлено в сторону повышения давления, положение линии тока, проходящей по границе зоны отрыва, обычно нестационарно (рис. 5.18.2, 5.18.3), так как именно здесь завихренность максимальна. Иногда образующиеся вихри бывают стационарными, особенно если имеется ярко выраженная острая кромка, фиксирующая отрыв, однако внешняя граница зоны совершает колебательные движения. В других случаях вихри сбегают периодически. Некоторые части берега имеют острую кромку (рис. 5.18.7, а), у которой всегда вращается фиксированный вихрь, тогда как у других, достаточно скругленных частей берега (рис. 5.18.7, б и 5.18.7, в) вихри иногда образуются, а иногда нет. Вихри могут оказывать существенное влияние на подветренные волны, так как положение точки присоединения может определяться из условия минимума энергии волн.

С другой стороны, часто наблюдается периодическое появление и исчезновение волнистых облаков, а на подветренной стороне холмов — попеременное усиление и ослабление ветра. Причиной может быть периодическое сбегание вихрей с холма, и в этом случае облако, образующееся над первой подветренной

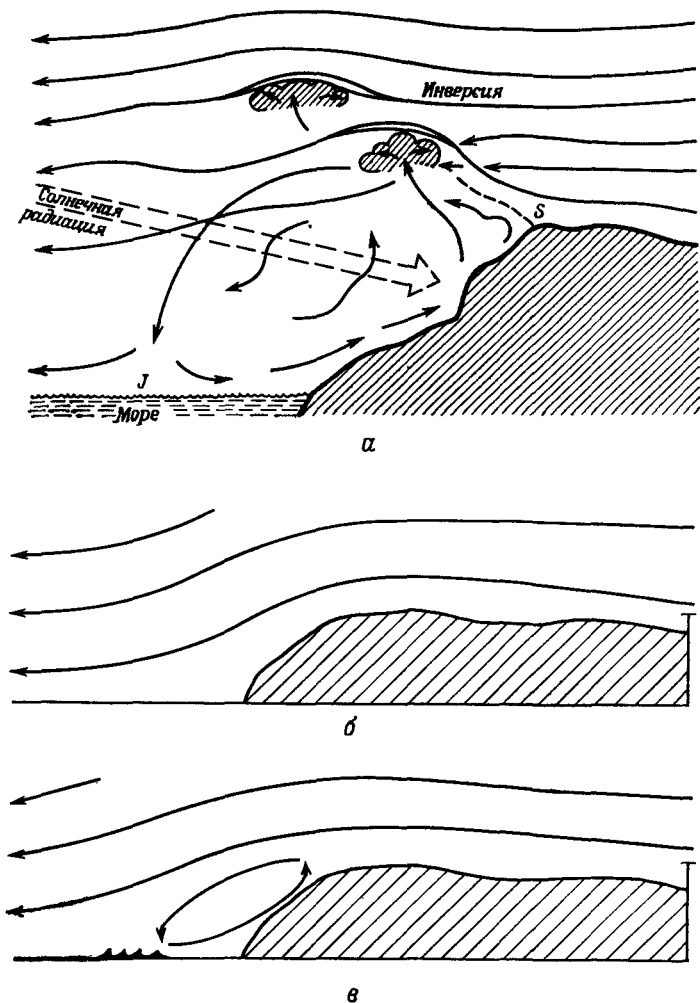


Рис. 5.18.7. Воздушные течения у побережья.

*a*). Сложная ситуация, когда в верхней части склона, обращенного к солнцу, может образоваться зона отрыва, обусловленная наличием острой кромки или анабатического ветра, или того и другого вместе Анабатический ветер создает термики, которые поднимаются друг за другом и иногда приводят к образованию кучевых облаков. Вихрь крайне нестационарен, и в точке присоединения ветер может быть порывистым и создавать «кошачьи лапы» на поверхности моря или на поле, покрытом травой или культурными злаками. *б*). Простой случай довольно плавного стекания воздуха к морю *в*). Простой случай образования прибрежного вихря. Течение часто произвольно переходит от случая (*б*) к случаю (*в*), о чем можно судить по показаниям индикаторов ветра или генераторов дыма, установленных на склоне

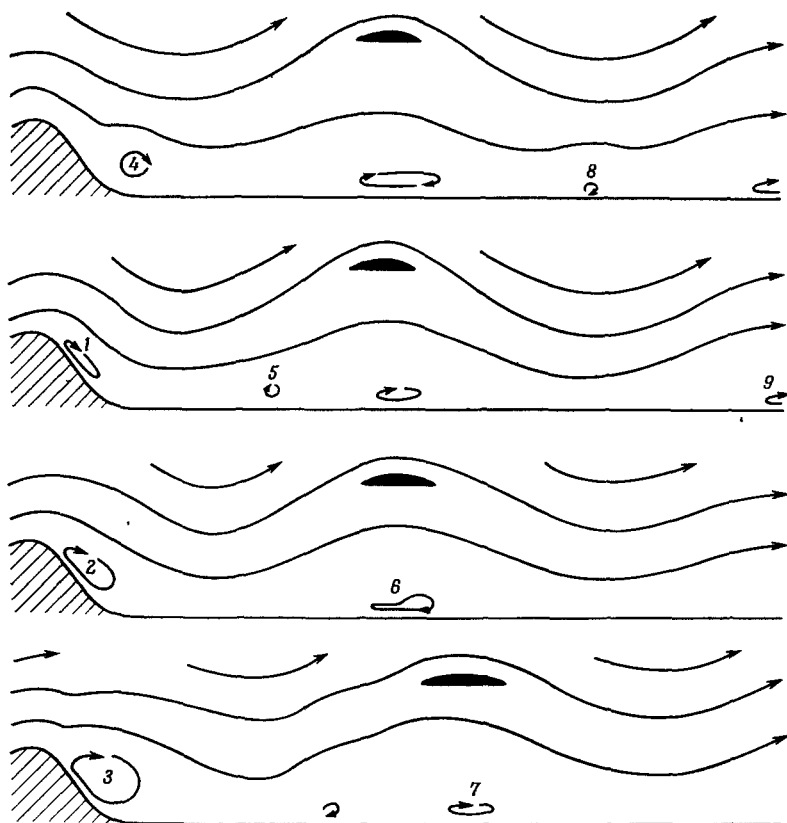


Рис. 5.18.8. Периодический срыв вихрей с соответствующим изменением положения подветренных волн.

Цифрами обозначены последовательные положения сорвавшегося вихря. Последовательность показанных событий повторяется и приводит к тому, что облако, образующееся в подветренных волнах, то смещается вперед по потоку, то сносится назад по мере роста подветренного вихря.

волной, медленно сносится ветром и исчезает, а вместо него появляется новое. Последовательность событий в этом случае показана на рис. 5.18.8.

#### 5.18.4. Завихрение

Так называют явление, развивающееся на вершине обрыва, вверх по склону которого дует ветер. Это особенно балгоприятное место для запуска планеров; приземляться планеристы предпочитают ниже по потоку от края обрыва. Для пилота

не важно, происходит ли в этом месте просто расширение трубок тока (рис. 5.18.9) с соответствующим падением скорости воздушного потока или из-за присутствия вихря направление

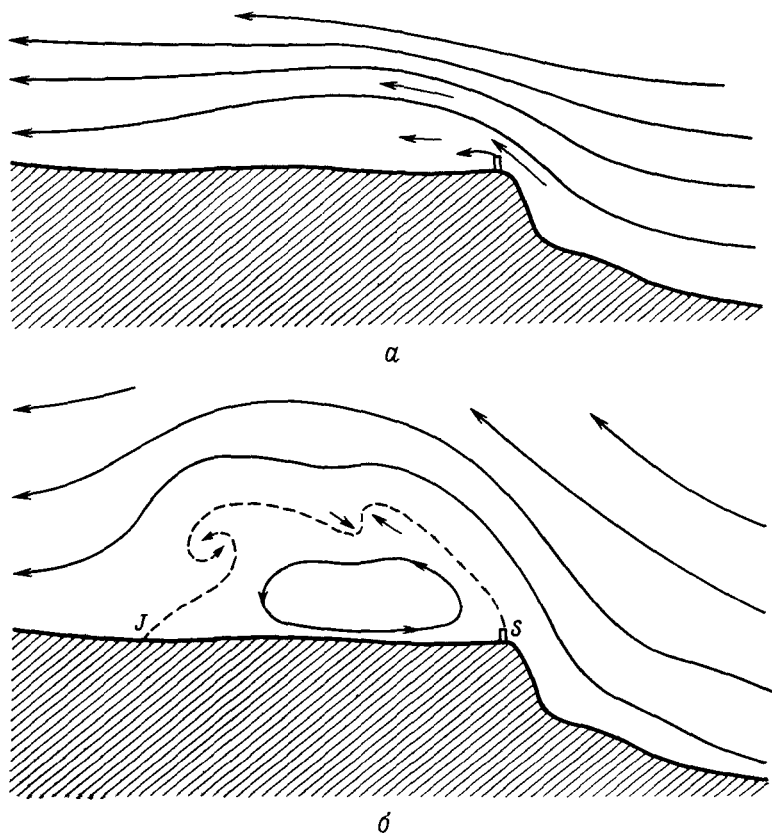


Рис 5 18.9 Обтекание плато восходящим вдоль склона ветром.

*a* — поток на кромке плато расширяется, но не отрывается, и может происходить образование воли, *б* — зона циркуляции с вихревыми срывами, смещающимися вниз по потоку вдоль линии тока, ограничивающей зону отрыва.

скорости ветра меняется на противоположное — в обоих случаях он ощущает уменьшение скорости ветра при посадке. Отсюда и название, данное этому явлению, — «захват», отражающее быстрое увеличение скорости спуска (см. Скорер, 1951 б).

Вихри чаще образуются в спокойном воздухе, например над охлажденной поверхностью земли, и реже в солнечную погоду при значительной турбулентности воздуха в приземном слое.



Однако в любом случае это довольно нестационарное явление, и даже если вихрь более или менее постоянен, на его границе часто развивается неустойчивость в виде вихревых срывов.

### 5.18.5. «Кошачья лапа»

Место присоединения воздушного потока часто можно наблюдать на воде, где оно имеет вид гигантской лапы, скользящей вперед. Движение происходит вниз по потоку за вихрем, который уже оторвался и вызывает резкое увеличение скорости ветра, возмущающее поверхность воды. Это явление показы-

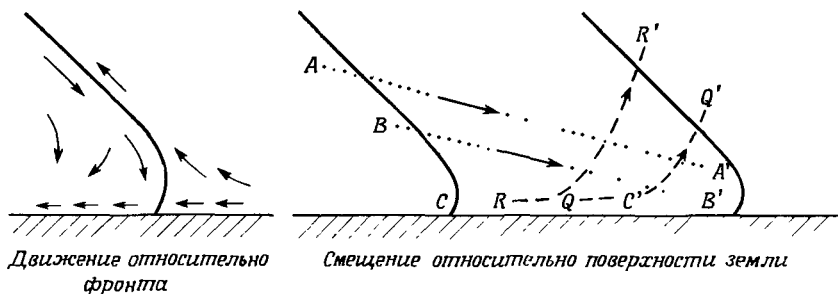


Рис. 5.18.10 Фронтальная часть воздушного потока, стекающего сверху и вызывающего резкое усиление ветра («кошачья лапа»)

Лучше всего это явление наблюдается на поверхности воды, которая вдруг морщится, покрываясь короткими волнами, однако его можно наблюдать также на лугах и полях, засеянных культурными злаками. «Кошачьи лапы» появляются с подветренной стороны препятствий и в оттоках из зон, где бушует шторм. Воздух перед фронтом  $QR$  поднимается от поверхности вверх, а слой  $ABC$  стелется по поверхности как ковер, образованный воздухом, обладающим большей скоростью движения. Штрихами помечены положения частиц воздуха, занимаемые ими после смещения фронта вправо.

вает, что такой срыв вихрей представляет собой не просто перемещение всей структуры вниз по потоку, вызванное стационарными вихрями, а связан с наличием фронтов (см. для сравнения разд. 9.9 и рис. 4.8.2), за которыми воздух, обладающий большей скоростью, опускается к подстилающей поверхности (рис. 5.18.10).

### 5.18.6. Суточные эффекты

Анабатические и кататические ветры оказывают на явление отрыва ярко выраженное влияние. Кататический ветер, поднимающийся при охлаждении земли после захода солнца, дует в очень тонком приземном слое, но и его бывает достаточно, чтобы предотвратить отрыв потока от подветренного склона холма. Наиболее интересным является то, что

в результате могут появиться подветренные волны, и сильный ветер в зоне впадины первой подветренной волны часто принимают за сам кататический ветер. Хороший пример приведен у Ли и Неймарка (1952), которые отмечают, что в Данстейбле планер взмыл на 1220 м, попав в подветренную волну за склоном высотой 61 м.

Анабатические ветры в сильной степени способствуют отрыву, особенно если подветренный склон обращен к солнцу (рис. 5.18.7, а). Это главная причина исчезновения волнистых облаков в начале дня.

### 5.18.7. Запирание

Из изложенной ранее в этой главе теории следует, что возмущение в окрестности хребта меняет фазу в направлении  $z$  с периодом  $2\pi/l$ . Это означает, что поверхность узлов находится на некоторой высоте, не более чем  $2\pi/l$  над невозмущенной нижней границей потока, и если горный хребет имеет большую высоту, то нет таких течений, которые можно было бы описать теоретически, даже в произвольной амплитудной форме. Лонг предполагает, что в этом случае может происходить запирание, так как нет регулярного смещения воздуха над хребтом, которое могло бы создать достаточно низкое давление, позволяющее приповерхностному воздуху достичь этой высоты (число Фруда оказывается много больше единицы).

Запирание является главной причиной возникновения фен-ов — ветров, приносящих воздух с высоты, несколько большей высоты хребта, с его наветренной стороны, к поверхности земли на подветренной стороне хребта (рис. 5.18.11). Повышенную температуру фен-ов во многих учебниках объясняют выделением скрытой теплоты при выпадении дождей над хребтом. В разд. 11.6.2 показано, что это объяснение в большинстве случаев неправильно, даже когда дождь действительно идет; еще более очевидна его ошибочность, когда дождя нет и нет даже облаков над горным хребтом. Типичные фены и чинуки дуют, когда горный хребет преграждает путь массам холодного воздуха.

Масса холодного воздуха на подветренной стороне хребта может вызвать отрыв потока, причем холодный воздух в долине с подветренной стороны хребта остается неподвижным (рис. 5.18.12). Верхней граничной поверхностью в таких случаях является верхняя граница облака, излучение которой создает устойчивый разрыв плотности (см. разд. 11.1.2); при этом плоскость границы облака наклоняется за счет движения подветренных волн в потоке воздуха над ним. Иногда даже

при небольшом наклоне, но при сильном ветре, дующем во впадине волны, на устойчивом слое могут образовываться

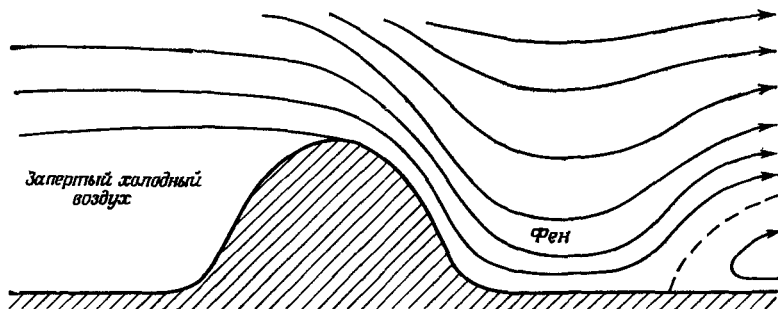


Рис. 5 18.11 Запирание холодного воздуха на наветренной стороне хребта и образование теплого ветра с гор.

Теплый воздух, который несет фен или чинук, обычно спускается сверху, когда путь холодной воздушной массе преграждает горный хребет. Под первой подветренной волной часто происходит отрыв потока, и это создает резкий контраст между сильным ветром у подножья хребта и зоной затихая или возвратного течения там, где располагается вихрь.

завихрения, переходящие в облачные валы. Присутствие или отсутствие анабатических ветров над устойчивым слоем на

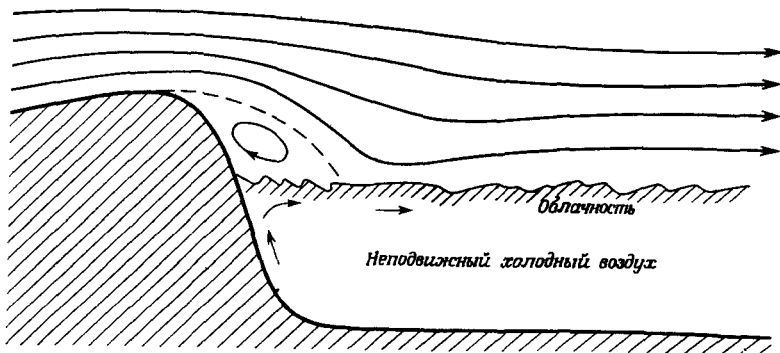


Рис. 5 18.12. Отрыв потока на наветренной стороне хребта под влиянием массы неподвижного холодного воздуха на равнине.

Часто холодная воздушная масса заполняет долину или равнину, отгороженную горным хребтом. Сверху эта масса нередко покрыта слоем облаков, причем положение завихрений и других возмущений в верхнем слое определяется поведением вихрей в зоне отрыва

подветренном склоне может вызвать возмущение верхней границы слоя, особенно в случае, если толщина находящегося здесь облака очень мала и анабатический ветер создается за счет нагрева солнцем части склона, расположенной под этим

слоем. Иногда во впадинах земной поверхности или вблизи гребней подветренных волн при слабом приповерхностном ветре образуются неглубокие скопления очень холодного воздуха, границы которых, отделяющие их от теплого воздуха фена, перемещаются и вызывают очень резкие вертикальные изменения температуры. Это явление наблюдается обычно при первом теплом весеннем фене, когда впервые уносится холодный воздух, но поверхность земли еще сильно охлаждена.

### 5.18.8. Трехмерные эффекты

По-видимому, нельзя предложить способ систематического описания явлений, возникающих за трехмерными препятствиями произвольной формы при их обтекании с отрывом по-



Рис. 5.18.13. Обтекание одиночного холма.

Течение вверх по подветренному склону одиночного холма может и не иметь вида подветренного вихря, однако циркуляция в подветренной зоне приводит к тому, что некоторые частицы, прежде чем они будут снесены вниз по потоку, могут совершить несколько оборотов

тока. При обтекании зданий с внутренними дворами или башнями, кораблей, имеющих на надстройках множество разнообразных острых кромок, а также концевых участков горных хребтов течение зависит не только от формы препятствия, но и от степени турбулизации воздушных масс и их стратификации. Лучший совет, который можно дать в этом случае, — использовать любые средства визуализации воздушных потоков. При этом эффективность трассера в большой мере зависит от того, кто им пользуется. Можно получить массу удовольствия, применяя дым, мыльные пузыри, воздушные шары, флажки, наблюдая снегопад и т. п. На рис. 5.18.13 показана структура течения при обтекании одиночного холма, полученная Форхтготтом (1950) в результате наблюдений.

### 5.18.9. Срывные вихри

Если воздушные потоки, текущие с двух сторон к линии отрыва, имеют вдоль нее разные составляющие скорости, то она может стать основанием вихревой пелены. Так как эта

линия в то же время является линией торможения, то ускорение потока направлено вверх и растягивает вихревые линии, опирающиеся на нее одним концом. При этом интенсивность вихревой пелены возрастает и отдельные вихри могут стать чрезвычайно сильными. В результате на подветренных склонах часто образуются пыльные или снежные смерчи, которые иногда поднимают с земли и уносят различные предметы.

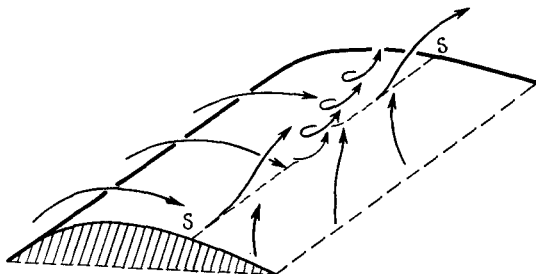


Рис. 5.18.14. Срыв вихрей с подветренного склона.

Время жизни таких вихрей обычно невелико. На рис. 5.18.14 показан характер движения в рассматриваемом случае.

## 5.19. Некоторые теоретические трудности

Пытаясь найти подходящее граничное условие, которое можно было бы поставить для верхних слоев атмосферы, многие теоретики исходили из того, что достаточно найти условие, которое дает единственное решение. Правильность выбора такого условия зависит от того, является ли оно действительно характерным. Весьма популярно «условие излучения», при котором выделяется решение, дающее силу, действующую на препятствие в направлении набегающего потока (разд. 5.11 и 5.13). Это решение получается методом установления, т. е. путем решения уравнений нестационарного движения при стремящемся к бесконечности времени, когда все распространяющиеся вниз по потоку волны, при отсутствии в нем источников волн, затухают (т. е. когда нет излучения, направленного по потоку).

Известны, однако, два важных случая стационарных течений, когда этот критерий неприменим, и это заставляет сомневаться в его универсальности. Не предложено еще теории, которая описывала бы переход воздушного потока во времени от состояния, когда возможен захват волн, к состоянию,

в котором захват невозможен. Нет также описания структуры воздушного потока в случае, когда при неизменном ветре в верхних слоях, дующем поперек хребта, направление ветра в нижних слоях с течением времени меняется от параллельного хребта к поперечному. Кроме того, возможен случай запира-ния, а также случай, когда препятствие влияет на набегающий поток, изменяя в нем профиль скоростей. Оба эти случая тоже не укладываются в рамки существующей теории.

К первому случаю относится поток, движущийся вниз по склону плато или поднимающийся по нему. Решение можно легко получить из уже рассмотренного выше интеграла (5.13.5) путем интегрирования по  $x$ . Тогда профиль, показанный на рис. 5.13.1, представляет собой производную новой функции

$$\zeta = \operatorname{Re} \left( ab \int_0^{\infty} e^{-kb} \int e^{ikx} dx dk \right) = ab \int_0^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kb} \sin kx dk, \quad (5.19.1)$$

$$\zeta = \int \frac{ab^2 dx}{b^2 + x^2} = ab \operatorname{arctg} \frac{x}{b}. \quad (5.19.2)$$

Постоянная интегрирования здесь положена равной нулю, так что  $\zeta=0$  при  $x=0$ . Эта формула описывает течение вверх по склону, высота которого при больших положительных  $x$  на  $lab$  больше, чем при больших отрицательных  $x$ . Стеkanie воздуха с плато получаем, полагая  $a$  отрицательной величиной. Здесь  $b$  — расстояние, на котором высота становится равной половине ее величины на большом удалении. При  $b=0$  интеграл дает резкий скачок вверх. Препятствие прямоугольной формы получим, введя  $x+c$ . Тогда при  $x=-c$  имеем резкий скачок вверх, а затем, прибавив ту же функцию, но с обратным знаком перед  $a$ , и заменив  $x$  на  $x-c$ , получим резкий скачок вниз при  $x=c$ .

Формальные трудности возникают из-за того, что в соответствии с «условием излучения» должно быть взято то решение, которое получается интегрированием уравнений (5.13.19) и (5.13.25) по  $x$ . Так как второй член оказывается пропорциональным  $\lg(b^2+x^2)$ , то с ростом  $x$  он неограниченно возрастает. В результате образуются вихри бесконечно большой интенсивности, которые с ростом  $x$  не замыкаются. Такую ситуацию можно рассматривать как запираение. Единственной альтернативой является постановка граничного условия при больших  $|x|$  вместо больших  $z$  и отбрасывание этой логарифмической части решения, которая на нижней границе потока равна нулю и была добавлена лишь для того, чтобы обеспечить условие излучения при больших  $z$ . Приемлемое решение получается в случае, когда составляющие волны не меняют своей фазы при изменении высоты.

В результате получаем решение, которое при достаточно большой амплитуде  $a$  аналогично запиранию. Как видно из рис. 5.19. 1, в этом случае течение состоит из системы «струй», которая развивается, когда в стратифицированный поток помещают бесконечно длинное препятствие. Запирание происходит, когда число Фруда не слишком велико; если же оно очень велико, то скорость течения мала и за пределами слоя, занятого препятствием, течение практически горизонтально.

Со вторым случаем, когда условие излучения неприменимо, мы сталкиваемся, когда имеется слой с нулевой устойчивостью

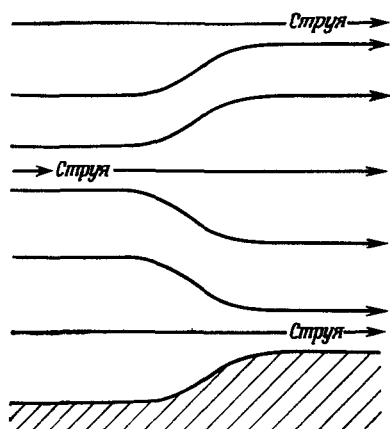


Рис. 5.19 1. Картина формального решения уравнения (5.19.2) для течения над уступом.

Это решение не удовлетворяет условию излучения на большой высоте. Полное решение с удовлетворительными условиями при больших  $|x|$  содержит дополнительные волны на линиях тока, которые обычно имеют небольшую амплитуду [см Куини (1948) и обсуждение уравнения (5.13.13) этой главы].

в какой-либо части течения. Такая ситуация нередко возникает над нагретой земной поверхностью или в облачном слое. В этом случае  $\beta=0$ , и если  $a$  не слишком велико, то с высотой будет меняться только амплитуда волн (фаза останется постоянной, так как  $k > l$  при всех  $k$ ). Это можно объяснить и иначе, если заметить, что поскольку фаза в нейтральном слое с высотой не меняется, то горизонтальная составляющая сопротивления через этот слой не передается и поэтому волны, распространяющиеся вверх, не поддерживаются. Вероятно, по этой причине при термической конвекции волны возникают редко. Однако важно подчеркнуть, что указанная проблема не относится к захваченным подветренным волнам, и существует множество воздушных течений, в которых имеется адиабатический слой и возможен захват (см. Скорер, 1953 б), хотя наличие такого слоя неизбежно уменьшает амплитуду подветренных волн. Можно обсуждать и другую часть решения, однако всякое стационарное решение ненадежно, так как вероятность отрыва в потоке, содержащем нейтральный слой, велика.

## 5.20. Другие виды волн

### 5.20.1. Волны Росби

Течение на поверхности вращающейся Земли, которое строго горизонтально и одинаково на всех высотах при отсутствии термического ветра, называется *баротропным*. В таком течении поток не растягивает вертикальные вихревые линии. Поэтому суммарная или абсолютная завихренность постоянна и соответствует указанному движению. Она складывается из завихренности относительно земли, обозначаемой  $\zeta$ , и из вертикальной составляющей угловой скорости вращения Земли (параметра Кориолиса  $f$ ). Таким образом, вдоль линии тока

$$\zeta + f = \text{const.} \quad (5.20.1)$$

Если теперь обратимся к уравнению (5.2.6) и вспомним, что при его выводе для простоты пренебрегли членом, содержащим  $q^2\beta$ , по сравнению с  $g\beta z$ , получив разновидность приближения Буссинеска, то, замечая, что для несжимаемой жидкости  $\rho_0 = \rho$ , уравнение (5.2.6) приведем к виду

$$\eta - \frac{g\beta}{u_0} z = \text{const.} \quad (5.20.2)$$

Росби показал, что в случае, соответствующем уравнению (5.20.1), возможны волны малой амплитуды, если  $f = \beta y$ , где  $y$  измеряется в направлении на север. Так как это требование приближенно выполняется в некотором диапазоне широт [хотя, согласно уравнению (4.1.11), строго говоря,  $f = 2\Omega \cos \theta$ ], то получаем полезное упрощение, известное как приближение  $\beta$ -плоскости. С его помощью уравнение (5.20.1) приводится к виду

$$\zeta + \beta y = \text{const.}, \quad (5.20.3)$$

в котором оно вполне аналогично уравнению (5.20.2). Различие в знаках перед вторыми членами обусловлено используемыми системами координат, в которых  $y$  и  $z$  направлены противоположно. Поэтому следует ожидать, что волны, обладающие свойствами, до некоторой степени определяемыми северным и южным граничными условиями, могут быть обнаружены в зональных ветрах, т. е. ветрах, дующих вдоль параллелей. Применимость этой теории, очевидно, не ограничивается случаем малых амплитуд; она позволяет ожидать появления вихрей, которые действительно существуют и называются *блокирующими антициклонами*, так как создается впечатление, что основное течение обходит их. Эти антициклоны стационарны относительно крупных топографических и термических образо-



ваний земного шара, какими являются Скалистые горы или теплое течение Гольфстрим. Линейные размеры волн определяются величиной коэффициента  $\beta$  и скоростью ветра  $u_0$  и имеют порядок  $(u_0/\beta)^{1/2}$ , подобно тому, как линейные размеры гравитационных волн в уравнении (5.20.2) имеют порядок  $(u_0^2/g\beta)^{1/2}$ . Так как по Росби  $\beta \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ км}^{-1} \text{ с}^{-1}$ , а при сильных западных ветрах  $u_0$  в верхних слоях атмосферы достигает  $3 \cdot 10^{-2} \text{ км/с}$ , то характерный линейный размер этих волн равен 1000 км, а длина волны в типичных случаях может быть порядка  $2\pi \cdot 10^3 \text{ км}$ .

### 5.20.2. Звуковые волны. Сильные взрывы

Взрыв, создающий возмущение давления порядка 1 мбар на расстоянии, сравнимом с радиусом Земли, называется *сильным взрывом* и регистрируется обычными метеорологическими барографами. *Слабый взрыв* вызывает импульс давления, который регистрируют только специальные микробарографы. Классический сильный взрыв произошел в 1883 г. при извержении вулкана Кракатау, а классический слабый взрыв был вызван Тунгусским метеоритом 30 июня 1908 г. Последнее событие хорошо описано Астаповичем (1934). Более современные примеры взрывов обоих видов дают соответственно взрывы водородных и атомных бомб. Слабый взрыв соответствует расширению в объеме от 100 до 1000 км<sup>3</sup>, а сильный — до 10<sup>4</sup> км<sup>3</sup>. При взрыве, вызывающем расширение в объеме 100 км<sup>3</sup>, радиальное смещение на расстоянии 10 км составляет всего 160 м, и, следовательно, на больших расстояниях вполне применим метод малых возмущений. Чтобы создать при атмосферном давлении шар объемом 10<sup>3</sup> км, требуется энергия 10<sup>24</sup> эрг.

При наземном взрыве образуется ударная волна, имеющая в атмосфере полусферическую форму. Когда она достигает стратосферы, возникает и начинает распространяться гравитационная волна, подобно тому, как расходятся волны по поверхности воды от брошенного камня. Эта волна движется примерно со скоростью звука  $c$ , пропорциональной  $T^{1/2}$  [см. уравнение (1.8.8)] и приблизительно равной 316 м/с. Указанное значение является средним между скоростями звука в нижнем слое тропосферы и в стратосфере, температура которой может быть на 70 К ниже. Теоретически возможны волны, распространяющиеся с разными скоростями, однако они не могут порождаться источником, расположенным на поверхности земли, и поэтому имеют малую амплитуду.

В обычной теории малых возмущений зависимости от высоты и координат в горизонтальной плоскости можно разделить

при любой заданной частоте  $\sigma$  (возмущение пропорционально  $e^{i\sigma t}$ ). Скорер (1950 б), используя в качестве координаты расстояние  $r$ , измеряемое от источника в горизонтальной плоскости, нашел, что модифицированное давление, определяемое выражением (1.6.4), удовлетворяет соотношениям

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(z) \bar{\omega}(r), \quad (5.20.4)$$

$$\left( \operatorname{ctg} \frac{r}{a} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} = k^2 \bar{\omega}, \quad (5.20.5)$$

$$\bar{\omega}'' + \left( \frac{g\tau_0'' + \sigma^2 \tau_0'}{g\tau_0' + \sigma^2 \tau_0} + \frac{g}{c^2} \right) \bar{\omega} + \left( g \frac{\tau_0'}{\tau_0} + \sigma^2 \right) \left( \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{\sigma^2} \right) \bar{\omega} = 0, \quad (5.20.6)$$

в которых движение считается адиабатическим,  $a$  — радиус Земли,  $\tau_0(z)$  — невозмущенное значение  $\tau$ , а штрихом обозначены частные производные по  $z$ . Вертикальная составляющая скорости определяется уравнением

$$w = \frac{i\sigma}{\sigma^2 \tau_0 + g\tau_0'} \bar{\omega}', \quad (5.20.7)$$

и для волн, распространяющихся от места взрыва, на уровне земли равна нулю. Решения уравнения (5.20.6) на нижней границе тропосферы имеют колебательный характер, однако при смещении вверх в изотермической стратосфере колебания экспоненциально затухают, распространяясь со скоростью  $\sigma/k$  ( $k$  — длина волны в радиальном направлении), равной  $c$ . Поэтому коэффициент перед  $\bar{\omega}$  в уравнении (5.20.6) на какой-то промежуточной высоте меняет знак.

Так как волны, имеющие более высокую частоту, распространяются с меньшей скоростью, то импульс, сообщенный атмосфере в точке и описываемый двойным интегралом Фурье по всем значениям  $\sigma$  и  $k$  начинает распространяться в виде единой волны но постепенно разделяется на последовательность колебаний возрастающей частоты. В атмосфере, имеющей тропосферу с постоянным вертикальным градиентом температуры и изотермической стратосферой, простирающейся на бесконечную высоту, однородные цуги волн с периодом менее 2 мин распространяться не могут. Однако колебания более высокой частоты появляются на поверхности земли в виде импульса, образованного суперпозицией всех частот с периодом примерно от 13 с и выше. На рис. 5.20.1 в увеличенном виде представлена записанная в Англии барограмма атмосферных волн Тунгусского феномена (Уиппл, 1930).

В отношении волн с периодом  $\geq 2$  мин атмосфера, соответствующая указанной выше модели, ведет себя как волновод.

Наблюдаются также волны более высоких частот, распространяющиеся заметно медленнее. Эти волны отражаются от более теплых слоев стратосферы, в которой температура в диапазоне высот от 30 до 50 км возрастает. Известно, что на этих уровнях происходит отражение волн звуковых частот (Уиппл, 1935). Классическим примером такого рода является орудийная пальба во Фландрии, которую во время первой мировой войны слышали в Англии. Более подробно это явление изучал Ямамото (1957), анализирувавший записи давления от нескольких ядерных взрывов.

Продолжительность распространения всего импульса давления на расстояние одного радиуса Земли от точки его

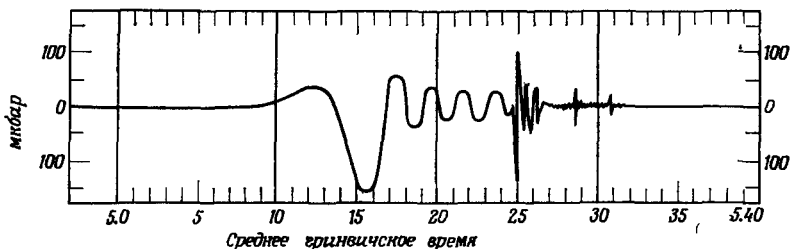


Рис 5.20.1. Импульс давления от Тунгусского метеорита, записанный микробарографами в Англии.

Суммарный график, построенный Уипплом на основе 5 записей, содержит характерные черты многоимпульсных возмущений, наблюдавшихся позднее при взрывах атомных бомб.

мгновенного возникновения составляет около 20 мин, причем большая часть энергии поступает в течение первых 10 мин, поэтому влиянием вращения Земли на распространение таких волн можно пренебречь. Этого нельзя, однако, сделать в случае приливных волн (см. разд. 11.11), период которых равен нескольким часам.

Волны звуковых частот возникают всегда, когда какая-либо часть атмосферы расширяется. Поэтому когда, скажем, происходит прогрев поверхности острова за счет солнечной радиации и последующий нагрев воздуха, то от острова начинает распространяться волна. При этом плотность нагретого воздуха убывает и развивается термическая конвекция. Таким образом, движение, возникающее вследствие расширения нагретого воздуха, представляет собой звуковую волну, которая распространяется от места нагрева со скоростью звука и никак не связана со следующим за ней движением, обусловленным плавучестью. Поэтому с точки зрения практической метеорологии можно считать, что любое неадиабатическое изменение температуры сопровождается одновременным изменением плотности при постоянном давлении (Скорер, 1952 б). Например, отток,

вызывающий понижение давления над нагретой сушей и приводящий к возникновению морского бриза, создает волну разрежения, распространяющуюся от суши со скоростью звука и не проявляющую себя как ветер.

### 5.20.3. Импульсы давления, создаваемые штормом

Почти все воздушные массы способны пропускать волны, подобные стоячим, которые распространяются со скоростями,

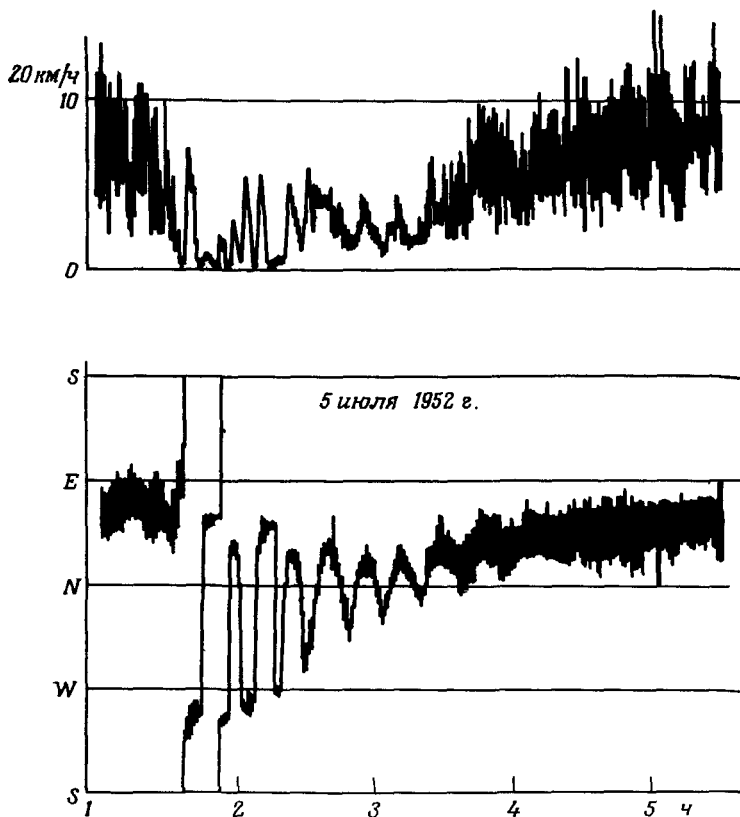


Рис. 5.20.2. Записи скорости и направления ветра, сделанные в Абингдоне при прохождении гравитационных волн из области ночного шторма, бушевавшего над Ла-Маншем

Публикуется с разрешения А. Дж. У. Потекари из Британского метеорологического управления

характерными для обычных ветров. Эта скорость, однако, сильно зависит от длины волны. Именно по этой причине стоя-

чие волны имеют такой узкий диапазон длин волн, и им присуща весьма значительная дисперсия импульса.

Импульс давления может создаваться внезапным оттоком из нижней части зоны шторма, если скорость течения в верхнем слое воздуха, откуда он стекает, отличается от скорости нижнего слоя, куда он стекает, вызывая запираение. На рис. 5.20.2 представлены полученные в Абингдоне, вблизи Оксфорда, записи отголосков шторма, бушевавшего ночью над Ла-Маншем. Диапазон длин волн, захваченных при распространении в каком-то одном направлении, может быть мал. В рассматриваемом случае волна имеет длину, по-видимому,  $\sim 3$  км. Существенно, что этот шторм разыгрался ночью над морем. Следовательно, кучевые облака не достигали поверхности, и их образование происходило выше уровня конденсации в слое воздуха, движущемся со скоростью, отличной от скорости приповерхностных слоев.

Если скорости слоев одинаковы и нет ярко выраженного устойчивого слоя, то волны не захватываются, и единственным следствием нисходящего течения является отток холодного воздуха, аналогичный, с точки зрения механики, фронту морского бриза (см. разд. 9.9).

## 6.1. Неустойчивость вихревого слоя

В классической гидродинамике задача о неустойчивости горизонтальной поверхности, на которой плотность и скорость терпят разрыв, ставится следующим образом (рис. 6.1.1).

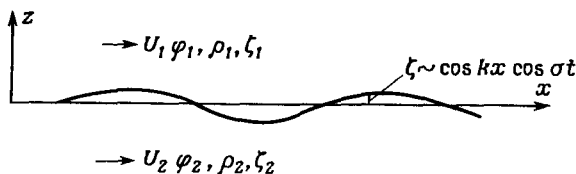


Рис. 6.1.1. Система координат для смещения поверхности раздела между двумя однородными слоями с разными плотностью и скоростью.

В начальный момент времени поверхность раздела между двумя слоями жидкости определяется условием  $z=0$ , причем оба слоя простираются в бесконечность и находятся в состоянии безвихревого движения. Индексами 1 и 2 будем обозначать верхний и нижний слой соответственно, а через  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\zeta$  и  $U$  — потенциал скоростей возмущения, плотность, вертикальное смещение и горизонтальную составляющую скорости невозмущенного однородного течения. Смещение поверхности раздела будем полагать пропорциональным  $\cos kx$  и  $\cos \sigma t$  и представлять через  $e^{i(kx - \sigma t)}$ , беря действительную часть этого выражения.

Так как жидкости считаются несжимаемыми, то уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0. \quad (6.1.1)$$

Полагая возмущения малыми, можно пренебречь всеми их степенями, кроме первой. Тогда оператор Лагранжа для двумерного течения с компонентами скорости  $U+u$  и  $w$ , возмущение в котором считается пропорциональным  $e^{i(kx - \sigma t)}$ , имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} = i(-\sigma + kU). \quad (6.1.2)$$

Чтобы удовлетворять уравнению (6.1.1), возмущение должно быть пропорционально  $e^{\pm kz}$ , где плюс соответствует нижнему слою, а минус — верхнему. В противном случае при больших положительных или отрицательных  $z$  возмущение будет неограниченно расти. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\zeta}{dt} = -i(\sigma - kU)\zeta, \\ &= -k\varphi \quad \text{при } z > 0, \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$$= k\varphi \quad \text{при } z < 0 \quad (6.1.4)$$

и

$$\varphi_1 = i \frac{\sigma - kU_1}{k} \zeta_1; \quad \varphi_2 = -i \frac{\sigma - kU_2}{k} \zeta_2. \quad (6.1.5)$$

Из уравнения Бернулли (1.7.9) при  $\rho = \text{const}$  и

$$q^2 = \left( U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2$$

для верхнего слоя жидкости имеем

$$\frac{p_1}{\rho_1} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g\zeta_1 = \text{const}. \quad (6.1.6)$$

Заменив индекс 1 на 2, получим аналогичное уравнение для нижнего слоя. Постоянные  $U_1^2$  и  $gz$  для каждой линии тока (на высоте  $z + \zeta_1$ ) включены в правую часть уравнения, а члены, содержащие  $\varphi$  в степени выше первой, в силу малости возмущений отброшены. Переменная часть давления определяется выражениями

$$-p_1 = \rho_1 \left[ i(kU_1 - \sigma)\varphi_1 + g\zeta_1 \right] = \rho_1 \left[ \frac{(\sigma - kU_1)^2}{k} + g \right] \zeta_1, \quad (6.1.7)$$

$$-p_2 = \rho_2 \left[ i(kU_2 - \sigma)\varphi_2 + g\zeta_2 \right] = \rho_2 \left[ -\frac{(\sigma - kU_2)^2}{k} + g \right] \zeta_2. \quad (6.1.8)$$

Граничные условия при больших положительных и отрицательных  $z$  уже поставлены. Если вместо этого ввести твердые границы на конечных расстояниях от поверхности раздела, то граничные условия приобретут несколько более сложный вид. Чтобы получить дисперсионное соотношение, связывающее  $\sigma$  и  $k$ , т. е. длину волны с ее скоростью, поставим физические условия на поверхности раздела:

$$p_1 = p_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2 \quad \text{при } z = 0.$$

В результате получим

$$\rho_1 = \left[ \frac{(\sigma - kU_1)^2}{k} + g \right] = \rho_2 \left[ -\frac{(\sigma - kU_2)^2}{k} + g \right]. \quad (6.1.9)$$

Это квадратное относительно  $\sigma$  уравнение имеет следующие решения:

$$\sigma = \frac{k}{\rho_1 + \rho_2} \left\{ \rho_1 U_1 + \rho_2 U_2 \left[ \pm (\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) \right]^2 - \right. \\ \left. - (\rho_1 + \rho_2) \left[ \rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 - \frac{g}{k} (\rho_2 - \rho_1) \right]^{1/2} \right\}. \quad (6.1.10)$$

Если  $\sigma$  окажется комплексным, то возмущение, пропорциональное  $e^{i\sigma t}$ , будет содержать  $e$  в положительной степени, а это значит, что течение неустойчиво, так как возмущение неограниченно возрастает. Когда оно достигает конечной величины, члены более высоких порядков отбрасывать нельзя, и наш математический аппарат становится неприменимым. Поэтому последующее развитие течения будем изучать другими средствами. Устойчивость теряется тогда, когда выражение внутри больших прямых скобок в уравнении (6.1.10) становится отрицательным, а это бывает при

$$(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)^2 < (\rho_1 + \rho_2) \left[ \rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 - \frac{g}{k} (\rho_2 - \rho_1) \right],$$

т. е. когда

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1)}{\rho_1 \rho_2} \frac{g}{k} < (U_1 - U_2)^2. \quad (6.1.11)$$

Это условие показывает, что всегда есть диапазон волновых чисел  $k$ , соответствующий неустойчивым волнам, если  $U_1 \neq U_2$ . При  $\rho_1 > \rho_2$  условие (6.1.11) выполняется для всех волновых чисел, так как это есть случай статической неустойчивости. Неустойчивость в статически устойчивом случае называют *неустойчивостью по Гельмгольцу* (часто, но необоснованно ее называют устойчивостью Кельвина—Гельмгольца).

Если скачок плотности мал, то можно записать

$$\rho_2 - \rho_1 = \Delta\rho, \quad \rho_2 + \rho_1 = 2\rho, \quad \rho_1 \rho_2 = \rho^2. \quad (6.1.12)$$

Тогда, обозначив  $U_1 - U_2$  через  $\Delta U$ , приведем условие (6.1.11) к виду, означающему, что устойчивость теряется, если

$$k > k_c = 2g \frac{\Delta\rho}{\rho} / (\Delta U)^2. \quad (6.1.13)$$

Волны, длина которых меньше  $2\pi/k_c$ , неустойчивы.

Такой подход на практике имеет много недостатков. Если длина волны очень мала, то градиенты скорости становятся большими и влиянием вязкости пренебречь нельзя. Кроме того, скачок скорости происходит в пределах тонкого слоя, где ее градиент велик. Этот слой и называется вихревым. Наш подход несправедлив, когда длина волны мала и сравнима по величине с толщиной вихревого слоя. Кроме того, выше предпола-



галось, что течение в каждом слое безвихревое и в невозмущенном состоянии однородное. Изложенная теория не позволяет сделать каких-либо выводов, когда волны становятся большими, а также когда на поверхности воды под действием ветра возникает рябь и определяющим становится поверхностное натяжение.

Пользуясь более сложными методами исследования, Дрейзин (1957, 1961, 1974), Майлз (1958, 1959), Хоуард (1961), Уоррен (1968, 1974) и другие рассматривали случай, когда между слоями есть переходная зона. При этом были получены критерии, аналогичные неравенству (6.1.13), дающие, однако, для предела устойчивости меньшие значения длин волн. Таким образом, указанные авторы находят максимальное значение величины, аналогичной стоящей в правой части неравенства (6.1.13), при котором возможна некоторая степень неустойчивости. Их интересуют также критерии, позволяющие выяснить, когда теряется устойчивость. Мы преследуем другую цель. Нас интересует не строгий критерий потери устойчивости, а его математическая форма, с помощью которой можно было бы выяснить, что должно произойти в реальных условиях, чтобы течение стало неустойчивым. Нас интересует также характер последующего движения. Излагаемый ниже подход был предложен в работе Скорера (1971).

Пусть вихревой слой имеет толщину  $\Delta z$ , а градиент скорости в нем  $\eta$  равен проекции завихренности на нормаль к плоскостям, в которых происходит движение. Имеется также градиент плотности  $\beta$ , так что

$$\Delta\rho = \beta\rho\Delta z, \quad \Delta U = \eta\Delta z. \quad (6.1.14)$$

В рассматриваемом слое вертикальное смещение  $\xi = A \cos kx$ , и в первом приближении частица в центре слоя будет иметь горизонтальную составляющую скорости  $u_0 \cos kx$ , причем в начальный момент ее скорость равна нулю, а жидкость над и под ней движется в противоположных направлениях. Это движение полностью определяется завихренностью слоя, и жидкость, движущаяся в нем, имеет свое собственное поле скоростей.

Элемент слоя длиной  $\delta x$  относительно гребня волны, смещение которого равно  $A$ , имеет координаты  $[x, A(1 - \cos kx)]$ . Этот элемент обладает завихренностью  $\eta\Delta z\delta x$  и сообщает частице, находящейся на гребне волны, горизонтальную составляющую скорости

$$\frac{\eta\Delta z\delta x}{2\pi x} \frac{A(1 - \cos kx)}{x}. \quad (6.1.15)$$

Чтобы получить это выражение, мы предположим, что

$A(1 - \cos kx)$  мало по сравнению с  $x$ . Поэтому для скорости частицы на гребне волны, обозначаемой  $u_0$ , имеем

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta \Delta z A (1 - \cos kx)}{2\pi x^2} dx = \frac{\eta \Delta z A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 1/2 kx}{x^2} dx = \\ &= -\frac{\eta \Delta z A}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} \sin^2 1/2 kx \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\eta \Delta z A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\sin kx}{x} dx. \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Первый член в выражении (6.1.16) обращается в нуль, так как представляет собой интеграл нечетной функции от  $x$ , которая в бесконечности сама обращается в нуль. Интеграл во втором члене хорошо известен и равен  $k\pi$  [см., например, уравнение (5.19.2)]. Следовательно, горизонтальная составляющая скорости жидкости в вихревом слое определяется выражением

$$u = u_0 \cos kx = 1/2 \eta \Delta z A k \cos kx. \quad (6.1.17)$$

Вертикальная составляющая скорости на гребне волны равна нулю, так как завихренность, создающая движение, симметрична относительно оси  $z$ . Здесь мы сталкиваемся с интересным расхождением с изложенным выше классическим подходом, которое, по-видимому, состоит в том, что амплитуды волн растут, а их форма (синусоидальная) остается неизменной. Отметим, что скорость волн равна нулю, если оба слоя имеют невозмущенную скорость  $\pm U$ , так как при  $\rho_1$ , приблизительно равном  $\rho_2$ , действительная часть  $\sigma$  равна нулю [уравнение (6.1.10)]. Кроме того, из уравнения (6.1.3) следует, что  $\psi$  и  $\xi$  не совпадают по фазе, и вертикальная скорость гребня волны равна нулю, хотя она и растет экспоненциально. Поэтому механизм роста в классической теории не рассматривается.

Так как  $u$ , согласно уравнению (6.1.17), меняется в горизонтальном направлении, то завихренность, сносимая с этой скоростью, имеет тенденцию накапливаться вблизи узлов, расположенных на склонах волн, движущихся вниз (например,  $N$  на рис. 6.1.2), и уходить от узлов  $N'$  на склонах волн, движущихся вверх. Скорость накопления завихренности на единицу длины слоя равна  $-\eta \Delta z (\partial u / \partial x)$ , или после преобразований

$$1/2 (\eta \Delta z)^2 A k^2 \sin kx. \quad (6.1.18)$$

В то же время завихренность в слое меняется за счет действия силы тяжести на изменение градиента плотности со скоростью, представленной членом  $\mathbf{R} \times \mathbf{g}$  в уравнении (1.4.1). Поэтому скорость создания новой завихренности  $\beta g (\partial \xi / \partial x)$  в расчете на единицу площади поперечного сечения слоя равна

скорости на единицу длины слоя, т. е.

$$g\beta \Delta z \frac{\partial}{\partial x} A \cos kx = -g\beta \Delta z A k \sin kx. \quad (6.1.19)$$

Если сумма значений выражений (6.1.18) и (6.1.19) положительна, то при положительном  $\sin kx$  завихренность будет накапливаться вблизи узлов на склонах волн, движущихся вниз, куда она будет сноситься. Соответственно в узлах на склонах, движущихся вверх, завихренность будет убывать. Так как такое перераспределение завихренности будет создавать тенденцию к увеличению высоты гребней волн и глубины

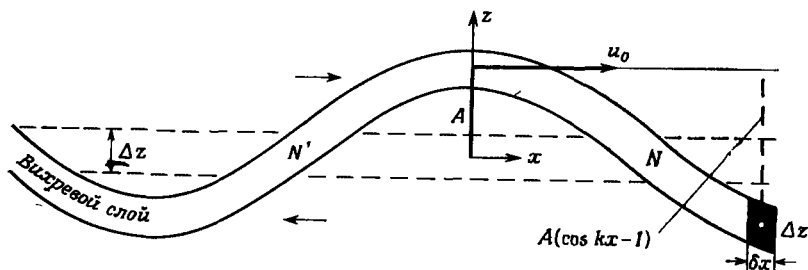


Рис. 6.1.2. Замена разрыва вихревым слоем с синусоидальным смещением.

Скорость гребня волны рассчитывается по уравнению завихренности. Завихренность накапливается в узлах  $N$ , расположенных на нисходящем склоне волны, и удаляется от  $N'$ .

впадин между ними, то возмущение будет расти. Точно так же можно заключить, что при отрицательной сумме значений выражений (6.1.18) и (6.1.19) и положительном  $\sin kx$  завихренность будет расти вблизи узлов на склонах волн, движущихся вверх, и волны будут сглаживаться. При этом возмущение не будет развиваться, а будет распространяться как устойчивая волна или колебаться около равновесного невозмущенного положения. Следовательно, условие потери устойчивости имеет вид

$$\frac{1}{2}(\eta \Delta z)^2 k > g\beta \Delta z \quad \text{или} \quad k > k_c = 2g\beta/h^2 \Delta z. \quad (6.1.20)$$

Следует добавить, что толстый вихревой слой при очень малых длинах волн неустойчив. Если предположить, что действует некий механизм, который постепенно увеличивает завихренность слоя  $\eta$ , то потеря устойчивости сначала произойдет на длинноволновом конце диапазона неустойчивости, определяемого неравенством (6.1.20). С помощью уравнения (6.1.14) можно показать, что это решение совпадает с решением (6.1.13). Обозначив толщину вихревого слоя через  $h$ , из выражения (6.1.20) найдем

$$\frac{1}{2}k_c h = \frac{g\beta}{\eta^2} = \text{Ri}, \quad (6.1.21)$$

где  $Ri$  — число Ричардсона для вихревого слоя (см. разд. 7.5).

Классические исследования Майлза, Хоурда и Уоррена показали, что неустойчивость не развивается, пока число Ричардсона в какой-либо точке поля течения не станет менее  $1/4$ . Если оно примерно равно этой величине, то имеет место приближенное соотношение

$$\frac{2\pi}{k_c} \approx 4\pi h, \quad (6.1.22)$$

которое позволяет грубо оценить длину волны, с наибольшей вероятностью появляющейся в вихревом слое толщиной  $h$ . Механизм, посредством которого число Ричардсона может быть уменьшено настолько, что разовьется неустойчивость, рассматривается ниже.

Любые выкладки, приводящие к результату, подобному уравнению (6.1.22), неизбежно являются весьма приближенными, так как в действительности ни один слой не может иметь постоянное число Ричардсона, так как оно обязательно меняется по глубине слоя. Критерии потери устойчивости должны зависеть не только от величины числа Ричардсона, но и от того, как оно меняется в пределах слоя. Так, вовсе обязательно должно быть неустойчивым течение, в котором всюду  $Ri < 1/4$ . Очевидным примером является случай постоянной плотности при постоянном сдвиге, когда для всего поля течения  $Ri = 0$ . Согласно развиваемой теории устойчивость теряется благодаря концентрации завихренности в слое, которая накапливается в узлах в процессе развития неустойчивости, и в результате вихревой слой свертывается в валы (billows)<sup>1)</sup>, — так называют это явление, чтобы не путать его с гравитационными волнами, вызываемыми внешними возмущениями вроде выступов на границе течения или сильной конвекции. Валы всегда образуются группами и, как будет показано ниже, являются главной причиной перемешивания в устойчиво стратифицированной среде.

С указанным явлением часто сталкиваются при наблюдении облачных образований, и оно производит сильное впечатление, так как демонстрирует внезапное появление периодической структуры с постоянным шагом, которому вовсе не предшествует возникновение неустойчивой ситуации, когда случайное возмущение вызывает резкое изменение состояния воздушной массы. Напротив, процесс имеет характер постепенной дестабилизации, когда вслед за потерей устойчивости в узком диапазоне длин волн происходит стремительный рост

<sup>1)</sup> Довольно крупные периодические структуры с постоянным шагом, каждый элемент которых обладает внутренней циркуляцией. Для наглядности их можно было бы сравнить с бугьями.— *Прим. ред.*

возмущений. Вязкость не играет существенной роли в определении минимальной длины волны, при которой проявляется неустойчивость в атмосфере или в океане, где это явление широко распространено (см. Вудс и Уайли, 1972). Если дестабилизация продолжается и после появления первых неустойчивых волн, это приводит лишь к увеличению скорости их роста. Волны других длин не играют заметной роли, так как волна, первой потерявшая устойчивость, растет экспоненциально и продолжает доминировать.

## 6.2. Развитие структуры «кошачий глаз»

Рассмотрим теперь в общих чертах развитие неустойчивых волн, имея в виду получить представление о конечном результате этого процесса. Согласно классической теории увеличивается только амплитуда волн. Выше было показано, что их рост обусловлен накоплением завихренности в узлах, расположенных там, где жидкость движется вниз по склону волны, и в свою очередь способствует такому накоплению завихренности. Эксперименты, проведенные Торпом (1968), позволили изучить многие важные свойства валов, которые трудно наблюдать в природе. Вудс (1968) показал, что они существуют и под водой, а Скорер (1972) рассмотрел различные формы облаков, образующихся при развитии облачных валов.

В результате растяжения вихревого слоя в восходящих узлах увеличивается завихренность в нисходящих узлах, т. е. там, куда сносится завихренность. За этим следует быстрое изменение характера течения, показанное на рис. 6.2.1.

В третьей стадии развития (рис. 6.2.1) в точке *A* оказывается жидкость, обладающая большей плотностью, чем жидкость в точке *B*, и, следовательно, в свернувшихся вихрях жидкость оказывается в неустойчивом состоянии и начинает перемешиваться. В последней стадии развития образуется структура, называемая «кошачий глаз». Перемешанная жидкость собирается в отдельные ролики, выше и ниже которых продолжается волновое движение. При этом и в верхних, и в нижних волнах происходит сдвиг по фазе на  $1/4$  в направлении течения, и они оказываются в противоположных фазах.

На третьей стадии может наблюдаться значительное закручивание вихря, когда образуется нечто вроде рулета с вареньем; особенно сильно эта тенденция проявляется, когда разность плотностей мала, а сдвиг велик. Если плотности слоев сильно различаются, то перемешивание начинается сразу после второй стадии течения (рис. 6.2.1). В этом случае в теоретические формулы должна быть внесена поправка в виде мно-

жителя  $thkd$ , где  $d$  — глубина одного из слоев жидкости, если она конечна. Если  $kd > 1,5$ , то с точностью до 10%  $thkd = 1$ , и, следовательно, при глубине слоя, несколько превышающей

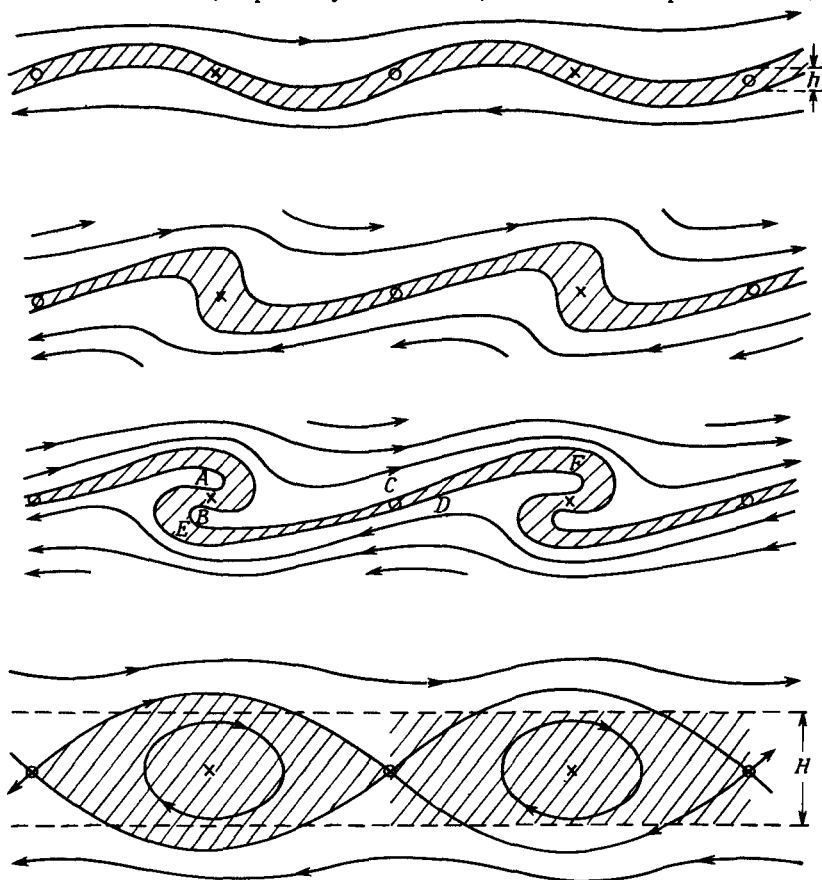


Рис. 62.1. Развитие валов от стадии синусоидального возмущения вихревого слоя, который свертывается в узлах, расположенных на нисходящих склонах волн.

Жидкость в местах свертывания гравитационно неустойчива и вскоре начинает смешиваться, образуя отдельные ядра перемешанной жидкости. В результате формируется структура, показанная на нижней схеме и называемая «кошачьи глаза». Постепенно весь этот слой жидкости под действием силы тяжести сплющивается, превращаясь в слой толщиной  $H$ , показанный штриховкой в правой части нижней схемы.

четверть длины волны, твердая граница слабо влияет на длину волны. В экспериментах Торпа этот эффект проявлялся в случае тонких слоев, однако в более глубоких слоях длина волны определялась толщиной вихревого слоя, как и следует из теории.

На последней стадии развития рассматриваемой структуры завихренность, очевидно, распределена в массе жидкости, однако выяснить характер ее распределения невозможно. Это мало влияет на течение вне области, занятой рассматриваемой структурой, так как суммарная завихренность остается той же, независимо от ее распределения. Поэтому можно предположить, что вся она сосредоточена в центрах ячеек. Это дает возможность использовать классическую формулу для движения вихрей, выстроенных в ряд. Как показал Ламб (1932, § 156), комплексный потенциал в этом случае имеет вид

$$\varphi + i\psi = -2lA \lg \sin \frac{1}{2}k(x + iz), \quad (6.2.1)$$

а горизонтальная и вертикальная составляющие скорости при больших  $z$  определяются выражениями

$$U + u = Ak \frac{\sin h kz}{\operatorname{ch} kz - \cos kx} \rightarrow Ak \operatorname{sgn} z [1 + \exp(-k|z|) \cos kx] \quad (6.2.2)$$

и

$$w = Ak \frac{\sin kx}{\operatorname{ch} kz - \cos kx} \rightarrow Ak \exp(-k|z|) \sin kx. \quad (6.2.3)$$

Здесь  $U$  — скорость переноса жидкости в горизонтальном направлении, а  $u$  — ее часть, зависящая от  $x$ . При  $\operatorname{th} kz \rightarrow 1$  величина  $U$ , достигаемая на расстоянии нескольких длин волн выше и ниже рассматриваемой структуры, не оказывает влияния на течение. В областях над рассматриваемой структурой и под ней течение имеет синусоидальный характер всюду, кроме непосредственной окрестности границы ячеек. Ламб исследовал устойчивость такой структуры и показал, что любое возмущение, при котором из линии вырывается один или более вихрей, будет расти. Это произойдет потому, что такой вихрь (или вихри) окажется в поле скоростей, уносящем его все дальше от исходного положения подобно тому, как растут возмущения вихревого слоя. Если нет стабилизирующего градиента плотности, как в случае, рассмотренном Ламбом, то неограниченно растут возмущения всех длин волн. Однако в рассматриваемом случае при наличии стабилизирующего градиента плотности, а также в атмосфере и в океане, где среда обычно всюду устойчиво стратифицирована, все волны устойчивы. Подход Ламба состоит в приблизительной оценке объема внутри областей замкнутой циркуляции. Оказывается (Скорер, 1951), что линии тока на конечной стадии развития структуры описываются уравнением

$$z = \frac{1}{k} \operatorname{ch}^{-1} [\exp(\psi/A) + \cos kx], \quad (6.2.4)$$

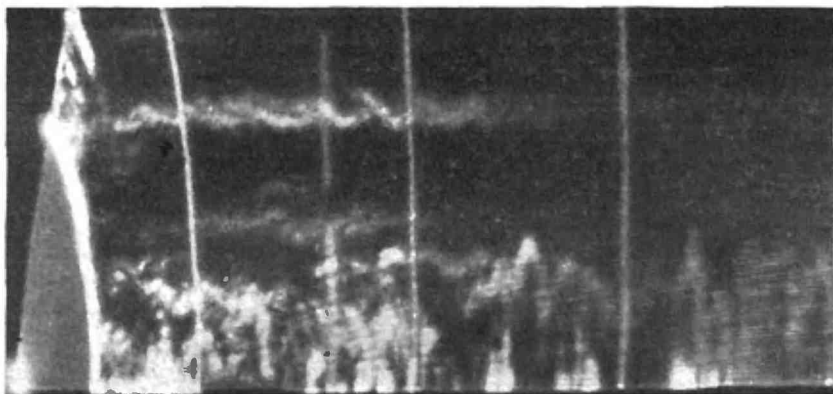


Рис. 6.2.2. Картина на экране радара, показывающая валы на высоте 3,5 км, ниже которых видна конвекция в ясном небе.

Фотография публикуется с разрешения Дж. Дж. Хикса из Университета им. Джона Хопкинса. Линии дальности проведены с интервалом 5 морских миль (9,25 км). Ближняя часть изображения прикрыта экраном, чтобы избежать засветки изображения.

а границы зоны циркуляции — уравнением

$$\psi = A \lg 2. \quad (6.2.5)$$

В центрах зон циркуляции  $\psi = -\infty$ , но на самом деле жидкость здесь, конечно, вращается как твердое тело с той же суммарной завихренностью. Если жидкость внутри зон циркуляции перемешивается, а затем они сплющиваются, превращаясь в горизонтальный слой толщиной  $H$ , то, приравняв площади поперечного сечения до и после сплющивания, получим

$$\pi H = \int_0^{\pi/k} 2 \operatorname{ch}^{-1} [2 + \cos kx] dx, \quad (6.2.6)$$

откуда

$$\frac{2\pi}{k} \approx 2,7H. \quad (6.2.7)$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (6.1.22), находим

$$H = 4,6h. \quad (6.2.8)$$

Таким образом, в результате всей перестройки течения толщина вихревого слоя увеличивается в 4,6 раза, а жидкость перемешивается и становится однородной внутри нового слоя, на верхней и нижней границах которого возникают довольно большие скачки плотности.

Максимальный градиент плотности во всей этой последовательности событий достигается сначала вблизи узла на



восходящем склоне волны, так как слой жидкости между точками  $C$  и  $D$  в третьей стадии развития вытягивается и утончается. Затем большой скачок плотности создается на каждой волне на всем пути от  $E$  до  $F$ . Именно такая картина наблюдается на экране радара, когда в атмосфере возникают валы (рис. 6.2.2). Еще позднее, когда начинается перемешивание, становятся видны вихри, и на ранних стадиях перемешивания вследствие наложения воздушных масс с разной плотностью возникают большие градиенты давления. Наконец, жидкость внутри зон циркуляции, которые называют «кошачьими глазами», становится более однородной, и радар фиксирует внешнюю границу ячеек, на которой концентрируется скачок плотности.

### 6.3. Возникновение неустойчивости типа валов

В генерации завихренности в атмосфере главную роль играет сила тяжести. Так как в уравнении (1.4.1) влияние вязкости и дивергенции скорости пренебрежимо мало, а градиент  $v$  в направлении  $\omega$  в двумерном течении равен нулю, то вихревые линии не растягиваются и остаются перпендикулярными к плоскостям, в которых происходит движение. Поскольку ускорение жидкости создается силами плавучести (приближение Буссинеска), оно мало по сравнению с ускорением силы тяжести и уравнение завихренности приобретает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{g} \quad (6.3.1)$$

или

$$\frac{d\eta}{dt} = q \frac{\partial \eta}{\partial s} = g\beta \sin \psi, \quad (6.3.2)$$

где  $\eta$  — величина завихренности,  $s$  — координата, измеряемая вдоль траектории частицы,  $q$  — скорость жидкости,  $\beta$  — мера плотности (или потенциальной температуры), а  $\psi$  — угол наклона изэнтропических поверхностей (т. е. поверхностей тока при адиабатическом течении) к горизонту, рис. 6.3.1. Если течение стационарное, то

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{g\beta}{q} \sin \psi, \quad (6.3.3)$$

и для малого элемента дуги  $\delta s = \delta z / \sin \psi$

$$\delta \eta = \frac{g\beta}{q} \delta z. \quad (6.3.4)$$

При двумерном стационарном течении скорость и градиент плотности (потенциальной температуры) обратно пропорциональны расстоянию между линиями тока и, следовательно, можно записать

$$\frac{q}{\beta} = \text{const} = \frac{q}{\beta_0}, \quad (6.3.5)$$

где индекс 0 соответствует условиям при смещении далеко назад по линии тока.

Особый интерес представляет случай, когда имеется тонкий слой с большим  $\beta_0$  и таким малым сдвигом, что он оказывается устойчивым. Если такой слой наклонен к горизонту, то в волновом движении, создаваемом, например, перетеканием через гору, дополнительно генерируемая завихренность связывается уравнением (6.3.4) со смещением линий тока в верти-

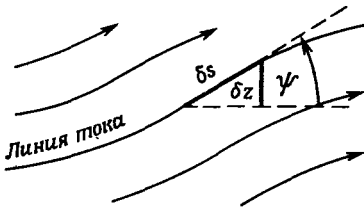


Рис. 6.3.1. Координаты для вывода уравнения роста завихренности (6.3.3) в наклонном течении.

кальном направлении, отсчитываемом от исходного уровня, а число Ричардсона определяется выражением

$$Ri = \frac{g\beta}{(\eta_0 + \delta\eta)^2} = g\beta \left/ \left( \eta_0 + \frac{g\beta_0}{q_0} \delta z \right)^2 \right. . \quad (6.3.6)$$

Когда начальная завихренность  $\eta_0$  мала и, следовательно, не играет большой роли (а  $Ri$  в начальный момент времени очень велико, и, следовательно, течение устойчиво), то после смещения имеем

$$Ri = \frac{q^2}{g\beta (\delta z)^2} = \frac{qq_0}{g\beta_0 (\delta z)^2} . \quad (6.3.7)$$

При перемещении по заданной волновой структуре с заданным  $\delta z$  число Ричардсона будет иметь наименьшие значения при максимальных  $\beta$ , а также при максимальных  $\delta z$  и минимальных  $q$ . Однако величины  $\delta z$  и  $q$  определяются факторами гораздо большего масштаба, чем глубина слоя и величина  $\beta$  в нем.

Уже с начала 50-х годов, когда с помощью самолетов начали изучать турбулентность ясного неба, известно, что чаще всего она развивается в слоях воздуха, обладающих наибольшей статической устойчивостью. Это обстоятельство считалось загадочным, пока Скорер (1961) не обратил внимание на тот факт, что хотя  $\beta$  оказывает стабилизирующее влияние, созда-

ваемая им завихренность  $\eta$  входит в число Ричардсона в квадрате. Поэтому при наклоне статически устойчивых слоев большая статическая устойчивость превращается в дестабилизирующий фактор.

Уравнение нестационарного движения, аналогичное уравнению (6.3.4), имеет вид

$$\delta\eta = g\beta\delta t \sin\psi, \quad (6.3.8)$$

где  $\delta t$  — время, в течение которого поддерживается наклон на угол  $\psi$ . Этим объясняется, почему в уравнение (6.3.4) входит  $q^{-1}$ : при медленном движении по заданной волновой структуре наклон выделенного объема воздуха сохраняется дольше.

Иногда думают, что горизонтальная составляющая ускорения потока, за счет которой сокращается расстояние между линиями тока, сильно влияет на число Ричардсона. Если вектор завихренности перпендикулярен направлению течения, то он не меняется в потоке, движущемся ускоренно, так как длина вихревых линий остается неизменной. В то же время при сближении поверхностей постоянной энтропии  $\beta$  увеличивается. Следовательно, число Ричардсона также увеличивается и слой стабилизируется. Поэтому при замедлении течения происходит его дестабилизация.

С другой стороны, если вектор завихренности направлен по потоку (эту его составляющую обозначим через  $\xi$ ) и течение не меняется в поперечном направлении  $y$ , то величина  $\xi$  растет в направлении  $x$  вследствие ускорения и растяжения. Таким образом, используя уравнение (1.4.6) для  $\omega$ , приближенно получаем

$$q \frac{\partial \xi}{\partial s} = \xi \frac{\partial q}{\partial s} \quad \text{или} \quad \frac{\delta \xi}{\xi} = \frac{\delta q}{q} \quad (6.3.9)$$

и

$$Ri = \frac{g\beta}{\xi^2} = \frac{g\beta_0 q}{\xi_0^2 q_0 (1 + \delta\xi/\xi_0)^2} = \frac{g\beta_0}{\xi_0^2} \frac{q}{q_0} \left(1 + \frac{\delta q}{q_0}\right)^{-2}, \quad (6.3.10)$$

или

$$Ri = Ri_0 \left(1 - \frac{\delta q}{q}\right). \quad (6.3.11)$$

В этом случае при поперечном сдвиге увеличение скорости влечет за собой уменьшение числа Ричардсона, хотя в то же время увеличивается статическая устойчивость. Так как это влияние противоположно влиянию на составляющую  $\eta$ , то нельзя безоговорочно утверждать, что ускорение обусловлено изменением  $Ri$ . Во всяком случае, это влияние должно быть небольшим по сравнению с влиянием наклона, когда значение  $\beta$  велико.

При обычных движениях, происходящих в атмосфере или океане, ускорения невелики. Однако наклон слоя может оказывать сильное влияние, особенно в случае, если длины волн велики или если с подветренной стороны горы срываются вихри, а волны распространяются по потоку и их скорость относительно воздуха мала.

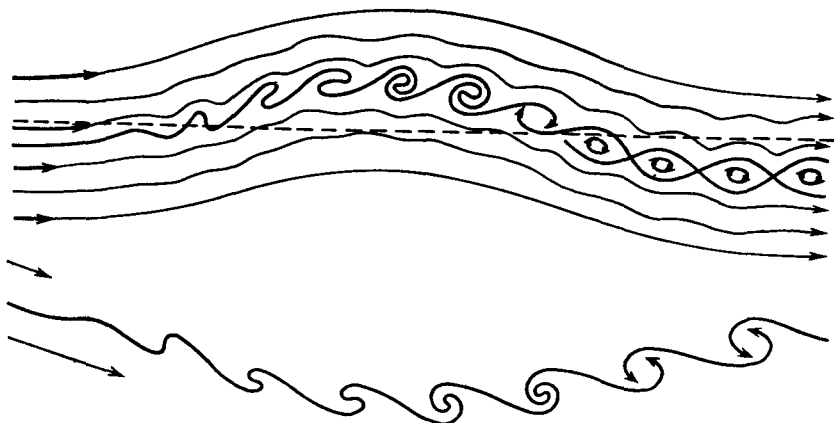


Рис. 6.3.2 Схематическое изображение типичных стадий развития валов на гребне волн

В нижней части рисунка показано образование валов во впадине между волнами, где они обычно не видны

В уравнении для подветренных волн важнейшими членами являются [см., например, уравнение (5.8.24)]

$$\nabla^2 \zeta + \frac{g^3}{u_0^2} \zeta = 0, \quad (6.3.12)$$

где  $\zeta$  — смещение по вертикали в случае двумерного движения в плоскости  $xz$ . В тех слоях, где  $\beta$  много больше, чем на других уровнях, кривизна профиля  $\zeta(z)$  максимальна, если не окажется, что  $\zeta$  на этом уровне мало. Поэтому наиболее вероятно, что именно на этих уровнях градиент профиля  $\zeta$  меняет знак и  $\zeta$  достигает максимума. Следовательно, слои с большим  $\beta$ , помимо того, что они являются слоями, в которых при наклоне число Ричардсона увеличивается сильнее, чем в других слоях, характеризуются максимальной амплитудой волны и максимальным  $\delta z$ , когда влияние на  $Ri$  максимально. По этой причине волны в атмосфере, возникающие при обтекании гор, особенно часто приводят к образованию валов, последовательность развития которых показана на рис. 6.3.2.

Действительно, планеристам давно уже известно, что верхний слой слоисто-кучевых облаков обычно соответствует уровню, на котором подветренные волны достигают максимума. Обусловлено это излучением тепла с верхней поверхности облака, в результате которого нижележащие массы воздуха охлаждаются (вследствие направленной вниз конвекции), а вблизи верхней части облака образуется слой, обладающий большой статической устойчивостью, в котором развиваются валы. Наблюдения подтверждают, что при возникновении волн валы чаще всего формируются в верхних частях облаков (см. книгу Скорера *Clouds of the World*, гл. 6).

#### 6.4. Динамическая генерация слоев, обладающих большой устойчивостью

В этом разделе излагается весьма эффективный метод, применимый для анализа многих задач устойчивости, в которых несущественны вязкость и граничные условия и, следовательно, отсутствуют характерные линейные размеры, которые надо было бы вводить в дисперсионное соотношение для данной среды. Те же результаты можно, конечно, получить и с помощью классической теории возмущений.

Рассмотрим горизонтальный воздушный поток в направлении  $x$  при условии геострофического равновесия, обладающий статической устойчивостью  $\beta$  и вертикальным и горизонтальным градиентами скорости  $du/dz$  и  $du/du$ . Подсчитаем работу, совершаемую против сил, действующих при перемещении воздушных масс. Если эта работа окажется отрицательной, то перемещение будет самоподдерживающимся, т. е. будет представлять собой один из видов неустойчивости. Ниже будет показано, что при некоторых перемещениях создаются большие градиенты потенциальной температуры, которые, как мы только что видели, являются вероятными причинами возникновения валов и, следовательно, турбулентности ясного неба, которая почти всегда обусловлена их формированием.

На объем воздуха, перемещающийся по вертикали на расстояние  $c$ , действует сила плавучести  $g\beta c$ , которая на пути перемещения совершает работу

$$\int_0^c g\beta c \, dc = \frac{1}{2}g\beta c^2. \quad (6.4.1)$$

В результате указанного перемещения скорость объема воздуха изменяется на  $c(du/dz)$ , и поэтому на него будет действовать отклоняющая сила, обусловленная вращением Земли, отличающаяся от аналогичной силы для окружающих объемов воздуха

на величину  $f c (\partial u / \partial z)$ , где  $f$  — проекция вектора угловой скорости Земли на местную вертикаль. Если под действием этой силы объем воздуха переместится в направлении ее действия на расстояние  $b$ , то будет совершена работа

$$f b c \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (6.4.2)$$

Но при смещении на расстояние  $b$  в направлении  $y$  объем воздуха приобретет скорость  $b [(\partial u / \partial y) - f]$  в направлении  $x$  ( $b x$  — абсолютная завихренность), и если предположить, что  $f$  постоянно на длине перемещения, то работа, совершаемая при перемещении  $b$  в направлении  $y$  соответствующим приращением отклоняющей силы, равна

$$\int_0^b f b \left( \frac{\partial u}{\partial y} - f \right) db = \frac{1}{2} f \left( \frac{\partial u}{\partial y} - f \right) b^2. \quad (6.4.3)$$

Если суммарная работа на перемещении ( $b$ ,  $c$ ) в направлениях  $y$  и  $z$  положительна, то такое перемещение неустойчиво, и около линий тока может возникнуть циркуляция, поскольку положительная работа может быть совершена также на перемещениях ( $-b$ ,  $-c$ ) других объемов воздуха, что создает условия для замкнутой циркуляции. Сложив все три составляющие (6.4.1), (6.4.2) и (6.4.3), получим условие неустойчивости

$$\frac{1}{2} f \left( \frac{\partial u}{\partial y} - f \right) b^2 - f b c \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} g \beta c^2 > 0. \quad (6.4.4)$$

Течение неустойчиво при  $c=0$ , если  $(\partial u / \partial y) > f$ . Смысл этого утверждения состоит в том, что течение в атмосфере, вращающейся вместе с Землей, имеет циркуляцию, которая убывает в направлении внешней нормали к криволинейным линиям тока (см. разд. 3.12). Формулируя то же в локальных терминах, можно сказать, что касательная, движущаяся вместе с частицей, вращается в направлении, противоположном направлению завихренности жидкости (рассматривается только составляющая, нормальная к земной поверхности). Выше не учитывалась кривизна линий тока относительно земли (а следовательно, и циклострофическая сила). В большинстве случаев  $\partial u / \partial y$  примерно равно  $\frac{1}{2} f$ .

Однако  $c/b$  и  $\partial u / \partial z$  могут быть отрицательными. Действительное значение  $c/b$ , удовлетворяющее условию (6.4.4), существует, если

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \geq g \beta \left( 1 - \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (6.4.5)$$

Условие нулевой неустойчивости получим, заменив в выраже-

ниях (6.4.4) и (6.4.5) знаки неравенства на знаки точного равенства. Тогда получим

$$\frac{c}{b} = \left\{ \frac{f [f - (\partial u / \partial y)]}{2g\beta} \right\}^{1/2}. \quad (6.4.6)$$

Эта величина представляет собой удлинение вторичных ячеек, которые развиваются в геострофически движущемся потоке. Чтобы получить представление о форме ячейки, подставим в уравнение (6.4.6) следующие характерные значения:

$$f = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \quad (\text{приблизительно на широте } 45^\circ);$$

$$g \approx 10^3 \text{ см/с}^2;$$

$$\beta = 10^{-7} \text{ см}^{-1} \quad (\text{при } \partial T / \partial z \approx 1/3 \Gamma);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1/2 f = 2,5 \text{ м/с на каждые } 100 \text{ км.}$$

Тогда получим

$$\frac{c}{b} = 2,5 \cdot 10^{-3}. \quad (6.4.7)$$

Диапазон значений  $\partial u / \partial y$  и  $\beta$  таков, что величина  $c/b$  меняется примерно в 3 раза. Соответствующее значение вертикального градиента скорости, как следует из соотношения (6.4.5), равно  $(1/2 g\beta)^{1/2}$ , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}; \quad (6.4.8)$$

что соответствует градиенту 7 м/с·км. Это вполне обычная величина; при больших градиентах степень неустойчивости увеличивается. С ростом производной  $\partial u / \partial y$ , когда ее величина стремится к  $f$ ,  $c$  в соответствии с уравнением (6.4.6) уменьшается и ячейки сплющиваются сильнее; однако даже и в случае  $\partial u / \partial y = 0$  величина  $c/b$  меняется не так сильно, чтобы это могло сказаться на результатах нашего анализа. В случае  $\partial u / \partial y = 0$  условие (6.4.5) иногда выражают через число Ричардсона

$$Ri = \frac{g\beta}{(\partial u / \partial y)^2} \leq 1. \quad (6.4.9)$$

Тогда неравенство (6.4.4) приводится к виду

$$Q^2 + \frac{2}{Ri^{1/2}} Q + 1 < 0, \quad (6.4.10)$$

где

$$Q = \frac{c}{b} \frac{(g\beta)^{1/2}}{f}, \quad (6.4.11)$$

и если  $Ri < 1$ , то условие (6.4.10) удовлетворяется для диапазона значений  $c/b$ , которые в свою очередь удовлетворяют двойному неравенству

$$1 - (1 - Ri)^{1/2} < Ri^{1/2}Q < 1 + (1 - Ri)^{1/2}. \quad (6.4.12)$$

Знак  $du/dz$  не имеет значения, и области, в которых  $du/dz$  может достигать больших величин, находятся там, где струйное течение теряет скорость, взаимодействуя с медленно движущимся воздухом. В северном полушарии, где  $f$  всюду положительно, а  $du/dy$  положительно слева от струйного течения, наиболее вероятной областью развития неустойчивости является именно эта область струи (особенно на выходе), так как здесь приращение скорости превышает значение, принятое при вычислении интеграла (6.4.3), соответствующего геострофическому течению. Очевидно, что в случае агеострофического течения эти эффекты усилятся.

В результате действия вторичного течения поле температур в плоских ячейках искажается, и там, где градиент был постоянным, возникают слои с увеличенным и уменьшенным вертикальными градиентами. Так как слои с большим  $\beta$  обладают большей статической устойчивостью, то они становятся границами ячеек, и  $\beta$  в них увеличивается еще больше. В соответствии с оценкой (6.4.7) ячейки очень сильно сплюснуты: если по горизонтали они тянутся на 100 км, то их вертикальный размер составляет 250 м (или, самое большее, втрое больше), причем чем устойчивее слои, тем он тоньше.

Так как эти слои образуются в результате действия отклоняющей силы, обусловленной вращением Земли, то для их формирования требуется по меньшей мере один-два дня, и маловероятно, чтобы они были причиной малых чисел Ричардсона, при которых могут образоваться валы. В поисках причин умеренной или интенсивной турбулентности ясного неба нам придется обратиться к волнам, образующимся над горами, или к весьма интенсивным движениям вблизи атмосферных фронтов, где изэнтропические поверхности имеют большой наклон.

В то же время слабая турбулентность ясного неба наблюдается на больших расстояниях от гор и атмосферных фронтов и нередко развивается в стратосфере, где волны имеют длину 100—200 м. В этой связи необходимо сделать два замечания. Во-первых, если наклон устойчивых слоев так мал, что число Ричардсона убывает очень медленно, то степень неустойчивости (скорость роста) очень мала, так как возмущения могут расти очень долго без увеличения неустойчивости. В случае волн над горами наклон может быть так велик, что скорость роста становится весьма большой до того, как успеют развиться возмущения. После того, как развилось одно из этих



слабых возмущений, на его верхней и нижней границах образуются очень устойчивые слои, и если начальный наклон сохраняется, то здесь вполне может возникнуть слабая турбулентность. Таким образом, очень слабая турбулентность может существовать в стратифицированных воздушных массах в течение многих часов.

Во-вторых, надо отметить, что валы обычно быстро развиваются во времени, и поэтому наблюдаемая турбулентность ясного неба может обнаруживать ярко выраженную периодичность, если летательный аппарат пересекает валы на ранней стадии их развития. В то же время, если полет совершается вдоль валов и на той стадии развития, когда структура «кошачий глаз» превращается в горизонтальный слой глубиной  $H$ , турбулентность будет казаться бесструктурной. По-видимому, нет необходимости рассматривать другие виды турбулентности в безоблачной устойчиво стратифицированной атмосфере.

Поэтому мы можем перейти к более глубокому изучению турбулентности в природе и связанных с ней эффектов, что и будет основной темой второй части этой монографии.

## Часть II

# Турбулентность, облака и рассеяние

---

### Глава 7

## ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

### 7.1. Проблема чрезвычайной трудности

В первом издании своей «Гидродинамики» (1895 г.) по поводу проблемы турбулентности Ламб писал (§ 311): «Остается теперь обратить внимание на нерассмотренный до сих пор наиболее трудный вопрос нашего предмета». Буквально с той же фразы начинается соответствующий раздел (§ 365) последнего издания (1932 г.). Несмотря на это, изложение данного вопроса Ламбом не очень доступно для студентов. В то же время Брант (1939) создал стройный подход, представляющий собой комбинацию ясных физических концепций и простого математического аппарата. Но эта простота иллюзорна и является следствием выдающегося педагогического таланта Бранта, хотя изложение и вселяет чувство уверенности, а анализ выглядит завершенным.

Если не претендовать на то, что все движения, которые можно отнести к категории турбулентных, поддаются единой трактовке, и рассматривать частные случаи, которые помогают понять механизм явления, можно одновременно и продвинуться вперед в понимании этого процесса, и избежать ошибочного представления о том, что *турбулентность* как явление должна обладать внутренним единством, вследствие которого какое-либо ее свойство, открытое в связи с определенным аспектом, должно описывать и другой ее аспект. Словом, турбулентность вполне оправдывает данное ей прозвище «Лохнесского чудовища» (см. разд. 12.2).

Саттон в своей книге (1962) также указывает, что «... турбулентность является наиболее сложной проблемой гидродинамики». Так как существует множество таких турбулентных процессов, для которых невозможно дать полное описание, мы должны применить некоторый новый подход.

Книга Бэтчелора (1956) представляет собой хороший пример именно такого рассмотрения избранного явления, выде-

ленного из бесчисленного множества других турбулентных процессов, хотя эта книга часто несправедливо подвергалась критике за то, что развитый в ней аппарат имеет весьма ограниченное применение на практике вследствие того, что большинство реальных турбулентных процессов не являются однородными. Однако в ней, например, удачно описан процесс распада вихрей, который в нашей книге практически не затрагивается.

Теория «пути смешения» Прандтля дает простое математическое описание турбулентного движения вблизи границы и переноса количества движения в жидкости; это вместе с теорией переноса вихрей Рейнольдса стимулирует попытки решения проблемы при помощи так называемой  $K$ -теории (хорошо изложенной у Бранта).

Ощущение универсальности и легкости применения, которое  $K$ -теория возбуждает у инженеров и всех тех, кто хорошо знаком с теорией теплопроводности и движения вязких жидкостей, делает неизбежными экстравагантные попытки некоторых авторов заигрывать с этой теорией при описании турбулентных процессов, как это делает, например, Хинце (1959).

Совершенно другой подход к турбулентным явлениям, впервые проявившийся в работе Рейнольдса, посвященной возникновению турбулентных потоков в трубах, связан с описанием гидродинамической неустойчивости. В этой работе, где многое свидетельствует о весьма зрелом и эрудированном подходе, в частности, обсуждаются условия, при которых малые возмущения растут и вызывают превращение ламинарного течения в турбулентное. Нам необходимо кое-что усвоить из этого подхода, поскольку такое превращение весьма обычно в атмосферных процессах, но при этом следует подчеркнуть, что в отличие от инженеров, которые предпринимают попытки установить совершенно точный критерий такого перехода, мы уделим большее внимание механизмам, которые переводят устойчивое состояние в неустойчивое, а не самим процессам преобразования ламинарного потока в турбулентный. Для природы естественны не критическая ситуация, в которой может или не может возникнуть турбулентность, а неустойчивые или устойчивые состояния, которые проявляются за время порядка нескольких минут или часов. Когда движение становится нестабильным, эта тенденция настолько сильна, что абсолютно неважен вид нарастающих возмущений, возникающих в начальный момент разрушения ламинарного потока.

В гл. 8 мы детально рассмотрим случаи, в которых проявляются полезные для практики простые закономерности. Хотя мы при этом и сделаем ряд попутных замечаний о природе турбулентности вблизи твердых стенок, существует много

аспектов этого явления, которые мы не будем пытаться охватить. Турбулентные процессы в отсутствие стенок или вдали от них почти полностью игнорируются в научной литературе. В действительности же многие работы в этом направлении (например, о движениях, вызывающих неоднородность показателя преломления в атмосфере и обуславливающих рассеяние радиоволн) были совершенно затемнены концепциями, развитыми для описания турбулентности в пределах пограничного слоя или турбулентности в аэродинамических трубах, возникающей при течении газа сквозь решетки. Слишком свободное употребление слова «турбулентность» при описании таких движений приносит только вред.

Некоторые полагают, что теория турбулентности развитая и использованная в одном контексте, может быть применена к сложным флюктуационным движениям совсем в другом контексте, в особенности если в обоих случаях используются одни и те же измерительные приборы (например, термоанемометры).

В связи с этим возникает прискорбная необходимость предостеречь читателя от двух частых логических ошибок. Во-первых, от ошибки, что утверждение, относящееся к частному виду турбулентного движения, может быть верным (т. е. не обязательно является неверным) для этого вида движения, даже если показано, что оно очевидным образом неверно для другого вида турбулентного движения. Так, было предположено, что поскольку некоторые летающие насекомые не обладают навигационными способностями, турбулентность должна рассеивать их в атмосфере как дым или тлю. Но некоторые насекомые, наоборот, концентрируются в потоке, который в других обстоятельствах мог бы быть заведомо назван турбулентным (см. разд. 12.6). Точно так же некоторые сложные волновые движения могут иметь много признаков турбулентного течения, но не вызывать при этом рассеяния или диффузии какой бы то ни было субстанции, переносимой жидкостью.

Было показано, что в режиме однородной турбулентности с диссипацией энергии при некоторых условиях существуют вихри определенного диапазона масштабов, для которого их энергии  $E$  связаны с волновым числом зависимостью

$$E \sim k^{-5/3}. \quad (7.1.1)$$

Второе заблуждение состоит в том, что, если определяются характеристики определенного турбулентного потока и оказывается, что они удовлетворяют зависимости подобного типа, иногда делается вывод, что данный поток однороден и диссипация энергии вихрей в нем происходит по закону (7.1.1). Более того, иногда при грубом соответствии найденных зави-

симостей по формуле (7.1.1) делается заключение о «грубом соответствии» исследуемого режима режиму, описываемому формулой (7.1.1).

Абсурдность подобного заключения становится явной, если заметить, что даже сингулярный скачок скорости в разложении Фурье дает зависимость

$$E \sim k^{-1/3}, \quad (7.1.2)$$

которая в практических случаях, когда флюктуации скорости разлагаются по Фурье, едва ли может быть отличима от (7.1.1). Логическая неполнота такого заключения должна быть очевидной для всех исследователей, даже если искушение утверждать, что объяснение, выдвинутое специально для того, чтобы предсказать наблюдаемое явление, должно быть верным, часто является непреодолимым.

## 7.2. Что такое турбулентность

Я не ставлю себе целью еще раз давать определение турбулентности: слишком много слов уже было израсходовано по этому поводу на различных конференциях. Мое намерение — просто прояснить некоторые идеи, с тем чтобы можно было понять два основных положения. Во-первых, что для этого явления не существует единого универсального определения, и, во-вторых, что имеющиеся определения в достаточной степени несовместимы между собой, чтобы призвать нас к осторожности в применении их при изучении некоторых типов движения, называемого турбулентным.

Идея использования понятия турбулентности возникает, поскольку ряд движений не может быть описан точно. Более того, было бы бесполезно иметь такого рода описание, поскольку оно оказалось бы чересчур сложным.

Мы хотели бы здесь лишь выразить эффекты турбулентных движений в понятиях, пригодных для практического использования, что означает переход к всесторонним или статистическим описаниям, или заключениям без обсуждения лишних деталей. Для некоторых это означает невозможность подробного обсуждения механизма процесса и, следовательно, необходимость введения некоторых параметров, описывающих турбулентный процесс.

Как бы то ни было, нет гарантии, что представление при помощи параметров имеет какое-либо значение, поскольку в ряде случаев мы можем только оценить параметры пост-фактум и прогноз явления не облегчается. Говоря о турбулентности как о чрезвычайно трудной проблеме, Ламб в подтексте

как бы выражает надежду на то, что в один прекрасный день эта трудность будет преодолена.

Фактически же выход, по-видимому, заключается в примирении с мыслью о невозможности преодоления указанной трудности и об иллюзорности надежд на создание подходящей теории.

Такой переход к практически полезным понятиям с указанными выше ограничениями (в смысле детальности рассмотрения) в действительности более продуктивен, чем это может показаться на первый взгляд, так как он приводит нас к лучшему пониманию поставленных задач.

Очевидно, что чем глубже мы вникаем в какое-либо явление, тем более сложным оно кажется нам, и в случае неопределимо сложного движения есть лишь один путь к упрощению: решить, что должны существовать некоторые ограничения в сложности, в пределах которых мы готовы изучать явление. Жизнь слишком коротка, чтобы тратить ее на учет бесконечных деталей течения в некотором частном случае, и любой, кто занимается этим, не имеет уверенности ни в том, что следующий случай окажется таким же, ни в том, что его занятия кого-либо заинтересуют. Степень сложности, за пределами которой мы заканчиваем исследования, зависит от нашего выбора. Например, мы можем считать течение ламинарным и поддающимся детальному описанию или трактовать его как турбулентное, т. е. обладающее сложными свойствами, но определять только их общий эффект.

Так мы приходим к мысли, что существует некоторое среднее движение с добавленными к нему пульсациями. Среднее движение описывается полностью, а о флуктуациях мы имеем только статистическую информацию. Следовательно, элемент выбора заключается в том, что мы должны решить, как именно разделить движение на среднее и флуктуации. Разные люди могут провести такое разделение различным образом потому, что они выбрали различные критерии, либо потому, что их теории предназначены для различных целей. В результате турбулентность (флуктуационная часть процесса) выступает не как ясно очерченное объективное свойство движения, а как объект, произвольно определяемый по нашему усмотрению. Логика ситуации может привести нас к необходимости выработать определенную формулировку, и тогда такое определение может стать отражением реальных особенностей течения. Однако такие логические построения не имеют общего характера; они приспособлены к ситуации и соотношению между ней и нашими возможностями и желаниями.

Очень часто встречается совершенно иное определение турбулентности, а именно турбулентность — это сложное дви-

жение, вызывающее диффузию. Это определение основано на том соображении, что когда мы размешиваем молоко в чае или краситель в растворителе, то однородная смесь получается в результате очень сложного типа движения, и что такое перемешивание много эффективнее, чем молекулярная диффузия. Диффузия есть необратимый процесс. Более того, размешав ложкой чай, мы вызовем движение, имеющее масштаб ложки или чашки, которое затем быстро преобразуется во много более сложное движение существенно меньшего масштаба. Процесс, который способствует рассеянию табачного дыма, может быть определен как турбулентная диффузия, и потребуется не слишком много времени после появления дыма в помещении, чтобы его запах можно было ощутить в любом его углу.

Турбулентность способствует диффузии вещества частицы в сплошной среде (применительно к атмосфере — аэрозолей типа дыма и паров воды), а также любой из его характеристик: цвета, химического состава и т. п.

Частицы жидкости обладают тепловой энергией, плотностью, количеством движения и моментом количества движения, а также кинетической энергией как вращательного, так и поступательного движений. Есть свойства, не присущие постоянно жидким частицам; некоторые из них могут диффундировать благодаря механизму молекулярного переноса или под действием градиента давления, причем в последнем случае много быстрее, чем при молекулярной диффузии. Пульсации плотности могут передаваться в жидкости со скоростью звука посредством звуковых волн, тогда как пульсации концентрации какой-либо примеси могут передаваться только при движении самого этого вещества.

Скорость жидкости в точке может пульсировать либо из-за вихрей, переносящих частицы жидкости, либо из-за волн, проходящих во всех направлениях и заставляющих каждую частицу колебаться относительно ее среднего положения, причем частицы возвращаются в прежнее положение, когда возмущения прекращаются. В первом случае вещество частицы будет диффундировать в окружающей среде; во втором распределение вещества частицы останется таким, каким оно было до того, как волны начали распространяться в жидкости.

Существует явное различие между этими двумя типами движения. Можно считать, что волны генерируются движениями границ, и если для рассматриваемого момента можно пренебречь влиянием вязкости, то любая поверхность внутри жидкости может рассматриваться в качестве ее границы (например, для интересующей нас области). Если жидкость

первоначально находится в покое или в безвихревом движении, а плотность ее постоянна (или постоянна потенциальная температура для случая адиабатического движения), то вихри не будут возникать. Движение окажется безвихревым и, следовательно, обратимым. Если перемещаются границы очень сложной формы или если границы являются гибкими и перемещаются сложным образом, то жидкость подвергнется очень сложным пульсациям скорости, а ее частицы — очень сложным деформациям. Однако сложность движения жидкости будет соответствовать сложности движения границ и не будет превосходить последнюю ни на какой стадии. Таким образом, невязкая жидкость может быть приведена к начальному состоянию простым обратным движением границ в их начальное положение.

Напротив, в массе вязкой жидкости, заключенной в жесткие границы и приведенной в завихренное движение любым образом, например ложкой, перемещаемой в ней, возникает диффузия любой субстанции, первоначально содержавшейся лишь в малой ее части. В отсутствие вязкости движение, порождающее эту диффузию, может быть обращено, хотя движение, обращающее диффузионный процесс, будет тем более сложным, чем большее время развивался диффузионный процесс.

Ранняя и поздняя стадии процесса диффузии в жидкости легко различимы, но в случае безвихревого пульсационного течения поздняя стадия не будет существенно сложнее ранней. Подобно этому, если смотреть кинофильм о движении волн, происходящем без диссипации или потерь энергии в сосуде, содержащем жидкость, то будет невозможно определить, идет ли этот фильм в прямом или обратном направлении.

Случайный наблюдатель может рассматривать движение волн на морской поверхности или в колеблющемся сосуде как турбулентное из-за случайной природы пульсаций скорости частицы в точке, но движение, в котором вихри вызывают диффузию, принципиально отличается от указанного выше. Мы будем рассматривать случаи, когда имеется вихревое поле и процесс очевидным образом необратим во времени.

Это приводит нас, возможно, к самому простому определению турбулентности как *хаотического вихревого процесса*. В нем, правда, еще имеется субъективный элемент в виде слова «хаотический», так как часто опытный глаз наблюдает порядок там, где нетренированный отметит только хаос. Однако существует степень сложности, за пределы которой никто не желает переступать при детальном анализе движения жидкости. Когда имеется действительно сложная вихревая картина (а в некоторых ситуациях, например для плоской вихре-



вой поверхности, и довольно простая), движение становится более сложным. Элемент произвольности нашего определения в этом случае сходит на нет, так как движение уже достаточно долго будет турбулентным с точки зрения любого определения, прежде чем вязкость не воспрепятствует процессу усложнения, попросту разрушив турбулентный режим. Так, если мы помешаем ложкой в ведре воды, в котором находится капля чернил, то создадим турбулентность, и капля станет диффундирующим облаком, которое, очевидно, заслуживает название «турбулентного». Если же мы помешаем ложкой в ведре светлой патоки, в середине которой будет капля черной патоки, то эта капля в худшем случае слегка деформируется, но уж безусловно не может рассматриваться, как нечто, имеющее неопишимо сложную форму. Художник может легко изобразить ее во всех деталях, а техник сможет измерить ее. Это произойдет потому, что вязкость столь велика, что вихри масштаба ведра и меньше, перед тем как остановиться, не смогут повернуться сильнее, чем на малую часть оборота.

Покажем очень простой способ определения того, является ли данный вихревой режим хаотическим или нет. Введем регулярную сетку и условимся не рассматривать движения с масштабом меньшим, чем шаг сетки. Если значение вектора вихря в одной точке хорошо коррелирует со значениями в нескольких соседних точках, то это означает, что упорядоченная часть движения имеет масштаб больший, чем шаг сетки. Представим в виде ряда Фурье значения скорости во всех узлах регулярной сетки, расположенных вдоль одной из координатных осей<sup>1)</sup>; если достаточно только нескольких первых членов разложения, чтобы получить хорошее приближение, то это означает, что движение имеет характерный масштаб, больший, чем шаг сетки.

Если же, наоборот, последний член рассматриваемого отрезка ряда, соответствующий длине волны, равной удвоенному шагу сетки, имеет амплитуду столь же большую, что и у остальных членов ряда, то такое движение не может быть приближенно описано с помощью величин, заданных в узлах этой сетки. Это означает, что если бы число рассматриваемых узлов сетки было удвоено, то потребовалось бы соответственно вдвое большее число членов разложения. Следовательно, большая часть спектра будет пропущена, если использовать первоначальный шаг сетки; это будет та часть, которая не представляет для нас интереса, за исключением ее возможного воздействия на течение более крупного масштаба, например

---

<sup>1)</sup> Разложение производится по отрезку, образуемому пересечением оси и области рассматриваемого движения.— *Прим перев.*

в качестве аналога вязкости или посредством диффузии количества движения.

Особым свойством вихревого движения является то, что оно несет в себе энергию, которую нельзя эквивалентно представить как энергию соответствующего движения жидкости вблизи границы или движения самой границы. Движение ложки в чашке чая или ведре воды отличается тем, что ложка имеет выступающие контуры и острые кромки, вдоль которых течение отделяется от границы, и вихрь может образовываться в жидкости прямо на линии раздела.

Перед изучением механизма турбулентности как хаотического вихревого движения необходимо отметить, что прогресс может быть достигнут только в том случае, если движение будет эффективно разделено на среднее движение, которое поддается описанию, и случайное движение, которое хаотично. Мы, конечно, можем выбрать характерные масштабы длины или времени, условно разделяющие движение на две части, но возможно, что существуют границы, определенные самой природой движения. Так, например, вполне реально упорядоченное движение большого масштаба, такое, как течение жидкости в прямой трубе кругового течения. На него могут быть наложены флуктуации, которые легко вызывают диффузию струйки введенных в трубу чернил. В трубе не возникает вихрей больше, чем радиус трубы  $a$ , и флуктуаций с периодом больше, чем  $na/U$ , где  $n$  — величина, несколько большая единицы, а  $U$  — средняя скорость потока, определяемая по объемному расходу  $\pi a^2 U$ . Естественное разделение на среднее течение  $u(r)$  и пульсации достигается определением  $u(r)$  как средней скорости, зависящей от  $r$ , причем осреднение производится либо в фиксированном сечении на временном интервале, много большем, чем  $na/U$ , либо по длине трубы на расстоянии, много большем, чем  $r$ .

Такое естественное разделение не всегда возможно, поскольку в движении могут существовать вихри разных масштабов. Это означает, что если среднее значение определяется путем осреднения по пространству или времени нескольких малых вихрей или части одного большого вихря, то полученная величина будет сильно зависеть от выбора концов интервала осреднения. Если в операцию осреднения вовлечено очень большое число вихрей, то оставшаяся часть не внесет существенного изменения в полученное среднее; точно так же, если при осреднении учтена очень малая часть вихря, то чуть большая часть его при осреднении даст близкую величину. Тогда последовательность значений, выбранных в различных частях большого вихря, может послужить только для выяснения формы вихря, который рассматривался бы как часть среднего

движения. Так, вихри, размеры которых сильно отличаются от масштабов выборки, попадают либо в разряд случайных флюктуаций, которые мы не рассматриваем, либо рассматриваются как элемент среднего движения. Аппарат осреднения перестает работать или может быть использован только с существенными ограничениями, если размеры вихрей близки к масштабу выборки, которым в нашем предыдущем случае был шаг сетки.

Теперь мы обратимся к механизмам, при помощи которых хаотический вихревой режим вызывает эффекты, которые мы определяем как турбулентность.

### 7.3. Напряжения Рейнольдса; путь смешения; вырождение вихрей

Среднее значение величины  $q$ , зависящей от пространственной или временной координаты  $s$ , определяется при  $s=s_0$  выражением

$$\bar{q}(s_0) = \frac{1}{2\sigma} \int_{s_0-\sigma}^{s_0+\sigma} q(s) ds. \quad (7.3.1)$$

Здесь  $\bar{q}$  — среднее значение  $q$  на интервале длиной  $2\sigma$  с серединой  $s_0$ , где  $s_0$  может быть либо точкой в пространстве, либо моментом времени. Чтобы быть эффективным, это определение должно подразумевать, что  $\bar{q}$  не зависит от  $\sigma$  для широкого диапазона величин  $\sigma$ . Если  $\sigma$  слишком велико, мы не сможем выявить изменение  $\bar{q}$  от одной точки  $s_0$  до другой, близкой к ней; если  $\sigma$  слишком мало, то мы обнаружим, что  $\bar{q}$  с изменением  $s_0$  быстро флюктуирует, а основная цель предлагаемого определения — ввести среднюю величину, совсем не зависящую от флюктуаций.

Успех последующего анализа зависит от существования определенного диапазона величин  $\sigma$ , которые дают одну и ту же величину  $\bar{q}$ . Применительно к рассматриваемому случаю  $\sigma$  должно находиться в провале спектра масштабов вихрей, принимающих участие в движении.

Теперь мы можем написать

$$q = \bar{q} + q', \quad (7.3.2)$$

где  $q'$  — случайная составляющая. По определению

$$\bar{q}' = 0, \quad \bar{\bar{q}} = \bar{q}. \quad (7.3.3)$$

Для двух компонент скорости  $v_i$  и  $v_j$  имеем:

$$\begin{aligned} \overline{v_i v_j} &= \overline{(\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_j + v'_j)} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{v}_i \overline{v'_j} + \bar{v}_j \overline{v'_i} + \overline{v'_i v'_j} = \\ &= \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v'_i v'_j}, \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

поскольку по (7.3.3)  $\overline{v'_i v'_j} = \overline{v'_j v'_i} = 0$ .

Уравнение движения (1.3.26) и неразрывности ( $\partial v_i / \partial x_i = 0$ ) для несжимаемой жидкости могут быть объединены и дадут

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}. \quad (7.3.5)$$

Если теперь мы возьмем среднее значение каждого члена, то случайная составляющая появится только в произведении, и мы получим для случая постоянного  $\rho$

$$\rho \left[ \frac{d\bar{v}_i}{dt} + \frac{d}{dx_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j) \right] = \rho \bar{F}_i + \frac{d}{dx_j} (\bar{p}_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j}). \quad (7.3.6)$$

Это уравнение записано в той же форме, что и (7.3.5), но является уже уравнением для ускорения среднего движения, вы-

раженного через среднюю массовую силу  $\bar{F}_i$  и градиенты средних напряжений  $\bar{p}_{ij}$  с добавочным членом  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$ . Этот добавочный член называется *напряжением Рейнольдса*, а (7.3.6) — *уравнением Рейнольдса для среднего движения*.

Здесь величина  $p_{ij}$  есть сила, действующая по направлению оси  $i$  на единичную площадку, нормальную к оси  $j$ , и представляет величину переноса  $i$ -й составляющей импульса в направлении  $j$  посредством вязких напряжений. Среднее значение вязкого напряжения определяется так, чтобы его флуктуации в среднем равнялись 0. Это то самое напряжение, которое было бы порождено вязкостью, если бы скорость потока всюду принимала свое среднее значение, а вязкость не имела бы флуктуаций. Величина  $\rho \overline{v'_i v'_j}$  есть среднее значение переноса  $i$ -й компоненты импульса  $\rho v'_i$  со скоростью  $v'_j$  в направлении оси  $j$ . Эта величина называется *турбулентным напряжением*, и в вихревом режиме она много больше средней величины вязкого напряжения  $p_{ij}$ , за исключением случая  $i = j$ , когда среднее значение нормального давления заметно больше турбулентного нормального давления, определяемого величиной  $\rho \overline{v_i'^2}$ .

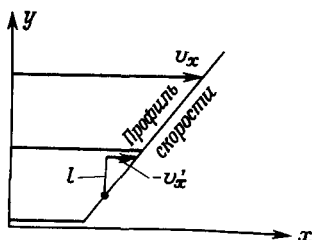
Механизм турбулентного касательного напряжения прост. Если имеется градиент средней скорости  $v_i$  в направлении  $j$ , то флуктуация  $v'_j$  коррелирует с флуктуацией  $v'_i$  по градиенту. Таким образом, если  $v_x$  возрастает в направлении  $y$  (рис. 7.3.1), то частица жидкости, движущаяся в направлении  $y$ , обладает,

в среднем, меньшим  $u_x$ , чем в области, куда она движется, и, следовательно, несет отрицательное приращение  $x$ -й компоненте импульса.

Если частица проходит расстояние  $l$ , называемое *путем перемешивания (смещения)*, до того, как она смешивается с новым окружением, то приращение ее скорости  $v'_x$  будет равно  $-l(dx_x/dy)$ . Путь смещения сам по себе не одинаков для различных частиц жидкости, а представляет собой лишь статистическое среднее; более того, может оказаться, что он различен для разных характеристик. Так, частица может более легко обмениваться со своим окружением количеством движения вдоль градиента давления, чем такими характеристиками, как теплота

Рис 7.3.1. Возникновение приращения скорости в потоке со сдвигом

Если градиент средней скорости положителен, то частица, смещаясь в положительном направлении, приобретает отрицательное приращение скорости  $v'_x = -l \partial v_x / \partial y$



или примесь, которые рассеиваются путем молекулярного или мелкомасштабного перемешивания.

Иногда, как это было сделано впервые Прандтлем, предполагается, что у флуктуаций скорости нет преимущественного направления и, следовательно,  $v'_y$  совпадает с  $v'_x$ . Это положение основано на подтвержденных теорией наблюдениях, что флуктуации скорости быстро приходят в такое состояние; однако нижеследующее рассуждение справедливо только при условии, что различные компоненты находятся в одном и том же соотношении на любом расстоянии от границы. Тангенциальное напряжение  $\tau$ , которое представляет собой силу, действующую вдоль границы на единичную площадку, расположенную параллельно границе, равно величине переносимого через границу и направленного вдоль нее импульса. Таким образом, если мы примем гипотезу Прандтля, что масштаб вихря и путь смещения зависят только от расстояния до границы  $y$ , то получим

$$\tau = \overline{v'_x v'_y} = \kappa y^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (7.3.7)$$

Это выражение часто записывается в виде

$$\tau = \kappa y^2 \frac{dv_x}{dy} \left| \frac{dv_x}{dy} \right|, \quad (7.3.8)$$

что дает верный знак, который получается из физических

соображений. Здесь  $\kappa$  — безразмерная величина, равная отношению  $l$  к  $y$ , и если турбулентность порождается работой, совершенной против турбулентного тангенциального напряжения, и диссипирует в тепло посредством более мелких вихрей, то можно считать, что равновесие достигнуто и что  $\kappa$  постоянно. Данное рассмотрение является просто одним из приложений теории размерностей; существует и много других альтернативных определений. Так, Карман предложил считать, что турбулентная вязкость определяется соответствующей комбинацией типов профиля скорости, которая порождает турбулентность, и предположил, что

$$\tau = \kappa \rho \left( \frac{\partial v_x / \partial y}{\partial^2 v_x / \partial y^2} \right)^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (7.3.9)$$

Это определение означает, в сущности, то же самое, поскольку профиль скорости задается выражением

$$v_x = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} \lg y + \text{const}, \quad (7.3.10)$$

если предположить, что  $\tau$  не зависит от  $y$ , так что градиент давления в направлении  $x$  отсутствует.

Этим выражением задается логарифмический профиль скорости вблизи границы, появления которого следует ожидать в случае, когда рядом нет другой границы, и на достаточном расстоянии от нее течение становится турбулентным. Это означает, что вихри должны быть достаточно велики, чтобы не быть подавленными вязкостью жидкости. Это означает также, что градиент скорости тем меньше, чем больше расстояние от стенки, поскольку течение происходит в условиях большей турбулентной вязкости. Такое положение явно не реализуется во многих естественных течениях; кроме того, существует ряд других причин для убывания градиента скорости, как это описано в гл. 4. Параметр  $\kappa$  называется *числом Кармана* и примерно равен 0,4.

Таким образом, мы подходим к тому, чтобы понять, что приводит к турбулентности и каков в действительности механизм напряжений Рейнольдса, если жидкость представляет собой сплошную среду, а путь перемешивания не более чем иллюстрация к приложению теории размерностей. Результат может быть получен непосредственно из анализа того, какие именно переменные определяют движение; в этом случае также предполагается, что и вихри, и само движение обладают достаточно большим масштабом, чтобы пренебречь эффектами, связанными с вязкостью. Это предположение справедливо при достаточно больших  $Re$ , которое в данном случае имеет вид

$$Re = \frac{(\tau/\rho)^{1/2} y}{\nu}, \quad (7.3.11)$$

а для системы нет другой характерной скорости, кроме  $(\tau/\rho)^{1/2}$

которую называют скоростью трения и часто обозначают  $u_x$ . Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость. Очевидно, что влияние вязкости становится существенным при малых  $u$ .

Турбулентное поле скорости состоит из вихрей или флюктуаций широкого диапазона масштабов. Шкала турбулентного режима определяется наибольшим и наименьшим масштабом вихрей. Большой вихрь вызывает корреляции между скоростями частиц в двух различных точках внутри него, и, таким образом, макромасштаб турбулентности есть расстояние, на котором отсутствует корреляция между флюктуациями скорости. Эта шкала в атмосфере больше размеров Земли, поскольку такие ветровые системы, как пассаты и антипассаты, охватывают ее целиком.

Мелкие вихри быстро разрушаются вязкостью, и именно по этой причине гораздо легче образовать мелкие вихри в воде или в воздухе, чем в вязкой патоке. Чем больше подводимая энергия, тем мельче создаваемые вихри, и если турбулентность предоставлена самой себе, то масштаб самых мелких вихрей возрастает, поскольку вязкость разрушает их, превращая их энергию в тепло. Если  $\varepsilon$  — интенсивность подвода к вихрям энергии, которая вырождается в тепло, то величина

$$(\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad (7.3.12)$$

с размерностью длины может рассматриваться как наименьший масштаб вихря.

Если рассматривать спектр размеров вихрей как спектр масштабов движения, который может быть представлен разложением Фурье, то следовало бы ожидать, что взаимодействие вихрей двух размеров породит большие и меньшие вихри. Более того, при размерах шкалы, достаточных для того, чтобы вязкостью можно было пренебречь, течение теоретически обратимо, поскольку отсутствует диссипация в тепловую энергию, и, следовательно, движение, образующее мелкие вихри из больших, может быть обращено. Такого на практике случиться не может, так как ситуация, в которой существуют только большие вихри, слишком искусственна и время не может быть обращено, чтобы течение преобразовалось таким образом. Например, сложное течение со срывными вихревыми трубками (валами) или какое-либо другое неустойчивое течение не может быть обращено, так как поток с соответствующей по сложности структурой, который мог бы привести к такому обратному преобразованию течения, просто не может возникнуть. Рассмотрим теперь детальнее процесс, так как он является частью общего механизма возрастающей неупорядоченности и вырождения механической энергии в тепловую.

Вихревое течение обладает тем свойством, что всякая линия, связывающая две заданные частицы, обязательно рано или поздно будет растягиваться. Так, в случае плоского течения со сдвигом скорости, в котором последняя (рис. 7.3.2) задана в виде

$$v_x = \alpha y, \quad v_y = v_z = 0, \quad (7.3.13)$$

частицы, первоначально находившиеся в положениях  $A$  и  $B$ , будут удаляться друг от друга, тогда как частицы, находившиеся в положениях  $A$  и  $C$ , сначала будут сближаться, но после прохождения частицей  $C$  точки  $D$  тоже начнут удаляться. Если бы частица  $B$  удалялась от оси  $A$  в течение столетия, а затем мы изменили бы направление течения на противоположное, то и

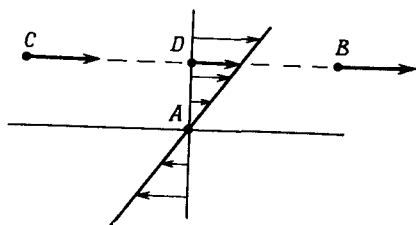


Рис. 7.3.2. Деформация материальных отрезков в потоке со сдвигом.

Материальный отрезок  $AC$ , который первоначально сжат потоком, после прохождения положения  $AD$  начинает растягиваться.

после столетнего сближения частица  $B$  навсегда удалилась бы от  $A$ .

Турбулентность включает в себя вихревое движение, так как для него приток кинетической энергии в точке не увеличивает упорядоченного переноса жидкости (разд. 1.1). Это хаотический вихревой процесс, который, в отличие от упорядоченного, не может быть описан во всех деталях. Называя его хаотическим, мы тем самым решаем не описывать его точно, полагая, что делать это бессмысленно, хотя теоретически и возможно.

Так, если бы мы захотели описать распределение вихря, мы могли бы задать вектор вихря в точках некоторой регулярной сетки и получили бы некоторую упорядоченную картину течения, которую можно выделить вместе с отклонениями. Эти отклонения мы могли бы определить как флуктуации. При этом флуктуации в соседних точках сетки никак бы не коррелировали между собой. Вихри, по масштабу меньшие, чем шаг сетки, не описывались бы при таком способе задания поля вихря. Однако напряженность и некоторые другие характеристики мелких вихрей можно было бы описать статистически в узлах сетки.

Турбулентное напряжение есть механизм, посредством которого энергия основного движения или отдельного крупномасштабного вихря (который в свою очередь является частью основного движения, если уж мы решаем детально описывать ситуацию) передается вихрям меньшего масштаба.



Вихревые нити переносятся с основным движением, мелкие же вихри составляют исключение, так как каждая их компонента с таким же успехом передается посредством вязкости среды. Отдельные вихри представляют собой вращение среды относительно вихревых линий. Спустя конечное время (которое здесь означает время вообще, за исключением некоторых искусственных ситуаций, которые не могут существовать бесконечно) длина каждой вихревой нити увеличивается в результате взаимодействия с другими вихревыми нитями, и интенсивность завихренности непрерывно возрастает. Это становится очевидным,

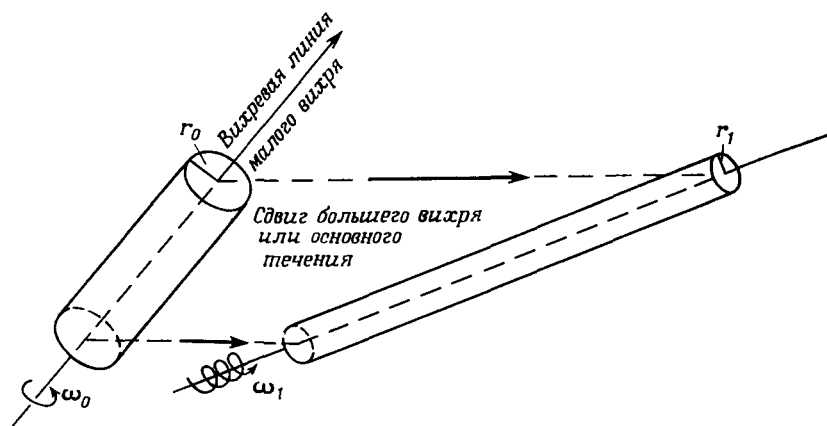


Рис. 7.3.3. Растяжение вихревых линий и возрастание кинетической энергии

если рассмотреть кинетическую энергию отдельного вихря, представленного своей вихревой нитью, когда цилиндрический элемент жидкости, окружающий отрезок вихревой нити, при своем растяжении сохраняет момент количества движения. Элемент жидкости, первоначально находившийся на расстоянии  $r_0$  от вихревой линии и имевший угловую скорость  $\omega_0$  (рис. 7.3.3), находясь в другой момент времени на расстоянии  $r_1$  от оси, имеет угловую скорость  $\omega_1$ , определяемую соотношением

$$\omega_1 = \frac{r_0^2}{r_1^2} \omega_0. \quad (7.3.14)$$

Тогда отношение начальной и конечной кинетических энергий единичного элемента жидкости, очевидно, равно

$$\frac{1/2 (\omega_0 r_0)^2}{1/2 (\omega_1 r_1)^2} = \frac{r_0^2}{r_1^2}. \quad (7.3.15)$$

Как следствие возрастания плотности завихренности потока

увеличивается диссипация энергии за счет вязкости. Следовательно, происходит непрерывное уменьшение масштабов вихрей, сопровождающееся переходом кинетической энергии основного движения и крупных вихрей в энергию мелкомасштабных вихрей.

Теперь очевидно, что турбулентность, порождающая напряжения Рейнольдса, не может быть изотропной: если бы это было так, то каждому растягиваемому вихрю должен был бы соответствовать парный вихрь, сжимаемый вдоль его собственной оси. Такая ситуация не может сохраняться долго, так как через конечное время соответствие пары вихрей неминуемо нарушится

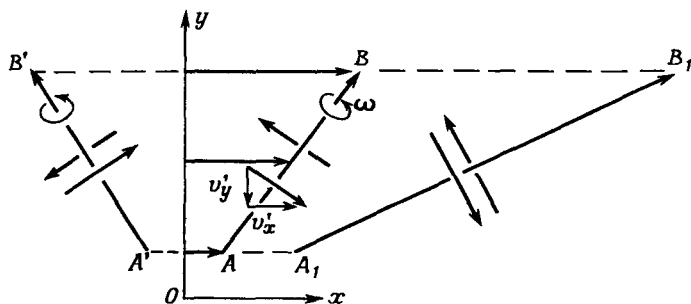


Рис. 7.34. Пульсации скорости под влиянием вихревых линий небольшого вихря.

и преобладающим станет процесс растяжения. Пульсации скорости, обусловленные отдельным вихрем, могут быть рассмотрены на примере плоского течения с поперечным градиентом скорости (рис. 7.3.4); предлагаемый подход остается в силе и для любого другого вихревого течения. На ближней к читателю стороне от оси вихря  $AB$  (рис. 7.3.4) порождается положительная пульсация  $v'_x$  и соответствующая ей отрицательная  $v'_y$ . Около соответствующей «парной» вихревой оси  $A'B'$  возникнет положительная пульсация  $v'_x$ , а также положительная по знаку пульсация  $v'_y$ . Величины переносимых количеств движения  $\overline{rv'_x v'_y}$  будут иметь противоположные знаки. Но спустя конечное время ось  $A'B'$  займет положение  $AB$ , которое в свою очередь перейдет в положение  $A_1B_1$ . При этом обе вихревые оси дадут приращение касательного напряжения одного и того же знака. Очевидно, вихревые нити, параллельные какой-либо из координатных осей, не порождают касательных напряжений, так как ось, параллельная  $Ox$ , не даст пульсации  $v'_x$ , а параллельная  $Oy$  — не даст  $v'_y$ . Кроме того, вихревые нити, лежащие в плос-

кости течения ( $y = \text{const}$ ), в этом простом примере не будут подвергаться какому-либо растяжению.

Единичный отрезок вихревой нити испытывает наибольшее удлинение, если он наклонен к плоскости движения под углом  $45^\circ$ , что оказывается важным фактором в образовании звуковых колебаний в сжимаемой жидкости (разд. 7.11). Течение с поперечным градиентом скорости отдает таким вихрям максимум кинетической энергии, и, таким образом, мы можем считать их течениями, индуцированными градиентом скорости. С другой стороны, оси вихрей, порожденных течением, огибающим препятствие, оказываются параллельными линиям, вдоль которых

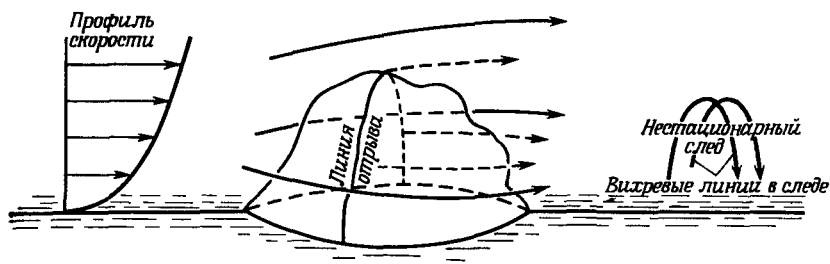


Рис. 7.3.5. Вихревые линии в следе за препятствием.

Образуются за линией отрыва потока. Имеют вертикальную составляющую, поэтому растягиваются при сдвиге потока. Сдвиг обусловлен сопротивлением трения на границе, и как только вихревой слой, в котором находятся вихревые линии, волнообразно деформируется, возникают вихревые напряжения.

происходит отрыв течения от препятствия. Это показано на рис. 7.3.5. Обычно линии отрыва перпендикулярны направлению потока. Следовательно, препятствия создают в течении вихри со значительной компонентой, перпендикулярной градиенту скорости, который образуется из-за влияния на течение стенки, на которой находится препятствие. Таким образом, механически порождаемая турбулентность создается за счет энергии основного течения, отбираемой вихревой пеленой, возникающей на шероховатостях границы. Само по себе градиентное течение не вносит вклад в возникновение хаотической завихренности до тех пор, пока не становится неустойчивым, но, вероятно, оно становится таковым по отношению к малым, мгновенным возмущениям на криволинейных участках (см. разд. 3.10).

В противоположность этому в градиентном течении над поверхностью земли с горизонтальными линиями тока оси вихрей, вызванных гравитацией, обязательно будут горизонтальными и, следовательно, как и вихревые нити, обусловленные вязкостью, не будут создавать рейнольдсовых напряжений. Однако вихревые линии, образующиеся при подъеме термика (гл. 8)

в вышележащие слои сквозь градиентный поток, будут наклонными и возникнут напряжения (разд. 9.6).

#### 7.4. Свойства турбулентности

Наиболее важной особенностью турбулентности является то, что она вызывает диффузию любой физической субстанции, переносимой течением, такой, как тепло или примесь. Это происходит благодаря растяжению всех траекторий частиц, так что вследствие турбулентности любая компактная масса жидкости вытягивается, сплющивается в лист и искривляется сложным образом. После того, как толщина такого листа становится меньше размеров мельчайшего вихря, дальнейшая диффузия происходит на молекулярном уровне. Турбулентность, порождая перемешивание, вызывает диффузию, но градиент концентрации любой субстанции, вначале занимавшей в жидкости ограниченный, компактный объем, под действием турбулентности всегда возрастает. Это происходит потому, что поверхности постоянных концентраций сближаются по мере того, как слои, содержащие переносимую субстанцию, все более уменьшаются и вытягиваются под действием крупных и мелких вихрей, а также основного движения.

Поскольку все градиенты концентрации возрастают, увеличиваются также градиенты скорости и, с уменьшением размеров вихрей, скорость диссипации энергии. Число Рейнольдса для отдельного вихря  $r^2\omega/\nu$  остается постоянным, поскольку с уменьшением размера вихря в соответствии с уравнением (7.3.14) его характерная скорость  $r\omega$  возрастает, а произведение характерной скорости на размер вихря есть циркуляция. Под этим числом можно понимать число вращений, которые нужно сделать вихрю для того, чтобы его скорость уменьшилась вдвое, так что время его существования уменьшается, когда сам он уменьшается, а его угловая скорость возрастает. Возрастают также размеры вдоль оси вихря, но это несущественно, поскольку они в любом случае много больше его диаметра.

Если в турбулентном потоке выделить некоторое сечение и провести линии постоянных значений компоненты завихренности, нормальной к данному сечению, то можно обнаружить, что вязкость приводит к взаимному проникновению и общему сокращению областей с положительным и отрицательным значениями рассматриваемого параметра. С течением времени характерный масштаб процесса уменьшится, картина течения усложнится, а области с положительными или отрицательными значениями завихренности существенно уменьшатся, в достаточной степени перемешаются и, следовательно, в еще большей степени станут

сокращаться и перемежаться под действием вязкости. Скорость диссипации вихрей из-за вязкости определяется скоростью, с которой образуются малые интенсивные вихри и с которой их вращение возрастает при растяжении вихревых нитей. Наименьший масштаб вихря определяется скоростью, с которой подводится кинетическая энергия в соответствующую часть спектра, которая в свою очередь определяет, насколько малым должен стать вихрь перед тем, как совершить последние вращения, полностью исчерпывающие его кинетическую энергию. Скорость перераспределения энергии вдоль спектра в направлении от вихрей крупного масштаба к мелкомасштабным вовсе не определяется режимом диссипации энергии, а зависит лишь от скорости преобразования крупных вихрей в мелкие.

Между масштабами основного движения (или крупного вихря, к которому энергия переходит вследствие какой-либо неустойчивости режима) и мельчайших вихрей, размер которых пропорционален  $(v^3/\varepsilon)^{1/4}$ , может существовать широкий диапа-

зон вихрей, имеющих энергетический спектр, равный  $\overline{u'^2 E}(k)$ , где  $u'$  — среднеквадратическая пульсация скорости, а  $k$  — волновое число. Если  $\overline{u'^2 E}(k)$  является функцией  $k$  и  $\varepsilon$  (величина  $\varepsilon$  имеет размерность [скорость]<sup>2</sup>: [время]), что представляется разумным, поскольку величина  $\varepsilon$  представляет собой проявление эффекта пульсаций, то можно найти единственную комбинацию  $\varepsilon$  и  $k$ , имеющую размерность ускорения (это следует из того, что интеграл  $\int \overline{u'^2 E}(k) dk$  имеет размерность [скорость]<sup>2</sup>, поскольку выражает кинетическую энергию, а плотность жидкости полагается равной 1), а именно

$$\overline{u'^2 E}(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (7.4.1)$$

Это — закон « $-5/3$ » Колмогорова. Его часто ошибочно применяют к множеству ситуаций, в то время как он применим только в так называемом инерционном интервале масштабов вихрей, который соответствует затуханию турбулентности и расположен достаточно далеко как от наиболее крупных, так и от наиболее мелких вихрей. Он справедлив только для однородной турбулентности, а это означает, что он, как правило, неприменим к течению с поперечным градиентом скорости, в особенности вблизи границы.

Поскольку имеется подходящая теория, разработанная для однородной изотропной турбулентности, возникает искушение применить ее к ситуации, где турбулентность лишь представляется таковой. Многие пытаются показать, что рассматриваемый ими турбулентный режим однороден, изотропен и относится

к инерционному интервалу, если найденный ими энергетический спектр примерно пропорционален  $k^{-5/3}$ . Но ход их рассуждений ошибочен, поскольку множество совершенно различных флюктуационных режимов имеют очень похожие спектры, если только их масштабы примерно одинаковы. Длинноволновый диапазон любого спектра на практике определяется длиной выборки, используемой для его исследования, а форма флюктуаций определяется степенью фазовой корреляции волн различной длины. Так, единичный скачок скорости имеет спектр, пропорциональный  $k^{-6/3}$ , который едва ли отличим в любом практическом случае от  $-5/3$ . Процедуры усреднения и выражения всех особенностей турбулентного движения с помощью статистики только скрывают влияние ряда факторов.

При исследовании различных реальных ситуаций обычно оказывается, что вблизи имеются границы, влияющие на течение, или среда стратифицирована, или течение обладает значительным градиентом средней скорости, или отсутствует провал в спектре, облегчающий операции усреднения и определения среднего значения. Все эти факторы делают очень маловероятным то, что турбулентность в рассматриваемом случае однородна или изотропна. Обычно такой режим реализуется либо при быстром развитии от состояния, когда турбулентность отсутствует, к состоянию интенсивно развитой турбулентности, либо при разрушении волн из-за вязкости или излучения.

Любая среда, в которой распространяются волны, может рассеивать энергию турбулентности. В сжимаемой жидкости образуются звуковые волны, порожденные пульсациями давления, которые в свою очередь вызваны растяжением осей вихрей; пульсации давления приводят также к смещениям, которые излучают гравитационные волны в стратифицированной по плотности среде. В то время как звуковые волны переносят пренебрежимую часть энергии течения, существенная часть энергии излучается гравитационными волнами.

## 7.5. Критерий Ричардсона для затухающей турбулентности

В стратифицированной жидкости турбулентное движение перемещает частицы жидкости с увеличением их потенциальной энергии. Рассмотрим стратифицированную воздушную среду, в которой теплый воздух, подвергающийся воздействию турбулентного перемешивания, находится сверху. Тогда распределение потенциальной температуры становится более однородным, так как верхние слои охлаждаются, а нижние нагреваются. Для всей массы среды потенциальная энергия в поле силы тяжести

возрастает вследствие подъема ее центра тяжести. В то же время основное движение горизонтального течения с вертикальным градиентом скорости работает против турбулентных напряжений, и его энергия будет расходоваться на усиление турбулентности. Ричардсон показал, что если количество энергии, расходуемое таким образом, меньше работы против сил тяжести, то турбулентность затухает. В действительности турбулентность начинает затухать при еще меньшей степени стратификации, поскольку значительная часть энергии турбулентного режима перераспределяется в пользу меньших вихрей и в дальнейшем рассеивается за счет вязкости.

Если частица единичной массы перемещается вверх на расстояние  $\zeta$  в стратифицированной жидкости с коэффициентом статической устойчивости  $g\beta$ , то ее работа против сил тяжести описывается выражением

$$\int_0^{\zeta} g\beta z dz = 1/2 g\beta \zeta^2, \quad (7.5.1)$$

поскольку архимедова сила для перемещения на расстояние  $z$  равна  $g\beta z$ . Кинетическая энергия относительного перемещения частицы на расстояние  $\zeta$  при вертикальном градиенте скорости потока  $dU/dz = \eta$  равна

$$1/2 (h\zeta)^2. \quad (7.5.2)$$

Если выражение (7.5.1) превосходит (7.5.2), т. е. если

$$Ri = \frac{g\beta}{\eta^2} > 1, \quad (7.5.3)$$

то энергии для поддержания турбулентности недостаточно. Обратное заключение, очевидно, неверно, и было бы неправильно утверждать, что ламинарное течение, где  $Ri < 1$ , является неустойчивым и перейдет в турбулентное, поскольку для  $\beta = 0$  и постоянного по высоте градиента  $\eta$  течение стабильно и имеет постоянную величину завихренности  $\eta$ , которая не может быть перераспределена так, чтобы породить вихри. С другой стороны, в гл. 6 было показано, что если завихренность концентрируется в слоях, то эти слои способны свернуться в вихри, которые сами по себе гравитационно неустойчивы. Мы уже видели, что такая неустойчивость может быть индуцирована в наклонных слоях, в которых первоначально число  $Ri$  было бесконечным. В действительности интересен не критерий, устанавливающий неустойчивость течения, а критерий, устанавливающий наличие действующих механизмов, способных привести к неустойчивости.

Многими авторами установлено, что если течение неустойчиво, то число Ричардсона в некоторой области течения должно

быть, во всяком случае, меньше  $1/4$ . Эта оценка была предложена Тейлором; здесь снова следует заметить, что существует много стабильных течений с меньшими значениями числа  $Ri$ . Хороший пример, иллюстрирующий этот факт, предложен Ховардом (1961, разд. 2).

Число Ричардсона представляет собой локальную характеристику течения, которая может меняться от точки к точке. Оно не имеет того всеобъемлющего значения, какое имеет число Рейнольдса, как, например, в случае вязкого стационарного течения, в котором все движения взаимосвязаны. В стратифицированной жидкости течения в различных слоях меньше связаны друг с другом.

Время от времени делались попытки найти простой критерий стабильности для цилиндрического течения, в котором центробежные силы играют роль, в какой-то степени аналогичную роли силы тяжести. Эти попытки не увенчались успехом, поскольку неустойчивость здесь существенно сложнее. В горизонтальном течении с вертикальным градиентом скорости наибольшую неустойчивость вызывает любое двумерное возмущение, действующее в вертикальной плоскости, содержащей сам вертикальный градиент. В цилиндрическом течении (без воздействия силы тяжести) ускорение  $f$  меняет направление вдоль траекторий частиц жидкости. Следовательно, осесимметричное (тороидальное) возмущение действует иным образом, чем двумерное, которое распространяется в плоскостях, перпендикулярных оси невозмущенного течения, так что критерии, полученные в разд. 3.10, не могут быть выражены только при помощи числа Ричардсона.

## 7.6. Турбулентность, порождаемая стоячими волнами

Количество движения может передаваться поперек основного течения стационарными гравитационными волнами при условии, что поверхность, содержащая гребни, смещена относительно вертикали (см. разд. 5.11).

Теория предполагает, что поток количества движения направлен вверх от препятствия на подстилающей поверхности, которая в свою очередь испытывает в направлении течения действие силы, называемой *волновым сопротивлением*. Это — условие излучения энергии, которое справедливо для бесконечной среды.

Применительно к атмосфере возникают две математические трудности. Первая из них — убывание плотности с высотой, означает, что волны постепенно будут приобретать очень большую амплитуду, что делает задачу существенно нелинейной. Поэтому



обычно предполагают, что волны отражаются или затухают за счет большой вязкости на высоте свыше 150 км. Вторая трудность возникает, когда скорость волн относительно воздуха оказывается равной 0 на некоторой высоте над земной поверхностью. Это обычно означает, что на указанной высоте ветер равен 0 относительно препятствия, порождающего волны. Это не столь уж большая проблема, как предполагает двумерная теория, поскольку в трехмерном случае поворот ветра с высотой производит нулевой ветер только относительно бесконечно малой двумерной компоненты возмущения на препятствии.

Однако в двумерном случае энергия передается вверх и не может пройти через слой, где скорость равна 0 (см. разд. 5.17). Эта энергия, следовательно, должна быть передана частицам воздуха как раз на уровне нулевой скорости и должна представлять собой энергетическую основу движения соответствующей массы воздуха, а именно завихренности, которая в данном случае определяет турбулентный режим. Между этим уровнем и землей нет ускорения течения, но частицы воздуха здесь должны подвергаться вертикальному ускорению из-за переданного им количества движения, что в результате изменяет профиль средней скорости.

## 7.7. Приложение теории турбулентности к атмосферным процессам

Уравнение Рейнольдса справедливо лишь в том случае, когда в атмосфере имеется набор вихрей с размерами, соответствующими диапазону турбулентного спектра, который практически не содержит энергии; с другой стороны, без существования такого «провала» в спектре невозможно определение основного, «осредненного» движения. Эта трудность, по-видимому, может быть обойдена с помощью общего предположения о том, что, во-первых, независимо от сути турбулентного процесса его эффекты могут быть описаны в терминах  $K$ -теории и, во-вторых, что для описания этого процесса можно применять уравнения того же типа, что и для описания процесса молекулярной диффузии, но с коэффициентом в  $10^3$ – $10^4$  раз большим, чем коэффициент молекулярной диффузии. Однако проблема определения операции осреднения не может быть решена простым умолчанием о ней, а коэффициент турбулентного переноса  $K$  не имеет смысла без такого определения, поскольку при этом не ясно, как он изменяется в пространстве, в частности с высотой, и с какой скоростью изменяется в разных направлениях. Скорости переноса в атмосфере часто изменяются на несколько порядков за сравнительно небольшой промежуток времени в несколько часов

и очень сильно различаются для различных диффундирующих субстанций. Так, количество движения может передаваться волновым процессом в стратифицированной жидкости, в то время как примесь им вообще не переносится. С другой стороны, турбулентность гравитационного происхождения может значительно эффективнее переносить вещество, чем количество движения (см. разд. 9.6). Применение коэффициентов турбулентного переноса к описанию атмосферных процессов представляет собой удобный способ описать непонятное явление, но все же он мало физичен. Любая ситуация, в которой такое применение кажется полезным, напоминает положение, когда предсказывается, что последующее событие будет скорее всего походить на предшествовавшее, эффекты которого уже измерены.

Несмотря на неспособность  $K$ -теории осветить физическую сущность турбулентности, она тем не менее позволяет получать некоторые новые формальные результаты. В качестве примера можно указать на распределение концентрации примеси от источника вниз по потоку под действием поперечного градиента ветра (Саффмен, 1962). Саффмен рассчитал траектории частиц примеси, достигающих поверхности земли в точках, смещенных в поперечном направлении относительно оси потока. При этом главную роль играет, по-видимому, вертикальная турбулентность в сочетании со сдвигом скорости ветра в верхней части потока и последующей «доставкой» примеси на подстилающую поверхность за счет турбулентного рассеяния по вертикали, а не горизонтальный перенос примеси турбулентностью в направлении, поперечном к оси струи вблизи поверхности земли. Однако полученная Саффменом формула не имеет практического значения.

Разнообразие форм турбулентных процессов столь велико, а их эффекты столь различны, что не может существовать единой теории турбулентности. В оставшихся главах этой книги мы рассмотрим механизмы некоторых явлений, типичных для атмосферы и часто объединяемых общим термином «турбулентные процессы».

## 7.8. Турбулентность во вращающейся жидкости

Возникает следующий вопрос: может ли турбулентность вызвать во вращающейся жидкости эффекты, принципиально отличающиеся от эффектов, обусловленных вязкостью? Этот вопрос затрагивает проблему чрезвычайной важности — возникновение тайфунов. Тайфун представляет собой центр низкого давления, вызванного вращением воздушных масс, которые втягиваются в воронку тайфуна и охлаждаются вследствие практически адиабатического расширения, что в свою очередь вызывает приток

тепла и водяных паров от поверхности моря, которое теплее движущегося над ним воздуха. Таким образом, зона низкого давления служит источником тепла, которое выделяется главным образом за счет скрытого тепла конденсации при образовании обильных осадков. Источник тепла способствует поддержанию низкого давления путем отсоса воздуха через тропопаузу, следствием чего является образование ядра теплого стратосферного воздуха (см. разд. 11.10).

Раз тайфун уже возник, то нетрудно определить механизм, поддерживающий его существование, но действие этого механизма зависит от наличия центра низкого давления. Поэтому здесь должен существовать такой процесс, который бы способствовал усилению завихренности и тем самым образованию мелких вихрей, обладающих центрами низкого давления.

Зоны, где формируются ураганы, обычно характеризуются мощной грозовой облачностью. В дополнение к восходящим токам (доставляющим в такие облака пары воды) воздух, из которого влага была удалена в виде дождя, растекается под тропопаузой с горизонтальной скоростью порядка 5—10 м/с. Нисходящие токи, порожденные интенсивными ливневыми дождями, вновь возвращают воздушные массы к поверхности моря. Таким образом, отдельные массы воздуха, перемещающиеся в горизонтальных направлениях от расширенных верхушек облаков («наковален»), можно исследовать в весьма грубом приближении при помощи теории пути смещения.

В общем случае, когда масса жидкости, первоначально вращающаяся как твердое кольцо с радиусами  $a$  и  $b$  с угловой скоростью  $\Omega$ , начинает растекаться в горизонтальном направлении, причем ее частицы смешиваются с новым окружением, конечное распределение поля скоростей таково, что все частицы имеют одинаковый момент количества движения относительно оси. Это происходит в стакане, где радиальное перемещение частиц жидкости порождается вторичным течением в пограничном слое вблизи дна (см. разд. 3.8), но при этом происходит общее уменьшение кинетической энергии и момента количества движения жидкости.

В случае тайфуна имеется источник энергии в виде сил плавуности, порожденных выделением скрытой теплоты в облаках. Работа совершается, по существу, гравитацией, и когда «наковальни» облаков растекаются в зоне тропопаузы или несколько ниже, они обладают кинетической энергией горизонтального движения, которая затрачивается на движение сквозь изобары в устойчиво стратифицированной массе благодаря вращению. Так как массы воздуха, распространяющиеся горизонтально, начинают смешиваться со своим новым окружением, то в конце концов достигается состояние с нулевой завихренностью, в котором

круговая скорость  $v$  равна  $k/r$ . Так как все силы, обусловленные плавучестью, действуют в вертикальном направлении и из-за перемешивания являются внутренними, суммарный момент вращения остается постоянным, следовательно

$$^{1/2}\pi\Omega(b^4 - a^4) = \pi k(b^2 - a^2), \quad (7.8.1)$$

или

$$k = ^{1/2}\Omega(b^2 + a^2). \quad (7.8.2)$$

Первоначально  $v = r\Omega$ , окончательно  $v = k/r$  и  $\partial p/\partial r = v^2/r$ ; отсюда при начальной  $\Delta p_0$  и конечной  $\Delta p_1$  разностях давлений в области между радиусами кольца  $a$  и  $b$  в предположении, что удельная плотность жидкости равна 1, получим

$$\Delta p_1 = k^2 \frac{b^2 - a^2}{2b^2a^2}, \quad \Delta p_0 = ^{1/2}\Omega^2(b^2 - a^2), \quad (7.8.3)$$

или

$$\Delta p_1 = ^{1/4} \frac{(b^2 + a^2)^2}{b^2a^2} \Delta p_0 \simeq ^{1/4} n^2 \Delta p_0, \quad (7.8.4)$$

если  $b = na \gg a$ .

Завихренность, первоначально равномерно распределенная и имевшая величину  $^{1/2}\Omega$ , в конце концов распределяется в двух вихревых слоях при  $r = a, b$ , причем в каждом из них завихренность равна половине первоначального значения в предположении, что жидкость внутри радиуса  $r = a$  и вне  $r = b$  не ускоряется.

Таким образом, при конвективной облачности существует возможность образования ограниченной зоны, в середине которой локализуется центр весьма низкого давления, а значение завихренности составляет половину от первоначального. В работе Макевана (1976) описан интересный эксперимент по исследованию этого вопроса.

Основная трудность проверки такой возможности заключается в отсутствии информации о том, действительно ли «наковальни» облаков в зоне развитой конвекции первоначально растекаются в радиальных направлениях. В следующем разделе мы покажем, что для достижения необходимого эффекта требуется некоторая предпочтительная ориентация в развитии процесса.

## 7.9. Применение теории пути смешения к изучению вращающейся жидкости

Рассмотрим вращательное течение (рис. 7.9.1) с круговой скоростью  $v(r)$ . Пусть некоторая частица жидкости, которой

приданы дополнительные радиальная и тангенциальная составляющие скорости  $u'_0$  и  $v'_0$ , перемещается во внешнем поле давления в течение времени  $\tau$ , после чего она смешивается со своим новым окружением. Разность скоростей частицы и среды в момент  $\tau$  определяет влияние процесса перемешивания на основное движение. Это так называемая теория перемешивания количества движения, следующая модели Прандтля. Напряжение выражается как  $\overline{u'v'}$ ; предполагается, что приращения скорости малы. Градиент давления  $\partial p/\partial r$  равен  $v^2/r$ .

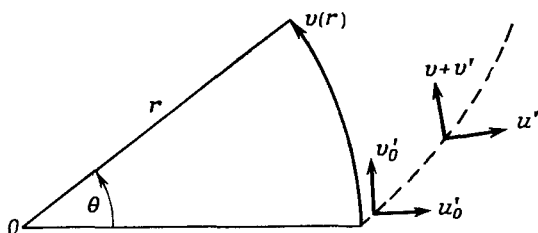


Рис. 7.9.1. Траектория частицы, смещающейся при заданном начальном возмущении скорости  $u'_0, v'_0$  (показана штриховой линией).

Движение частицы определяют уравнение Бернулли

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{v}')^2 + \frac{v^2}{r} = 0 \quad (7.9.1)$$

и уравнение сохранения момента количества движения

$$v + v' = k'/r, \quad (7.9.2)$$

где величина  $k'$  постоянна для определенной частицы вдоль ее свободной траектории движения в поле давления основного течения. Продифференцировав (7.9.2), исключим  $k'$ . Поскольку

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (u', v + v'), \quad (7.9.3)$$

получим

$$(v + v') \frac{\partial}{\partial r} (v + v') + u' \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{v^2}{r} = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial r} (v + v') = -\frac{k'}{r^2} = -\frac{v + v'}{r},$$

так что

$$-\frac{(v + v')^2}{r} + \frac{v^2}{r} + u' \frac{\partial u'}{\partial r} = 0.$$

Следовательно,

$$i u' \frac{\partial u'}{\partial r} = v' \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right) \quad (7.9.4)$$

и

$$-\frac{\partial v'}{\partial r} = -\left( \frac{v + v'}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\left( \zeta + \frac{v'}{r} \right), \quad (7.9.5)$$

где

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \text{ есть завихренность основного течения.} \quad (7.9.6)$$

Напряжение может быть записано как осредненная по времени величина:

$$u' v' = u'_0 v'_0 + \Delta r \left[ \frac{\partial}{\partial r} (u' v') \right]_0 + 1/2 (\Delta r)^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (u' v') \right]_0 + 0 (\Delta r)^3. \quad (7.9.7)$$

Через время  $\tau$  имеем

$$\Delta r = u'_0 \tau + 1/2 \left[ u' \frac{\partial u'}{\partial r} \right]_0 \tau^2 + 0 (\tau^3), \quad (7.9.8)$$

так как  $\partial u' / \partial t = u' \partial u' / \partial r$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} u' v' = & u'_0 v'_0 + \tau \left[ u' \left( u' \frac{\partial v'}{\partial r} + v' \frac{\partial u'}{\partial r} \right) \right]_0 + \\ & + 1/2 \tau^2 \left[ v' \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right) \left( u' \frac{\partial v'}{\partial r} + v' \frac{\partial u'}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + u'^2 \left( u' \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u'}{\partial r} \frac{\partial v'}{\partial r} + v' \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} \right) \right]_0 + 0 (\tau^3). \quad (7.9.9) \end{aligned}$$

Предположив, что вихри симметричны относительно  $r = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$ , получим

$$\overline{u'_0 v'_0} = 0. \quad (7.9.10)$$

Далее, принимая при  $t=0$  в качестве средних значений  $\overline{u'_0} = \overline{v'_0} = 0$ , получаем, что все величины  $v'^2 u'$ ,  $v'^3$ ,  $v'^3 / u'$ ,  $v'^4 / u'$ ,  $v'^5 / u'$  исчезают. Следовательно,

$$\overline{u' u' \frac{\partial v'}{\partial r}} = -\overline{u'^2 \left( \zeta + \frac{v'}{r} \right)} = -\overline{u'^2 \zeta}, \quad (7.9.11)$$

$$\overline{u' v' \frac{\partial u'}{\partial r}} = \overline{v'^2 \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right)} = +\overline{v'^2 \frac{2v}{r}} \quad (7.9.12)$$

И

$$v' \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right) \left( u' \frac{\partial v'}{\partial r} + v' \frac{\partial u'}{\partial r} \right) = \\ = \left( \frac{2v}{r} v' + \frac{v'^2}{r} \right) \left[ -u' \left( \zeta + \frac{v'}{r} \right) + \frac{v'^2}{u^2} \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right) \right] = 0 \quad (7.9.13)$$

при осреднении в момент времени  $t = 0$ .

Кроме того,

$$u'^2 u' \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} = -u'^3 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r} - \frac{2v'}{r^2} \right), \\ u'^2 \frac{\partial u'}{\partial r} \frac{\partial v'}{\partial r} = -2u'v' \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right) \left( \zeta + \frac{v'}{r} \right) \quad (7.9.14)$$

И

$$u'^2 v' \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} = u'v' \left[ -\frac{v'^2}{u'^2} \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right)^2 - \left( \zeta + \frac{v'}{r} \right) \left( \frac{2v}{r} + \frac{v'}{r} \right)' + \right. \\ \left. + v' \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{2v}{r} - \frac{\zeta}{r} - \frac{2v'}{r^3} \right) \right]$$

целиком исчезают при осреднении по времени при  $t = 0$ , поскольку они включают нечетные степени  $u'$ . Следовательно, получаем

$$\overline{u'v'} = \left[ -\overline{u_0'^2} \zeta + \overline{v_0'^2} \frac{2v}{r} \right] \tau + O(\tau^3). \quad (7.9.15)$$

Вычисления показывают, что наименьшие степени  $u'$  и  $v'$  в члене порядка  $\tau^3$  определяются выражением

$$\frac{4v\zeta}{3r} \left[ \overline{u_0'^2} \zeta - \overline{v_0'^2} \frac{2v}{r} \right] \tau^3, \quad (7.9.16)$$

а члены с более высокими степенями имеют порядок  $v'/v$  и отброшены. Поскольку в (7.9.16) при  $\tau^3$  присутствует тот же множитель, что и при  $\tau$  в (7.9.15), то член порядка  $\tau$  может быть отброшен, так как коэффициент при  $\tau^3$  обратится в 0, как только обратится в 0 коэффициент при  $\tau$ . Перейдем к рассмотрению отдельных случаев.

1. *Изотропное вихревое течение:*  $\overline{u_0'^2} = \overline{v_0'^2} = q'^2$ ,

$$\overline{u'v'} = -q'^2 \tau e_{r\theta}, \quad (7.9.17)$$

где

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \zeta - 2 \frac{v}{r}$$

представляет скорость деформации жидкой частицы. Это выражение для вращения по типу твердого тела, очевидно, равно 0. Таким образом, вихревое движение порождает напряжения при жидком вращении, т. е. действует так же, как вязкость.

2. Вихревое движение с радиальными смещениями  $\overline{v'_0} = 0$ :

$$\overline{u'v'} = -q'^2 \tau \zeta. \quad (7.9.18)$$

В этом случае напряжения исчезают только при  $\zeta = 0$ , что имеет место при  $v = k/r$ . Для создания эффектов, рассмотренных в разд. 7.8, вихревое течение должно породить в основном радиальные, а не тангенциальные смещения жидких частиц.

3. Вихревое течение с тангенциальными смещениями  $\overline{u'_0} = 0$ :

$$\overline{u'v'} = \frac{2v}{r} q'^2 \tau = (\zeta - e_{r\theta}) q'^2. \quad (7.9.19)$$

Здесь напряжения исчезают только при очень большом  $r$ . Из этого можно вывести, что вихревое течение такого рода, в котором жидкие частицы смещаются в обоих направлениях по касательной к потоку, будет стремиться к выпрямлению, поскольку все частицы, получившие смещения по касательной, будут смещаться в радиальном направлении наружу. При этом, естественно, никакие эффекты такого рода не будут влиять на профиль  $v(r)$ . Величина  $\zeta$  может равняться  $e_{r\theta}$  только в случае прямолинейного движения.

4. Прямолинейное течение  $r = \infty$ :

В этом случае  $\zeta$  просто равно градиенту, и получается соотношение

$$u'v' = -q'^2 \tau \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (7.9.20)$$

являющееся классическим результатом теории пути смешения, который здесь равен  $q'\tau$ .

## 7.10. Дробление вихрей

В случае изотропного вихревого течения, рассмотренного в предыдущем разделе, такие атмосферные образования, как верхушки кучевых облаков («наковальни»), растекаются одинаково во всех направлениях, а область, где они возникают, имеет тенденцию вращаться как твердое тело. Если при этом полный момент количества движения сохраняется, а начальное вращение не походило на вращение твердого тела, то постепенно скорости на границе области будут претерпевать возмущения и там образуется вихревой слой. Поскольку в пассатах участвуют не только воздушные массы из соответствующего им широтного пояса, а интенсивность конвекционных процессов неравномерна, то следует ожидать, что вихревые слои и, следова-



тельно, отдельные вихри будут образовываться на границах зон с интенсивной конвекцией.

Крупные вихри могут утратить изотропность, если облака выстроятся в так называемые «стриты» (улицы), т. е. возникнут почти двумерные образования, в которых горизонтальные смещения происходят перпендикулярно линиям облаков. Любая деформация воздушной массы в конечном итоге будет приводить к преобразованию компактной области в длинную пелену, поэтому неудивительно, что в тропиках облака обычно группируются в улицы. Такие улицы имеют тенденцию возникать также и вдоль сдвигов скорости ветра, как правило, в направлении, мало отличающемся от направления ветра. Даже если воздушная масса, движущаяся прямолинейно относительно земной поверхности, одновременно участвует во вращательном движении Земли, может реализоваться состояние с нулевой завихренностью. Это значит, что в северном полушарии однородные потоки с улицами кучевых облаков, ориентированными вдоль них, могут быть совершенно незавихренными за счет ускорения воздушных частиц слева от своей оси и соответствующего замедления частиц справа от оси. Это может привести к образованию вихревых слоев и, следовательно, отдельных вихрей вдоль границ конвективной зоны.

Уже предпринимались попытки воссоздать этот процесс в лабораторных условиях, но при этом следует учитывать, что окончательный результат сильно зависит как от степени анизотропности горизонтальных скоростей, порождаемых в вихрях, так и от крупномасштабных пространственных вариаций интенсивности вихрей (как изотропных, так и анизотропных).

Недостатком проведенного нами грубого и упрощенного рассмотрения является то, что оно не учитывает сохранение завихренности воздушных частиц, перемещаемых вихрями. Однако здесь, как и в случае применения классической теории пути смещения, конечное состояние характеризуется либо постоянной, либо нулевой завихренностью независимо от того, сохраняют ли частицы количество движения или завихренность.

## 7.11. Упругие свойства вихревых трубок в турбулентных течениях

Вихри обладают свойством передавать волновое движение вдоль своей оси. Исследуем эту особенность на простейшем примере. Пусть вращательное невозмущенное движение задано в цилиндрических координатах следующим образом: скорость равна  $(0, r\Omega, 0)$ , где  $\Omega = \Omega(r)$ . Добавим малое возмущение скорости  $(u, v, w)$ . Тогда трехмерное течение жидкости с единичной

плотностью будет описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{du}{dt} - \frac{(v + r\Omega)^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (7.11.1)$$

$$\frac{d}{dt} (v + r\Omega) + \frac{-u(v + r\Omega)}{r} = 0, \quad (7.11.2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (7.11.3)$$

где для удобства возмущение давления обозначено через  $\rho p$ , так что давление выражается как

$$p' = p_0 + \rho p. \quad (7.11.4)$$

Если возмущение давления пропорционально  $i(kz - \sigma t)$ , что соответствует волнам, распространяющимся вдоль оси вращения со скоростью  $\sigma/k$ , то в силу осевой симметрии имеем оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \omega \frac{\partial}{\partial z} = -i\sigma \quad (7.11.5)$$

для линеаризованного возмущения давления и

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \omega \frac{\partial}{\partial r} = u \frac{\partial}{\partial r} \quad (7.11.6)$$

для невозмущенного течения.

Линеаризованные уравнения имеют вид

$$i\sigma u + 2\Omega v = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (7.11.7)$$

$$-i\sigma v + u \frac{\partial}{\partial r} (r\Omega) + u\Omega = 0, \quad (7.11.8)$$

$$i\sigma \omega = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (7.11.9)$$

а уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (r\omega) = 0. \quad (7.11.10)$$

Исключив  $p$ ,  $v$  и  $\omega$ , найдем, что  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} + k^2 \left( 1 - \frac{4\Omega^2 + 2r\Omega\Omega'}{\sigma^2} \right) \right] u = 0, \quad (7.11.11)$$

где

$$\Omega' = \partial\Omega/\partial r. \quad (7.11.12)$$

Если волны начнут поглощаться трубкой и распространяться вдоль ее оси, то возмущение скорости  $u$  равно нулю на самой

оси, пульсирует, достигая некоторого максимума, при малых  $r$ , и затухает по экспоненциальному закону при  $r \rightarrow \infty$ .

Анализ упрощается, если ввести обозначения

$$\varphi = r^{1/2} u, \quad x = kr, \quad S = 2\Omega/\sigma. \quad (7.11.13)$$

Тогда в зоне с постоянной  $\Omega$  уравнение (7.11.11) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left( \frac{3}{4x^2} + 1 - S^2 \right) \varphi. \quad (7.11.14)$$

В зоне с нулевой завихренностью, где

$$\Omega = \frac{k}{r^2}, \quad \Omega' = -\frac{2\Omega}{r}, \quad (7.11.15)$$

получим

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = \left( \frac{3}{4x^2} + 1 \right) \bar{\varphi}. \quad (7.11.16)$$

Примером простейшей ситуации с поглощением волн является область с вращением по типу твердого тела (постоянная  $\Omega$ ), окруженная невращающейся жидкостью, простирающейся в бесконечность. Если коэффициент при  $\varphi$  в (7.11.14) для некоторых значений  $r$  отрицателен, а соответствующий коэффициент при  $\bar{\varphi}$  в (7.11.16) положителен при больших  $r$ , то это является признаком существования решения искомого типа. Этому способствует достаточно большой радиус зоны с постоянным вращением  $\Omega$ . С другой стороны, чем больше величина  $S$  (и  $\Omega$ ), тем меньше радиус  $r$ , внутри которого волны поглощаются. При этом, по крайней мере, должно выполняться неравенство  $S^2 > 1$ , т. е.

$$2\Omega > \sigma, \quad (7.11.17)$$

и, таким образом, трубки рассматриваемого типа неспособны поглощать колебания с частотой, превышающей значение, характерное для завихренности в ядре ( $2\Omega$ ). Колебания с много меньшей частотой поглощаются внутри радиуса, соответствующего неравенству

$$S^2 > 1 + \frac{3}{4x^2}. \quad (7.11.18)$$

Рассмотрим теперь турбулентное течение, которое образуется при истечении струи в невозмущенный воздух (рис. 7.11.1). На границах струи развиваются возмущения с очень малой частотой, так что изгибы, которые возникают на концах вихревых трубок, напоминающих спутанные макароны, будут распространяться вдоль них. Если конец такой трубки получит мгновенное растяжение, то волна растяжения распространится вдоль оси трубки так, как если бы она была упругой. Давление на оси

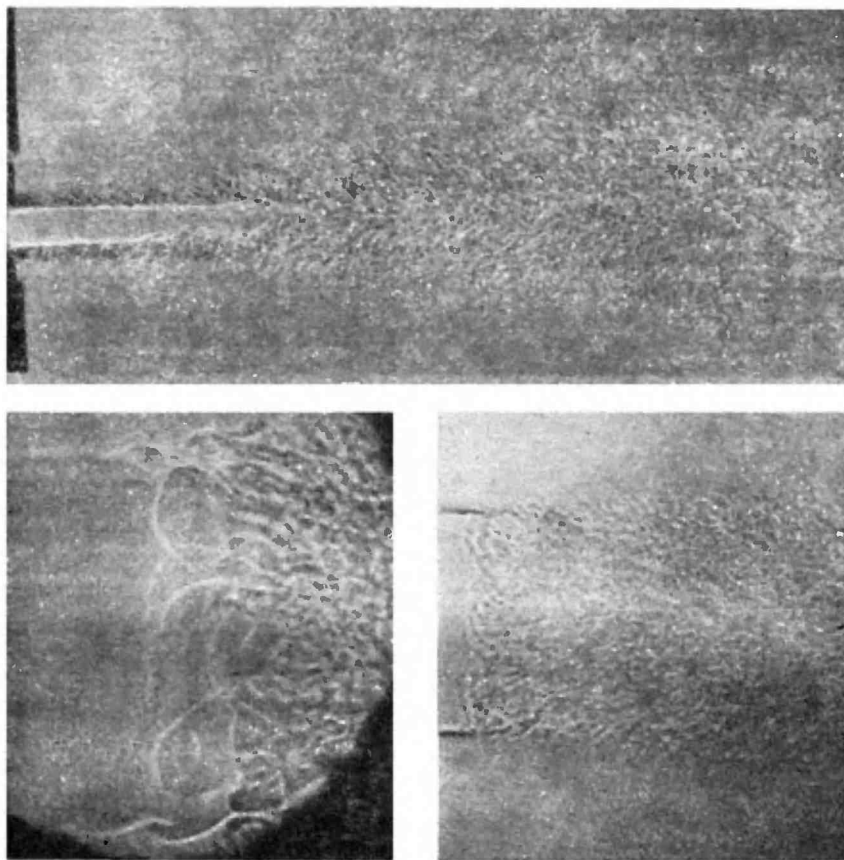


Рис. 7.11.1. Теневые фотоснимки турбулентности на границе субзвуковой струи горячего воздуха, вытекающего из круглого отверстия.

Когда вихревая пелена сворачивается в путаницу вихревых трубок, наиболее интенсивными среди этих трубок оказываются те, которые растягивались быстрее всего, т. е. трубки, находившиеся под углом  $45^\circ$  к направлению сдвига. Нижние фотоснимки показывают преобразование вихревой пелены в волновую структуру (вихри при этом перерождаются в петли). (Фотографии любезно предоставлены Дж. Молло Кристенсенем, Массачусетский технологический институт.)

в момент прохождения волны падает, поскольку при этом возрастает интенсивность вращения, так что напряженность трубки, выражаемая через силу, действующую на поперечное сечение, возрастает. Когда такое растяжение ослабевает, в трубке возникают напряжения, соответствующие системе сил, стремящихся к восстановлению формы вихревой трубки. Следовательно, такой тип турбулентного течения проявляет своего рода вязко-

упругие свойства, так как возмущения будут затухать в процессе их распространения по трубкам случайным образом из-за запутанной структуры образовавшихся вихревых нитей.

На рис. 7.11.1 затопленная струя порождает вихревой слой, который быстро превращается в массу спутанных вихревых трубок. Наибольшей интенсивностью обладают вихри, которые испытывают наибольшие растяжения в пограничной зоне под углом в  $45^\circ$  к оси струи. Интенсивное растяжение увеличивает скорость вращения, что в свою очередь вызывает спад давления на оси. Это сопровождается увеличением объема вихря, происходящим взрывным образом, что вызывает звуковой импульс. Так возникает шум, сопровождающий истечение струи. В теории струйного шума просто вычисляют флюктуации давления для несжимаемой жидкости, а затем их распространяют на случай сжимаемой жидкости. Так как наибольшие флюктуации возникают в вихревых трубках, наклоненных под углом в  $45^\circ$  к оси, то фронты звуковых волн имеют тенденцию к аналогичной ориентации и распространяются в перпендикулярном направлении преимущественно вне конуса с вершиной в отверстии и углом при вершине  $45^\circ$ . Это объяснение предполагает существование интенсивных завихрений промежуточного масштаба, которые растягивают мелкие в форме пучков, как это можно видеть на снимке.

Снимок свидетельствует также о том, что должна существовать турбулентность мельчайшего масштаба, из-за которой большой температурный градиент начального вихревого слоя порождает завихрения на границе, а ядро становится однородным из-за молекулярных обменных процессов. Наиболее интенсивные вихри имеют наименьшую плотность вдоль оси, так как там развивается зона низкого давления. Такой турбулентный процесс с большим градиентом явно анизотропен.

## ЧАСТИЧНО ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

## 8.1. Всплывание воздушного пузыря в воде

Частично турбулентное течение возникает, когда в покоящейся среде начинает двигаться тело, обладающее импульсом или обретающее его в процессе всплывания.

В качестве первого примера рассмотрим течение, которое возникает при движении полости в однородной покоящейся среде. Сам этот термин возник при изучении поведения различного рода суспензий, состоящих из твердых частиц, взвешенных благодаря силам аэродинамического сопротивления в восходящем воздушном потоке. В целом такая смесь ведет себя как жидкость, плотность которой много больше плотности исходной однородной среды. Так, в случае пылевых частиц, взвешенных в восходящем воздушном потоке, образуется свободная поверхность, выше которой пылевые частицы не поднимаются. В такой суспензии достаточно крупные объемы с плотностью, меньшей, чем плотность двухкомпонентной пылевоздушной смеси, будут всплывать, как в однородной жидкости. Для искусственного поддержания существования слоя пылевоздушной смеси воздух следует подавать под давлением через мелкие отверстия или пористый слой снизу, при этом отдельные пузыри воздуха всплывают сквозь слой смеси подобно пузырям воздуха в воде, в особенности если напор подаваемого воздуха сильно превышает минимальный, необходимый для образования пылевого слоя. Такие пузыри мы будем называть *полостями*, поскольку они не содержат в себе песчинок. Рассмотрим теперь поведение больших пузырей в воде.

Плотность воздуха в пузыре составляет лишь около одной тысячной от плотности воды, так что движение воздуха внутри пузыря вызывает пренебрежимо малые изменения давления внутри него. Это давление, следовательно, можно считать постоянным. Если форма пузыря сохраняется, то обтекание его жидкостью должно быть таким, чтобы создавать равномерное давление на его поверхность. Мы уже установили (разд. 2.11), что перед телом, движущимся сквозь жидкость, течение можно приближенно считать безвихревым, а давление на сферу, движущуюся со скоростью  $w$  вертикально в среде с плотностью  $\rho$ , опи-

сывается выражением (2.3.1) с учетом гравитационного члена:

$$p = p_0 - g\rho z - \frac{\rho}{8} \omega^2 \sin^2 \varphi, \quad (8.1.1)$$

где  $p_0$  — постоянное давление на некотором уровне  $z = 0$  вдали от сферы (рис. 8.1.1, а).

Большие пузыри приближенно сферичны вблизи своей верхушки и обладают более или менее плоским дном, совершающим нерегулярные движения. В целом они имеют форму линзы, ободок и нижняя часть которой флюктуируют, тогда как верхняя часть остается гладкой (рис. 8.1.3).

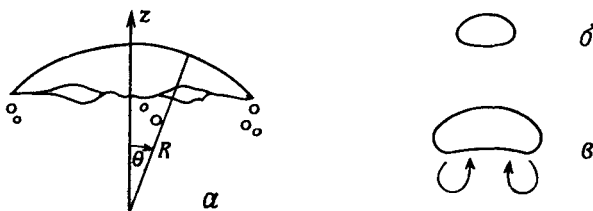


Рис. 8.1.1. Всплывание воздушного пузыря в воде.

а — координаты, используемые для описания поведения крупного ( $\sim 10$  см в диаметре) пузыря, имеющего сферическую головную часть. Основание пузыря имеет неправильную форму и нестационарно, в турбулентном следе циркулируют мелкие пузырьки.

б — форма небольшого пузырька ( $< 2$  см), для которого поверхностное натяжение существенно и придает ему форму окружности в плане.

в — умеренно крупные пузыри в вязкой жидкости (при малом числе Рейнольдса). Имеют ободок на периферии и вогнутую нижнюю поверхность.

Эффект поверхностного натяжения несуществен при определении формы пузырей, когда они имеют несколько сантиметров в диаметре, но те из них, диаметр которых меньше 2 см, обладают заметно округленными ободками (рис. 8.1.1, б). Если жидкость пузыря более вязкая, чем вода, то турбулентность в спутной струе уменьшается и течение в ней приближается к стационарному. Тогда по кромке донной части пузыря образуются завихрения, само дно прогибается посередине (рис. 8.1.1, в).

Выберем  $z = 0$  на верхушке пузыря. Так как

$$z = -R(1 - \cos \theta) \quad (8.1.2)$$

и (для малых  $\theta$  с большой точностью, а для  $\theta < 30^\circ$  приблизительно)

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \simeq 2(1 - \cos \theta), \quad (8.1.3)$$

то условие постоянства  $p$  будет иметь вид

$$\omega = \sqrt[2]{3} (gR)^{1/2}, \quad (8.1.4)$$

где  $R$  есть радиус кривизны верхней части пузыря.

В эту формулу для скорости подъема пузыря, впервые введенную Дэвисом и Тейлором (1950), входят размеры пузыря в предположении, что угловая апертура пузыря (величина  $\theta$

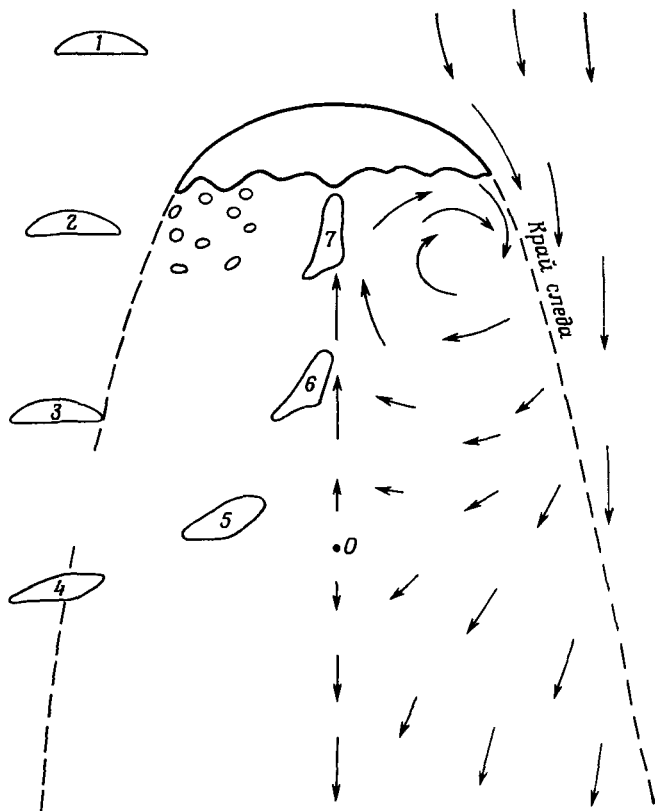


Рис. 8.1.2. Большой всплывающий пузырь и след за ним.

Цифрами показаны 7 последовательных положений небольшого пузырька, захваченного при подъеме крупного пузыря; на периферии ближнего следа видна группа еще меньших пузырьков, циркулирующих вблизи от края следа, иногда выбрасываемых, а иногда опять вовлекаемых в главный пузырь. Справа показаны осредненные скорости окружающей среды, относительно которых возникают пульсационные скорости, обусловленные нестабильностью фронта и основания главного пузыря. Скорости даны относительно пузыря, а  $O$  — задняя точка торможения

у ободка пузыря) известна. Могут генерироваться пузыри с апертурой в пределах от  $25^\circ$  до  $40^\circ$ , так что их объем не определяется знанием только  $R$ .

Большие пузыри диаметром порядка 20 см можно легко получить, погрузив в воду перевернутое глубокое блюдо. Такие пузыри имеют ряд специфических свойств. Их можно изучать,



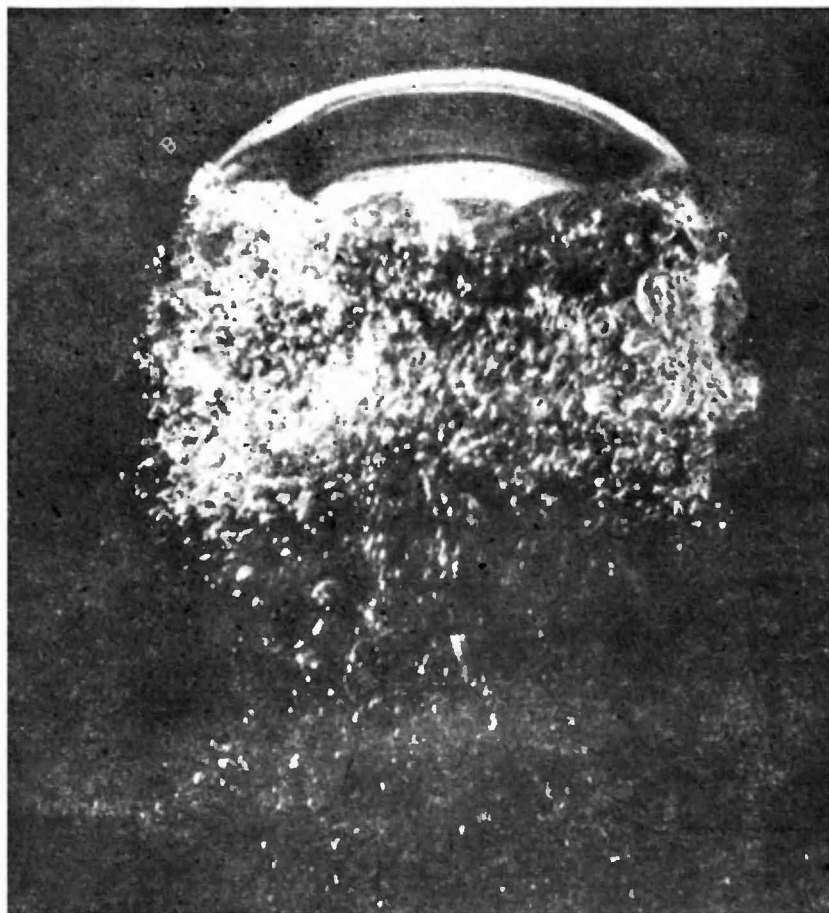


Рис 8.13. Пузырь воздуха радиусом  $\sim 15$  см, поднимающийся в воде. Положение мелких пузырьков в турбулентном следе показывает, что, хотя след и сильно турбулизован, доминирует циркуляция, обусловленная вихревым кольцом.

например, в баке с водой, в которой содержатся частицы красителя, так что течение в слутной зоне за поднимающимся пузырем становится видимым. В грубом приближении след получается параболическим (рис. 8.1.2), с сильным вертикальным потоком в середине, где некоторые частицы движутся вверх со скоростью, вдвое большей скорости пузыря. Если маленький пузырек окажется перед большим, то можно видеть, как он сначала отбрасывается в сторону догнавшим его большим, но затем оказывается захваченным краем следа. Вскоре после этого он

быстро переносится к середине следа и подвергается деформации за счет движения воды вокруг него. Когда скорость маленького пузырька становится большой, эффект присоединенной массы становится очевидным, поскольку можно наблюдать, как маленький пузырек, поднимающийся в следе с достаточно большой относительно воды скоростью, проходит сквозь большой пузырь, чтобы всплыть с его верхней стороны. Противоположным этому будет поведение пузырька с малой относительно воды скоростью, который движется так, как если бы имел отрицательную массу (см. разд. 2.9).

Если вместо воздушного пузыря рассматривается пузырь жидкости с плотностью  $\rho'$ , не смешивающейся с водой, можно пользоваться следующей формулой для скорости:

$$\omega = \frac{2}{3} \left( gR \frac{\rho - \rho'}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (8.1.5)$$

где введена архимедова сила, порожденная разностью плотностей  $\rho$  и  $\rho'$ . Эта формула может оказаться неприемлемой из-за действия инерционных сил во внутренней жидкости, которые порождают вариации давления на поверхности пузыря, вследствие поверхностных эффектов либо вследствие перемешивания через поверхность. В этой книге мы рассматриваем только смешиваемые жидкости, такие, как горячий воздух в холодном или соленая вода в пресной, причем разность плотностей мала.

## 8.2. Осесимметричные термики

Термик представляет собой массу всплывающей жидкости, которая при всплывании может перемешиваться с окружающей жидкостью. Планеристы называли так потоки теплого воздуха от нагретого солнцем грунта, в которых они могли парить. В атмосфере свободная конвекция порождает очень сложное движение (см. гл. 9), но здесь рассматривается поведение только одного изолированного термика в невозмущенной среде. На рис. 8.2.1 представлены снимки развития термика, полученные в лаборатории.

Очень простой теоретический подход в нашем рассмотрении будет вполне приемлемым, так как применение здесь более сложных теорий просто не может дать никаких дополнительных результатов, ибо в каждом конкретном случае свойства термиков могут быть совершенно непредсказуемыми.

Правомерность сделанных теоретических допущений проверяется эффективностью полученных результатов. Как можно видеть, термики, ставшие видимыми с помощью внесенного красителя, явно находятся в турбулентном движении и напоминают

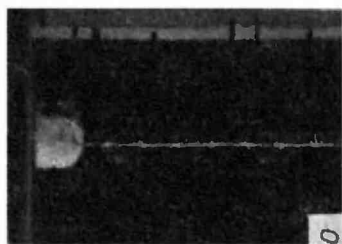
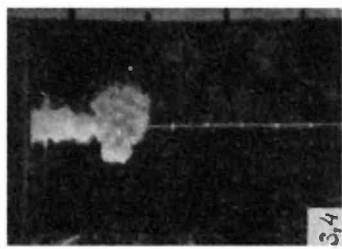
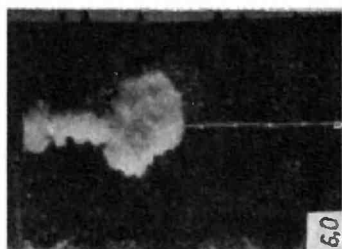
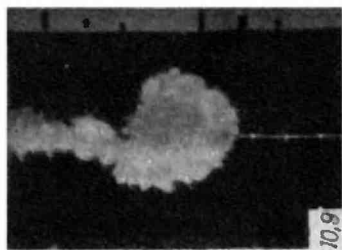
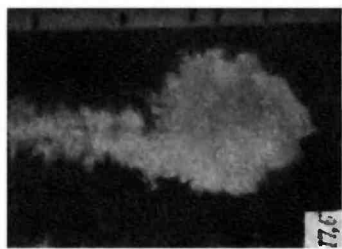
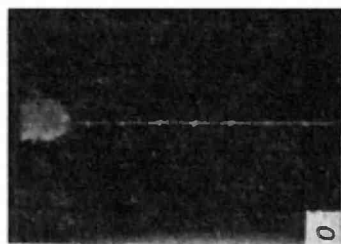
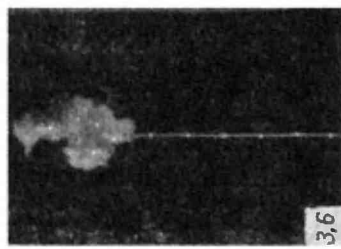
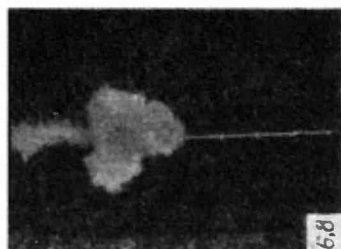
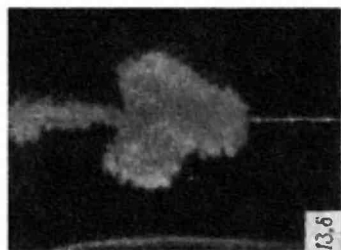
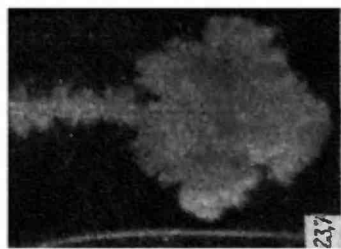


Рис. 8.2.1. Лабораторные последовательные снимки развития термиков.

Два термика из раствора сульфата натрия, опускающиеся в воде, визуализованы добавлением хлорида бария, который образует белый выпавший в осадок сульфат бария. Вещество вводится из вращающейся сферической чашки, которая оставляет более растворимую составляющую вблизи поверхности. Вертикальный стержень маркирован с интервалом 10 см. На свободной поверхности воды (вверху) можно видеть обратное отражение термика. Числа показывают время в секундах с начала выпуска вещества в воду.

кучевые облака, верхняя часть которых похожа на цветную капусту. Таким образом, предполагается, что молекулярная вязкость не играет роли. Можно видеть также, что размеры термиков увеличиваются по мере их движения по вертикали, а форма в общем остается прежней. Из-за турбулентности мы полагаем, что начальное распределение плотности в термике пренебрежимо мало влияет на более позднее распределение, когда термик становится много больше и когда видны отдельные вихри, более крупные, чем был термик в момент образования или выпуска. Разумно предположить, следовательно, что первоначальная конфигурация «забыта» (при условии, что она была достаточно компактной) и что все термики стремятся принять одну и ту же форму, с одинаковыми средней скоростью и распределением плотности. Все скорости, включая типичные для развития вихрей, при этом определяются общей плавучестью и размерами термика; на основании соображений размерности скорость должна быть представлена в форме

$$\omega = C (gBR)^{1/2}, \quad (8.2.1)$$

где  $B$  — удельная плавучесть по объему  $mR^3$  (общая плавучесть или подъемная сила равна  $gBmR^3$ ), а  $C$  — константа, зависящая от того, как определены  $\omega$  и  $R$ . Так, если величина  $R$  определена как радиус максимального горизонтального сечения, а  $\omega$  равна вертикальной скорости головной (или самой верхней) точки термика  $\omega_c$ , которую находят из эксперимента, то  $C$  равно примерно 1,2.

Поскольку скорость роста радиуса  $dR/dt$  имеет размерность скорости, для нее должно существовать выражение, аналогичное выражению для  $\omega$ .

Так как плавучесть постоянна, то

$$gB = gB_0 R_0^3 / R^3, \quad (8.2.2)$$

где индекс 0 относится к значениям в некоторый фиксированный момент, и получаем

$$R \frac{dR}{dt} = C' (gB_0 R_0^3)^{1/2}, \quad (8.2.3)$$

или

$$R^2 \sim t, \quad (8.2.4)$$

а коэффициент пропорциональности есть  $2C' (gB_0 R_0^3)^{1/2}$ . Здесь  $C'$  — другая константа, относящаяся к скорости возрастания радиуса.

Если  $z$  — высота вершины термика, то таким же образом получим

$$z^2 \sim t, \quad (8.2.5)$$

так что можно написать

$$z = nR. \quad (8.2.6)$$

Это заключение есть прямое следствие формулы (8.2.1), которая была получена из соображений теории размерности. Если бы другие факторы, такие, как вязкость  $\nu$ , оказывали влияние на  $\omega$ , мы не смогли бы прийти к столь простому результату. Это следует из того, что выражение  $\omega B/\nu$ , являющееся числом Рейнольдса, безразмерно, и, следовательно, коэффициент  $C$  является функцией числа Рейнольдса, а не универсальной константой.

В выражениях (8.2.4) и (8.2.5) мы предположили, что постоянная интегрирования должна быть выбрана таким образом, чтобы  $R$  и  $z$  равнялись 0 при  $t = 0$ . Следовательно, термик ведет себя так, как если бы он когда-то имел бесконечно малые размеры и вырос из виртуальной начальной точки. Это, очевидно, невозможно главным образом потому, что плотность не может быть отрицательной, так что удельная плавучесть  $B$ , определенная как

$$B = \frac{\rho - \rho'}{\rho}, \quad (8.2.7)$$

не может быть больше 1. Следовательно, движение не может быть экстраполировано назад за пределы размера, при котором общая плавучесть получается при плотности внутри, равной 0.

С другой стороны, можно представить себе отрицательный термик, а именно объем более тяжелой жидкости, для плотности которой нет теоретического верхнего предела. Но в этом случае мы уже не можем обосновать использование приближения Буссинеска и определять  $B$  только через  $g$ , поскольку движение жидкости внутри термика создаст давление, пропорциональное плотности. Так как  $B$  — безразмерная величина, коэффициент  $C$  может являться его функцией, как это могло бы быть с числом Рейнольдса. Это рассмотрение справедливо, следовательно, только для случая, когда справедливо приближение Буссинеска, и ускорения жидкости малы по сравнению с  $g$  (см. разд. 2.12). Поскольку ускорения жидкости порождаются силами плавучести, мы в первую очередь должны убедиться, что

$$B \ll 1. \quad (8.2.8)$$

Обычно в атмосфере превышение температуры в термике по сравнению с окружающим воздухом имеет порядок 1 К, так что  $B$  составляет примерно 0,003. В модельных экспериментах часто используют насыщенный солевой раствор, чтобы получить отрицательную плавучесть относительно пресной воды;  $B$  здесь первоначально порядка 0,15, но вскоре, по мере перемешивания, становится много меньше. Если спирт (или какая-либо другая

жидкость легче воды и растворимая в ней) используется для создания положительной плавучести, величина  $B$  сравнима с 1 только на очень ранних стадиях. Следовательно, не имеет значения, какой плавучестью, положительной или отрицательной, обладали термики, на которых проводились измерения. На ранних стадиях термики постепенно принимают ту конечную форму, которую, по нашим представлениям, они и должны принять, и измерения, проводимые на этих стадиях, приложимы только к соответствующим конкретным случаям и аппаратуре, использованной для моделирования. Чтобы провести эксперимент, нужно осуществить выпуск термика в среду без дополнительных ее возмущений. Это можно сделать при помощи полусферической чашки из тонкого металла, частично заполненной плавучей жидкостью и могущей поворачиваться относительно своего горизонтального диаметра. Быстро перевернув чашку, можно создать пузырь плавучей жидкости, имеющий форму сферического сегмента. Если выпуск производится с поверхности, то уровень жидкости внутри чашки и снаружи должен быть выровнен, иначе выпускаемой жидкости будет придан вертикальный импульс, когда она как бы упадет с некоторой высоты. Чашка должна быть перевернута быстро, поскольку в противном случае при вытекании жидкости из чашки термику будет передан боковой импульс.

Последовательные положения термика могут быть сняты на киноплёнку и затем последовательно перенесены на график типа представленного на рис. 8.2.2. По этим данным может быть определена величина  $z$ , соответствующая  $R = 0$ . Если мы построим график, на котором по абсциссе откладывается  $z^2$ , а по ординате  $t$ , то обнаружим, что точки ложатся непосредственно на прямую линию или очень близко к ней. Величина  $z$  может быть определена как положение наиболее выдвинутой вперед видимой точки термика, причем было замечено, что как только на поверхности термика появляются последовательные «выросты», крайняя точка начинает продвигаться вперед быстрее, чем средняя. С другой стороны, величина перемещений убывает, если расположенные в передней части «выросты» смещаются в сторону вследствие циркуляционного движения. Таким образом, флюктуации относительно прямой линии отражают турбулентные процессы в самом термике, хотя в то же время точки графика ложатся на прямую достаточно хорошо. Используя выражение (8.2.6), можно переписать уравнение (8.2.5) в форме

$$z^2 = \frac{2nC}{m^{1/2}} (gB_0 m R_0^3)^{1/2} t = t/k, \quad (8.2.9)$$

где  $gB_0 m R_0^3$  — подъемная сила (сила плавучести). Для экспериментальной проверки применимости этой теории были измерены

термики с различной подъемной силой, и для каждого из них была определена величина  $k$ . Затем был построен график зависимости  $k$  от подъемной силы. В первой серии экспериментов (Скорер, 1957) подъемная сила варьировалась от 1 до 45 г веса, так что значение  $k$  изменялось в пределах до 7 раз (считая от минимального значения), а величина  $2nC/m^{1/2}$  отклонялась в пределах 16% с каждой стороны от среднего значения (рис. 8.2.3).

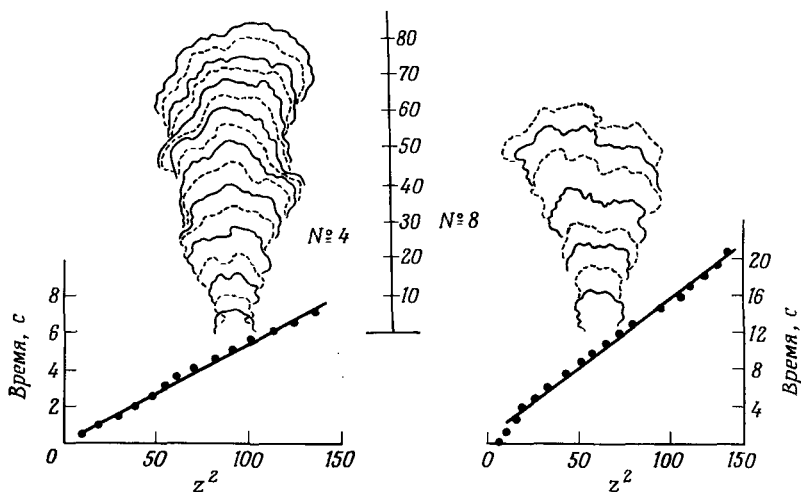


Рис. 8.2.2. Контуры последовательных положений двух термиков, перенесенные с кипопленки, и графики зависимости  $z^2$  от  $t$ .

Чтобы узнать, является ли  $C$  универсальной константой, нужно проверить диапазон изменения  $n$  и  $m$ . В соответствии с простой идеей, что все термики должны стремиться к универсальной форме, было предположено, что  $n$  и  $m$  — универсальные константы, определяющие расстояние от воображаемого источника до вершины термика, а объем термика получится умножением на некоторую степень горизонтального радиуса. Коэффициент формы  $m$  трудно измерить. Он в грубом приближении равен 3, поскольку термик сплюснен по сравнению со сферой, для которой коэффициент формы равен  $4\pi/3$ ; однако любые возможные его изменения должны слабо влиять на результаты вычислений, так как коэффициент формы входит в формулу только в виде  $m^{1/2}$ . С другой стороны,  $n$  измерить легко; величина  $n$  претерпевает значительные вариации от термика к термику, хотя обычно и создается впечатление, что она остается постоянной для всего периода измерений данного термика. В ранних экспериментах  $n$  измерялось от 2,9 до 5,0. Ричардс отметил

изменение величины  $n$  от 2,0 до 7,3. Корреляция величин  $2nC/m^{1/2}$  и  $n^{1/2}$  позволяют считать, что произведение  $n^{1/2}C$  в первом приближении постоянно (рис. 8.2.4). Используя это в теории, примем

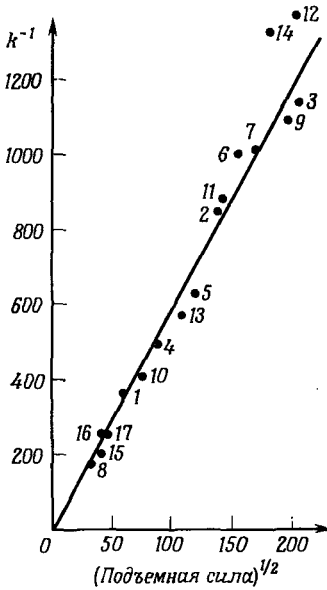


Рис. 8.2.3. Связь между величиной  $1/k$ , измеренной по скорости перемещения термика, и подъемной силой. Величина  $C$  в уравнении (8.2.1) определяется из уравнения (8.2.9) и угла наклона прямой на диаграмме. Числа представляют собой серийный номер эксперимента.

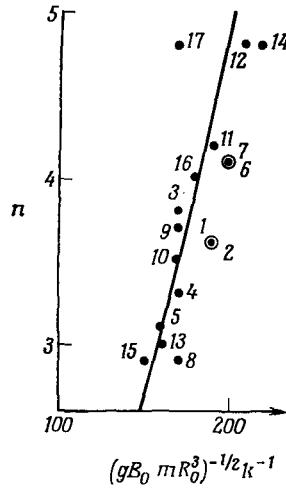


Рис. 8.2.4. Изменение угла наклона прямой, проведенной от виртуального источника к точкам графика рис. 8.2.3, в зависимости от  $n$ .

Кривая представляет функцию, пропорциональную  $n^{1/2}$ .

объем равным  $mR^2z/n$  [вместо  $mR^3$ , как в (8.2.2)], после чего уравнение (8.2.1) примет вид

$$\omega = C (gB_0 R_0^2 z_0 n)^{1/2} / z = \frac{C n^{1/2}}{m^{1/2}} (\text{Подъемная сила})^{1/2} t, \quad (8.2.10)$$

или

$$z^2 = 2 \frac{C n^{1/2}}{m^{1/2}} (\text{Подъемная сила})^{1/2} t. \quad (8.2.11)$$

Рис. 8.2.3 иллюстрирует зависимость значения  $k^{-1}$  от архимедовой силы  $(gB_0 mR_0^3)^{1/2}$ . На рис. 8.2.4 показано, что отношение этих величин для каждого эксперимента связано с  $n$ . Кривая на этом рисунке представляет функцию, пропорциональную  $n^{1/2}$ .



При этом был учтен разброс параметров, но не удалось подобрать гладкой кривой, представляющей простую функцию и проходящей ближе ко всем точкам.

С другой стороны, Ричардс (1961) провел много экспериментов помимо тех, которые представлены на рис. 8.2.4, и обнаружил, что величина  $k^{-1}(B_0 m R_0^3)^{1/2}$  меняется пропорционально  $n^{3/2}$  для большего интервала величин без увеличения разброса. Из его результатов следует, что постоянная  $C$  (в уравнениях 8.2.1 и 8.2.10, например), строго говоря, не является константой и, хотя и равна примерно 1,2, более точно может быть представлена как

$$C = 0,36 m^{1/2} n^{1/2} = 0,63 n^{1/2}, \quad (8.2.12)$$

где  $m \approx 3$ .

Как бы то ни было, нет особого смысла принимать во внимание вариации  $n$ , поскольку до настоящего времени нет четкого представления о том, что же именно представляет собой  $n$ . Точки на рис. 8.2.3 лежат близко к линии, которая даст

$$2Cn/m^{1/2} = 180g^{-1/2} \text{ CGS} = 5,7. \quad (8.2.13)$$

Таким образом, при  $n = 4$  и  $m = 3$  приближенно получаем

$$C = 1,2, \quad (8.2.14)$$

или

$$Cn^{1/2} = 2,4. \quad (8.2.15)$$

Из рассмотрения данных, представленных на рис. 8.2.3, следует важное заключение, что они удовлетворительно аппроксимируются прямой, проведенной через начало координат. Это может служить очевидным доказательством того, что в экспериментах эффекты вязкости не играют существенной роли, а поскольку измерения, выполненные для облаков, приводят к заключению, что величина  $C$  примерно равна 1 (хотя их подъемная сила больше примерно в  $10^{10}$  раз, а средой является воздух), то оказывается, что во всех случаях эффекты турбулентности доминируют над эффектами вязкости (см., например, Малкус и Скорер, 1955).

Число Рейнольдса для термика равно  $\omega R/\nu$  и в соответствии с (8.2.10) постоянно, так как  $z \sim R$ . Следовательно, отношение инерционных сил к силам вязкости для данного термика постоянно, и, таким образом, если силы вязкости были пренебрежительно малы на какой-то стадии развития термика, они будут такими и в течение всего времени его существования. Можно было бы возразить, что силы вязкости могут определять картину распределения скоростей внутри термика, не влияя существенно

на такие параметры, как коэффициент  $C$ , который характеризует поведение термика как единого объекта. Если, например, окажется, что маленькая капля чернил в стакане воды имеет такое же значение  $C$ , то это еще не значит, что она турбулентна. Уверенность в том, что лабораторные термики с подъемной силой в воде в несколько грамм подобны атмосферным термикам, обосновывается тем, что можно проследить турбулентные вихри в действии.

### 8.3. Свойства термиков

В процессе существования термика величина  $n$  иногда меняется, и притом скачкообразно. Большой, чем обычно, протуберанец (вырост) может появиться сбоку и отделиться, не будучи полностью вовлеченным в циркуляцию, которая происходит в тыловой области. В этом случае величина  $n$  уменьшается. Величина  $n$  иногда возрастает, если термик расширяется за счет одного или двух крупных протуберанцев, которые полностью вовлекаются в тыловую область. Отсюда видно, что термик не всегда сохраняет постоянное значение  $n$ , даже если до определенного момента оно постоянно.

Циркуляция термика может быть определена как циркуляция по контуру, который показан на рис. 8.3.1. Рисунок изображает осевое сечение термика, где контур проведен в зоне безвихревого течения, внешней по отношению к термику, и положение контура не влияет на величину циркуляции. Величина циркуляции, которая определяется как интеграл

$$\oint_{\text{ОАРО}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \sim \omega R, \quad (8.3.1)$$

остаётся постоянной для всего времени существования термика, поскольку  $\omega \sim R^{-1}$  для любой характерной скорости. Циркуляция может меняться только под действием сил, которые создают ускорения вокруг контура, на что указывает вид первого члена в правой части уравнения (1.1.15), а единственными силами, которые могут действовать в этом случае, являются силы плавучести. Отсюда можно сделать вывод о том, что отсутствуют силы плавучести, действующие на жидкость вверх вдоль оси симметрии термика.

Это противоречит тому очевидному факту, что на оси термика обычно отмечается восходящее движение жидкости. Единственное объяснение этого парадокса может заключаться в предположении, что вихри порождают напряжения Рейнольдса, действующие подобно вязкости и замедляющие циркуляцию ровно

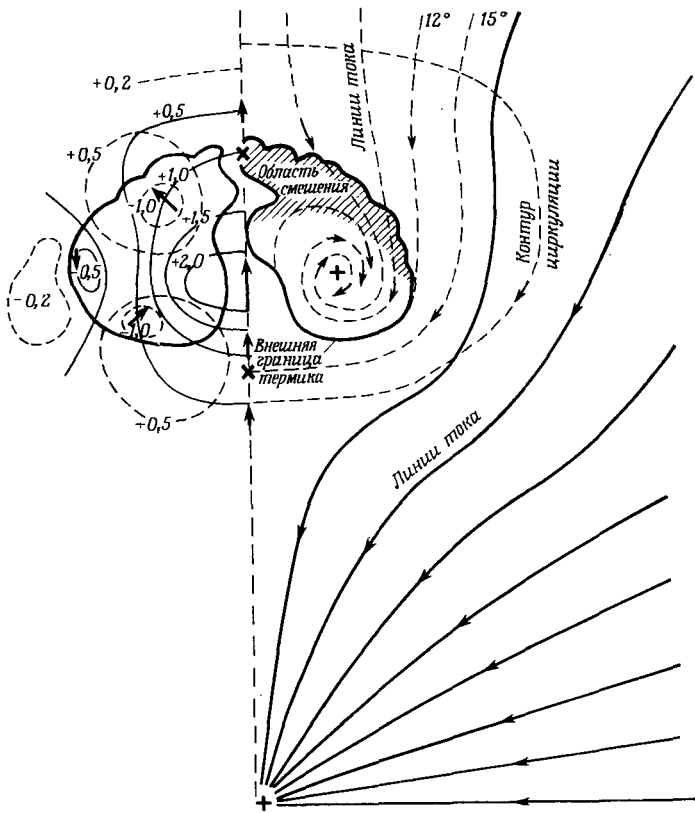


Рис. 8.3.1. Термик и его характеристики.

Правая половина диаграммы показывает течение жидкости относительно внешней границы термика, который показан неизменным по форме, но с турбулентными протуберанцами, возникающими вокруг него, и течения, направленного вдоль оси вверх и отклоняющегося то в одну, то в другую сторону по мере того, как оно замедляется при приближении к головной части термика, где и образуются протуберанцы.

Жидкость внутри конуса, имеющего половинный угол раствора при вершине примерно  $12^\circ$ , втягивается во фронтальную зону термика; жидкость, находящаяся между этим конусом и конусом с соответствующим углом  $15^\circ$ , втягивается в тыловую часть. Жидкость вне последнего конуса движется к стоку, расположенному на месте источника. Жидкость внутри термика входит в сток в точке, где жидкость мгновенно оказывается неподвижной относительно внешней границы термика.

Отмеченный контур циркуляции дополняется осью и используется для определения циркуляции термика, которая постоянна. Значения изолиний скоростей, направленных вверх и в сторону, даны слева по отношению к скорости подъема вершины термика; в наиболее важных точках показаны векторы скорости. Тонкие сплошные линии в левой части диаграммы — изолинии направленной вверх компоненты скорости. Сплошные линии там же — изолинии компоненты, направленной от оси.

X точка торможения; + сток; жирными стрелками обозначены векторы скорости.

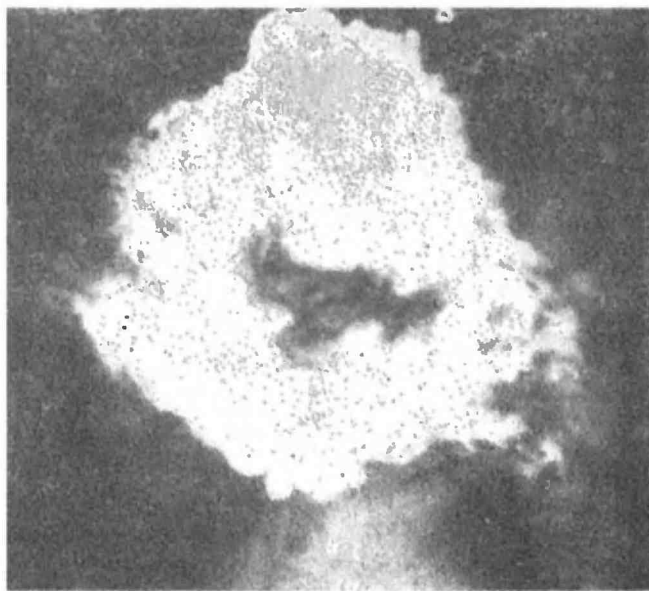


Рис. 8.3.2. Вид термика сверху, показывающий его торообразную форму с отчетливым просветом в середине.

в такой степени, в какой сама она увеличивается благодаря подъемным силам, действующим вдоль оси. Можно выразить это соображение по-иному, сказав, что в таком термике должна существовать траектория, проходящая через его середину, вдоль которой силы плавучести не действуют (т. е. плотность жидкости не отличается от окружающей). Циркуляция, измеренная с использованием такой траектории, будет, вне зависимости от момента измерения, постоянной для термика.

Хотя термик выпускается в виде компактной массы плавучей жидкости, спустя короткое время в середине его появляется отверстие, которое особенно хорошо видно, если термик состоит из непрозрачного вещества (рис. 8.3.2). Проще всего проводить эксперимент, используя либо молоко, либо белую дисперсную фазу, которая легко получается добавлением хлорида бария к термику, изготовленному из сульфата натрия (используемого вместо обычной поваренной соли для утяжеления раствора), чтобы образовать тяжелый осадок сульфата бария. Добавление нитрата серебра к раствору поваренной соли с целью получения осадка хлорида серебра не рекомендуется. Соли серебра дороги, а хлорид серебра имеет тенденцию выпадать хлопьями и осажаться на внутренней поверхности сосуда, если выпуск термика

задерживают с целью выждать время до полного прекращения движения воды в сосуде.

Принято считать, что турбулентные протуберанцы в термике образуются главным образом из-за неустойчивости градиента плотности, как это видно на первом снимке рис. 8.2.1, но в действительности это второстепенная причина. Во-первых, наиболее сильные протуберанцы появляются вблизи вершины термика, где неустойчивость градиента плотности минимальна; во-вторых, такие же протуберанцы появляются на передней поверхности клубов, в которых вообще отсутствует градиент плотности (разд. 8.6).

Первоначально термик представляет собой компактный объем теплого воздуха или иной всплывающей жидкости. Когда он выпускается в модельном эксперименте в воду, его поверхность быстро становится похожей на цветную капусту, что происходит из-за статической неустойчивости. Но кольцевые вихри, образующиеся вокруг всплывающей массы жидкости, помогают ей проникать в окружающую жидкость и одновременно способствуют проникновению окружающей жидкости вдоль оси термика от заднего фронта к переднему, так что постепенно образуется тороидальный вихрь (рис. 8.3.2). Последний отличается по своим характеристикам как от ламинарного вихревого кольца и сферического вихря, так и от какого-либо промежуточного между ними образования. Это происходит потому, что жидкость, прошедшая через осевую часть термика, становится турбулентной в области замедленного расходящегося криволинейного течения и перемешивается с всплывающей жидкостью. Поток, быстро движущийся сквозь середину термика, извивается в области дивергенции и «растаскивает» всплывающую массу на отдельные вихри. Этот поток полностью распределяется по фронту термика вместе с протуберанцами смеси, проходя в соответствии с циркуляцией то вдоль одного, то вдоль другого меридиана.

Таким образом, перед фронтом термика образуется турбулентное течение, и, как можно заметить, меченые частицы жидкости в процессе движения смешиваются с фронтом термика. Возникает конус, вершиной которого является воображаемое «начало» термика, а половинный угол при вершине равен примерно  $12^\circ$ , так что все частицы внутри конуса перемешиваются с фронтом термика при его перемещении. Другой конус с половинным углом при вершине  $\sim 15^\circ$  таков, что все частицы, оказавшиеся между его поверхностью и меньшим конусом, захватываются тыловой частью термика при его прохождении. Все частицы вне большого конуса термиком не захватываются. Эти конусы нельзя считать постоянными, поскольку углы при вершинах конусов меняются в зависимости от угла расширения самого термика, который может изменяться от  $8^\circ$  до  $26^\circ$ , но обычно

составляет примерно 16°. От 50 до 70 % (в среднем около 60 %) увлеченной жидкости перемешивается во фронтальной зоне.

Все термики считаются геометрически подобными, отличаясь только радиусом  $R$  и величиной относительной плавучести  $B$ , которая выражается в долях веса вытесняемой жидкости. Кинофильм, снятый об одном термике, может быть перенесен, при соответствующем изменении масштабов и скоростей, на картину развития любого другого термика, так что можно получить как бы один термик, среда вокруг которого либо втягивается в виртуальный источник, либо вовлекается внутрь термика. Представление об этом дают правые части рис. 8.3.1 и 8.4.6.

#### 8.4. Продолжение экспериментов с термиками

За то время, пока термик поднимается на высоту, равную примерно 1,5 его диаметра, он успевает как бы вывернуться наизнанку, т. е. каждая его часть проходит через зону смешения и оказывается разбавленной, пока поднимется на указанное расстояние. Ядро термика представляет собой вращающийся тор, причем это вихревое кольцо все время как бы перекачивается назад относительно движения жидкости, поднимающейся вдоль оси термика и попадающей во фронтальную зону смешения, а затем снова вовлекаемой в результате такой циркуляции в тыловую часть (рис. 8.4.1).

Если твердая частица внутри термика обладает весьма малой собственной скоростью падения в данной среде, то она и будет оставаться в нем, так как окружающая среда будет все время поддерживать ее, всасываясь в термик снизу. При большей собственной скорости падения положение частицы внутри термика зависит от того, может ли она выпасть из зоны с достаточной интенсивностью всасывания. Вудворт (1959) исследовал этот аспект, и его выводы подытожены на рис. 8.3.1 и 8.4.6.

Одним из вопросов, представляющих интерес в связи с вертикальным переносом примесей, является то, насколько способны всплывающие газы, содержащие эти примеси, проникать через слой инверсии, как обычно называют в этом контексте скачок плотности (рис. 8.4.2). Ричардс (1961 и 1963, *a* и *b*) получил следующие экспериментальные результаты в опытах на резервуарах с водой. Обозначим через  $Y$  коэффициент проникания термика, т. е. долю массы термика, которая продолжает подъем после проникновения через слой инверсии, а через  $S$  — показатель стратификации. Последний определяется как отношение разности плотностей в слое инверсии и нижележащем слое к средней разности плотностей, которую имел бы термик по отношению к плотности воздуха на высоте инверсии в том случае,

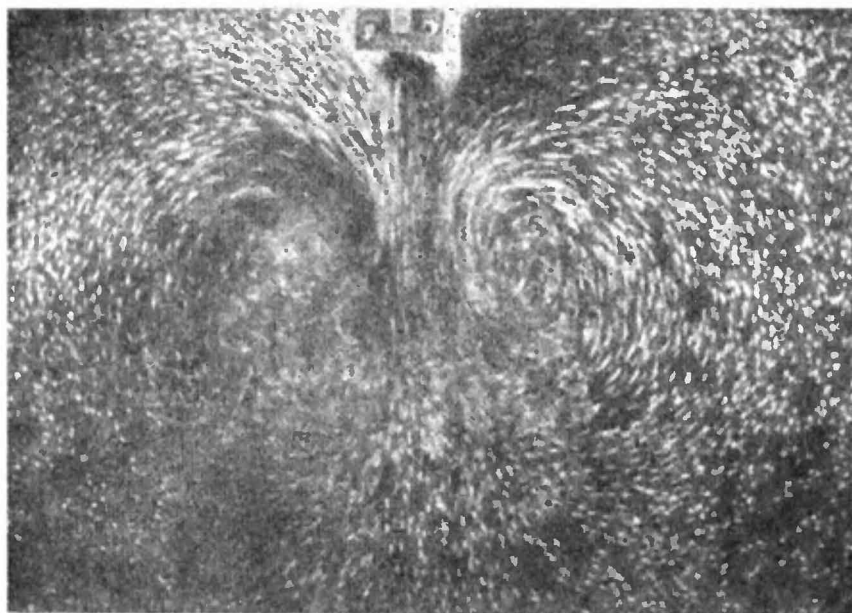
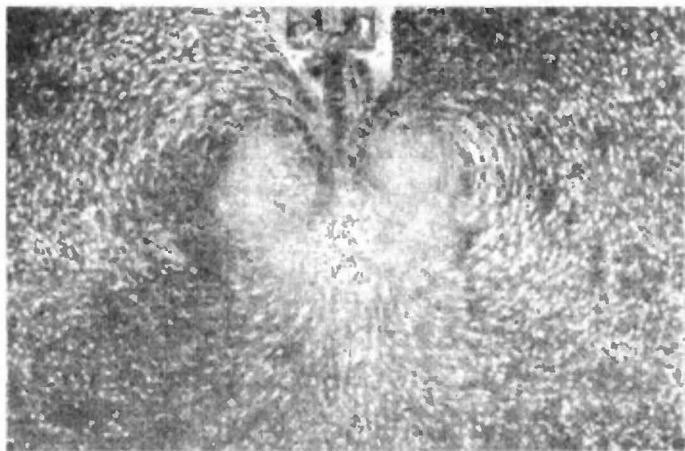
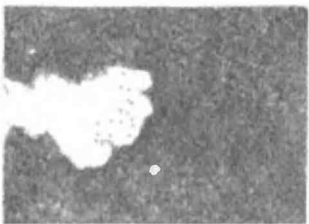
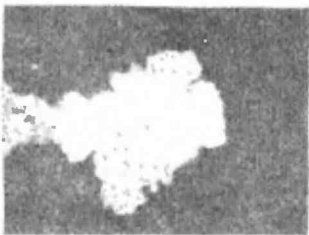
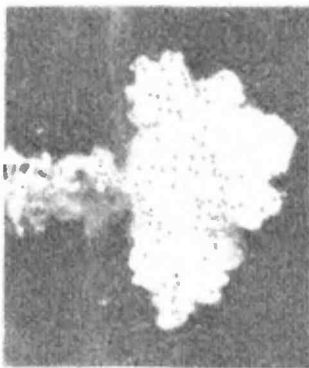
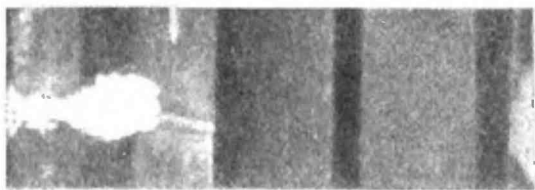
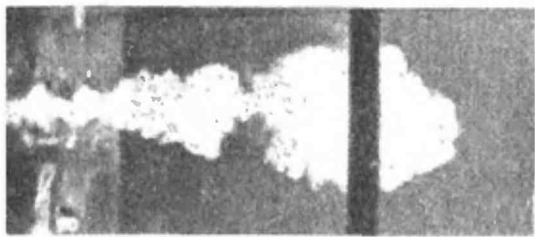
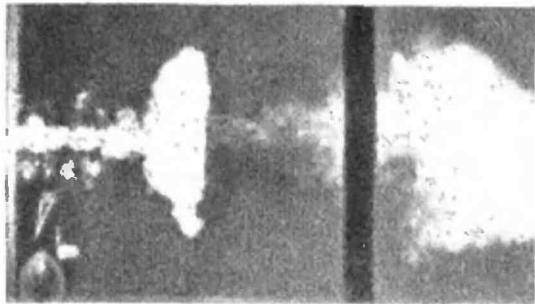
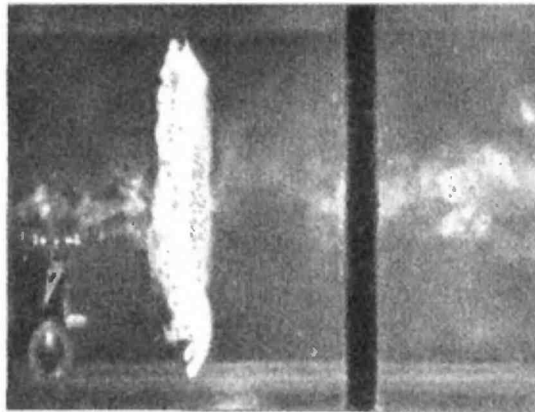


Рис. 8.4.1. Течение в двумерном термике.

Снимок (с большой выдержкой) частиц, подсвеченных в вертикальном сечении. Область турбулентности отличается более неупорядоченными векторами перемещений, область плавучести заметна по легкой затуманенности, которая лучше видна на верхнем снимке вблизи юветы, из которой производится выпуск.

Рис. 8.4.2. Снимки последовательных состояний термиков, полученных в лаборатории.

Один термик частично проникает через инверсию (верхние снимки), другой — не проникает (нижние снимки).





если бы инверсии не существовало. Для осесимметричных терминов найдено (рис. 8.4.3):

$$\begin{aligned}
 Y &= 0,95 - 1/2 S && \text{при } 0, 1 < S < 1, 9, \\
 Y &= 0 && \text{при } S > 1, 9, \\
 Y &= 1 && \text{при } S = 0,
 \end{aligned}
 \tag{8.4.1}$$

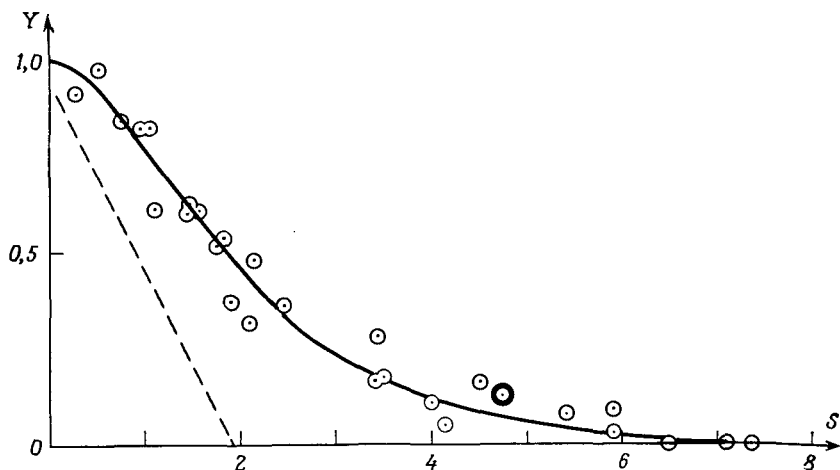


Рис. 8.4.3. Графическое представление экспериментальных данных Ричардса (1963, а), описанных соотношениями (8.4.1) и (8.4.2).

— двумерный термик; --- осесимметричный термик.

а для двумерного (цилиндрического) термика (см. разд. 8.8 для двумерных случаев)

$$Y = (0,93S + 1) \exp(-0,93S).
 \tag{8.4.2}$$

Коэффициент  $Y$  при  $S$ , превышающем  $\sim 7,5$ , можно считать практически равным 0.

Распределение плотности в термике неравномерно, и ясно, что термик не преодолет достаточно сильную инверсию, зато полностью или почти полностью пройдет сквозь сравнительно слабую. Приведенные выше уравнения описывают и случаи инверсии промежуточной мощности. Осесимметричные термики обладают меньшей способностью проникать сквозь инверсии, в частности, при  $S$ , большем единицы. Это, вероятно, объясняется тем, что в двумерном случае быстро движущаяся жидкость в центре термика имеет плотность, примерно равную средней по термику (рис. 8.4.4), тогда как в осесимметрическом случае она имеет плотность, примерно равную плотности окружающей среды (рис. 8.3.3). Вертикальная компонента количества

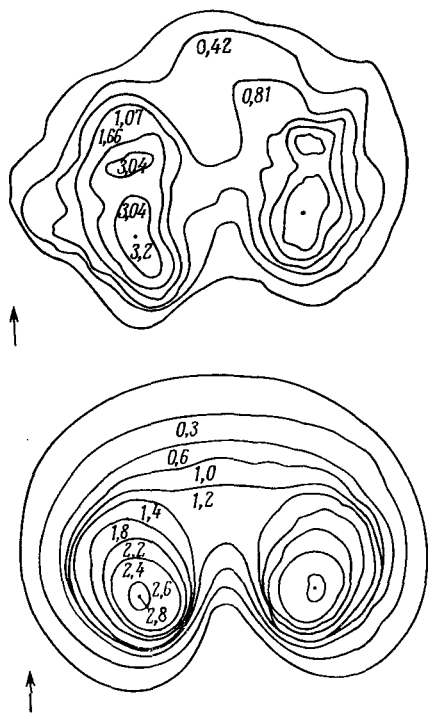
движения объема жидкости более тесно коррелирует с его плавучестью в двумерном случае. Более того, преодолев слой инверсии, многие двумерные термики разбиваются на ряд обособленных частей, которые в процессе своего расширения и взаимодействия потом, конечно, опять сливаются в двумерный термик. Изменение плотности по длине цилиндрического термика способствует увеличению доли его вещества, которая оказывается способной всплыть сквозь инверсию, тогда как при однородном распределении эта часть была бы остановлена в инверсионном слое. Это объясняет случаи, когда проникновение сквозь инверсию происходило при  $S$ , значительно превышающих 2.

В любом случае картина течения может быть представлена лишь в общих чертах, так как термики отличаются друг от друга,

Рис. 8.4.4. Два типичных распределения усредненной плотности по поперечному сечению двумерного термика, измеренные Ричардсом (1963, а).

Значения изолиний соответствуют средней плавучести.

а их движения подвержены сильным флюктуациям. Главная причина этих флюктуаций состоит в том, что вовлекаемая снизу жидкость, поднимаясь вдоль оси, довольно сильно петляет, вследствие чего в верхней части термика образуются протуберанцы. Далее эти образования смещаются назад по периферии термика, а их сменяют новые. На каждом из этих выростов возникают меньшие, на них в свою очередь еще меньшие и так далее, при этом поведение каждого «дочернего» образования в какой-то степени повторяет особенности более крупного «материнского». По-видимому, это вообще свойственно зоне с замедляющимся течением и вращением, так как турбулентные клубы дыма (разд. 8.6) ведут себя аналогичным образом и без всплытия.



Окружение термика, которое легко может быть исследовано путем визуализации жидкости, является зоной безвихревого движения, похожей на то, как если бы через жидкость двигалось некоторое тело. При этом отсутствует турбулентный след, который возникает за твердым телом, так как в нашем случае трения на поверхности движущегося объема нет. Внешнее поле скоростей может быть приближенно описано с помощью диполя с напряженностью  $\mu$  и потенциалом скоростей, заданным в виде  $\mu/r^2 \cdot \cos \theta$ . Такое же безвихревое течение (см. разд. 2.2) образуется при движении сферы радиуса  $a$  со скоростью  $V$ , при этом  $\mu = \frac{1}{2}Va^3$ . В случае движения термика напряженность  $\mu$  пропорциональна  $\omega R^3$ . Так как  $\omega R$  постоянно, то течение усиливается с увеличением расстояния  $r$  от центра термика пропорционально величине  $R^2$ , которая в свою очередь пропорциональна  $t$ . Это происходит потому, что количество движения добавляется в течение равномерно, в соответствии с силой плавуности. Таким образом, хотя сам термик замедляется ( $\omega \sim t^{-1/2}$ ), он расширяется, и внешняя скорость на заданном расстоянии от его центра возрастает.

Экспериментально измеренное поле скоростей (Вудворд, 1959) показано на рис. 8.3.1. Поскольку движение или любая другая характеристика термика могут быть представлены относительно условного контура (жирная линия на рис. 8.3.1), ограничивающего всплывающую массу, относительно него на правой части рис. 8.3.1 изображено движение частиц жидкости. Последние либо вовлекаются в термик и захватываются им, либо обходят его вокруг и снова вовлекаются снизу в отверстие тора вблизи виртуального центра термика. На такой диаграмме не представляется возможным точно определить линию тока, разделяющую области, где жидкость вовлекается в головную и тыловую части термика, так как форма термика, непрерывно меняющаяся вследствие образования выростов, делает его контуры размытыми.

С помощью таких диаграмм можно сделать вывод о том, что различаются от случая к случаю не только углы раствора, в которых движутся и развиваются термики, но и их форма. Таким образом, сильно сплюснутый термик, распространяющийся внутри того же конуса, что и менее сплюснутый, будет иметь по сравнению с последним большую величину  $n$ , поскольку  $n$  представляет собой отношение расстояния от вершины термика до его центра к максимальному горизонтальному радиусу.

В верхней части термика вблизи его передней границы течение весьма нестабильно. В то же время каждый горизонтальный слой жидкости, сквозь который термик проникает, в процессе этого проникновения огибает термик и вовлекается в него (рис. 8.4.5). Таким образом, перемешиванию способствуют два

одновременно протекающих процесса: вовлечение жидкости в вихревое движение и присоединение компактных масс жидкости к термику по пути его движения. Поэтому на пути, равном 2—3 диаметрам термика, присоединившаяся капелька жидкости может быть размешана по всему термику. Частицы, обладающие скоростью падения относительно жидкости, в которой они

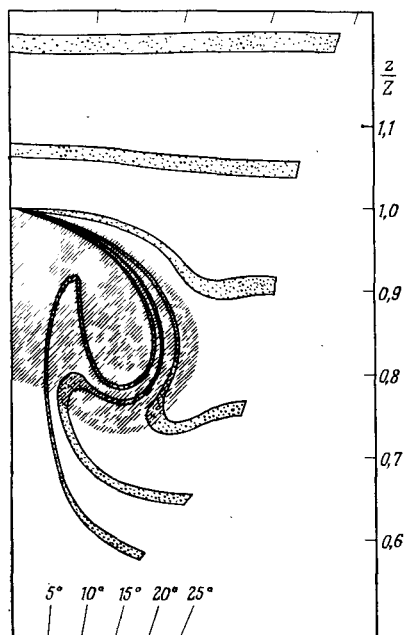


Рис. 8.4.5. Последовательные положения первоначально горизонтального слоя жидкости над развивающимся термиком (Вудворд, 1959).

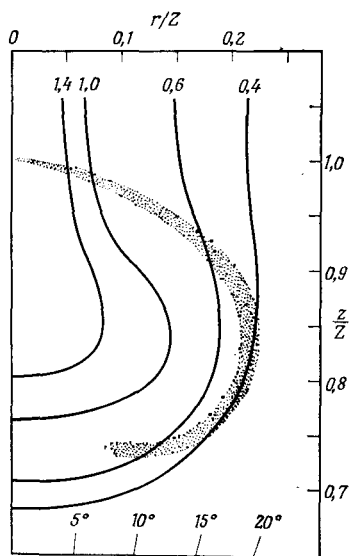


Рис. 8.4.6. Границы зон, вне которых частицы с данной скоростью падения будут достигать основания термика. Граница термика показана заштрихованной полосой. Скорости падения отнесены к скорости подъема головной части термика (Вудворд, 1959).

взвешены, могут совершить несколько оборотов вокруг ядра термика, прежде чем они выпадут из него.

На рис. 8.4.6 представлены кривые, рассчитанные Вудвортом по результатам экспериментов, показывающие зоны, из которых частицы с определенной скоростью падения не будут выпадать из термика. Частицы, падая относительно восходящего потока, в конце концов выпадают из термика, когда скорость этого потока убывает. Во время падения сквозь восходящее течение частицы перемещаются ближе к оси. Таким образом, все они воз-

вращаются на исходный уровень вблизи виртуального входа в термик, даже если перед этим частицы, циркулируя внутри него, были распределены в зоне со значительно большими горизонтальными размерами.

## 8.5. Полеты в термиках

На заре планеризма пилоты возлагали большие надежды на использование термиков для набора высоты. Вначале термики представляли себе в виде поднимающейся воздушной массы, более или менее сферической формы, которую отождествляли с пузырями, всплывающими в окружающей среде. Если пилоту-планеристу удавалось попасть в термик вблизи его вершины, то он мог набирать высоту до тех пор, пока не достигал нижней границы термика, после чего использование данного термика уже невозможно.

Поскольку любое твердое тело, движущееся в воздушной среде, оставляет турбулентный след, считалось, что и за термиками возникают такие следы. Поэтому если бы планерист в конце спуска сквозь термик ощущал турбулентность окружающего воздуха, то это служило бы экспериментальным подтверждением указанной гипотезы и согласовывалось бы с аналогией между движением термика и пузырька воздуха в воде. Эта аналогия предполагает наличие всплывающей фронтальной зоны, имеющей форму линзы, за которой находится вихревое кольцо с образующимися иногда плавными восходящими токами. Позади пузыря образуется вихревой след, в котором вертикальные скорости постепенно убывают с удалением от оси термика. Эта аналогия с пузырьком воздуха была усовершенствована заключением о том, что перемешивание (ясно заметное на вершинах кучевых облаков) будет размывать всплывающие пузыри, так как теплый воздух может смешиваться с окружающей средой. По этой причине они будут уменьшаться в размерах и постепенно исчезать. Данная тема будет развита в гл. 11, посвященной облакам. Такой размытый термик имел бы вихревой кольцеобразный след с турбулентной зоной под ним.

Опыт показывает, что при первом вхождении в термик обнаружение с помощью специальных маневров его центральной части с наибольшей скоростью восходящего потока не составляет большого труда. Турбулентность ощущалась лишь тогда, когда было трудно выйти в центр термика и отыскать восходящий поток с наибольшей скоростью.

Некоторые планеристы считали, что зона восходящего потока в термике вытянута в вертикальном направлении подобно сосиске, но это частное представление не пользовалось широкой

поддержкой, поскольку никому не удавалось определить экспериментально всплывающую массу, которая могла бы сохранить подобную форму: всегда нижняя часть «догоняла» верхнюю, и, таким образом, форма восходящего потока становилась близкой к шарообразной. Вопрос о том, может ли термик превращаться в свободную струю теплого воздуха (разд. 8.10), будет рассмотрен в гл. 9.

Когда были произведены лабораторные опыты с термиками, то, наконец, стало ясно, что турбулентная зона образуется только в верхней части термика, а позади него вовсе нет никакого следа. Примерно в это же время общепринятое представление о термике, как об образовании, имеющем сильный восходящий поток у вершины и турбулентный след с постепенно ослабевающим восходящим потоком снизу, было поставлено под сомнение в связи со следующим. На чемпионатах по планерному спорту менее опытные планеристы приобрели привычку следить за полетом чемпионов и начинали круговые маневры под ними, когда те находили восходящий поток и планировали в нем. Чемпионы скоро убеждались, что утратили преимущество перед новичками по высоте, окружены ими и не имеют возможности оторваться. Это объяснялось, по-видимому, тем, что в то время, как чемпионы входили в турбулентную зону, новички оказывались в области более сильного восходящего потока, хотя первоначально они находились ниже, даже вообще под термиком.

Тогда было выдвинуто предположение, что термики имеют тенденцию образовываться сериями и подниматься один за другим, так что новички, находясь ниже, попадали на вершину следующего термика той же серии. А так как термик, вообще говоря, связан с подъемом теплой массы воздуха, то было сделано второе предположение о том, что измерения температуры могут обнаружить вертикальные потоки, поскольку вертикальные скорости должны хорошо коррелировать с разностью температур между слоями. После этого некоторые планеристы, установив на концах крыльев чувствительные термометры, по разности температур пытались найти восходящие потоки, направляя планеры к более теплым воздушным массам. Но их ждало разочарование, ибо существенной разницы в скорости восходящих потоков они не могли обнаружить, хотя продолжали верить, что сильный восходящий поток и повышенная температура связаны друг с другом.

На самом деле в термике наиболее интенсивно поднимающаяся воздушная масса имеет температуру, даже намного более низкую, чем окружающий воздух, так как среда, в которой находятся термики, в той или иной степени устойчиво стратифицирована (см. разд. 9.4). Следовательно, самой низкой темпера-

турой будут обладать те воздушные массы, которые поднялись на наибольшую высоту как перед фронтом термика, так и за счет прокачки сквозь его центр.

Весь опыт, накопленный планеристами, за исключением тех, кто летал на небольших высотах, свидетельствует о правильности той модели термика, которая была получена из лабораторных экспериментов. В связи с этим теперь весьма забавными выглядят объяснения планеристов по поводу причин прекращения подъема в термике: они-то были убеждены, что сделали все возможное, чтобы продержаться в термике как можно дольше, но... вываливались через его «дно», тогда как на самом деле они поднялись сквозь термик и достигли его верхней турбулизованной зоны.

Капитан Н. Гудхарт (1958) установил очень важный факт, что в зоне, где проявляется действие воздушных потоков, вовлекаемых в термик (и где горизонтальная скорость одинакова по величине со скоростью восходящего потока), аппараты, планирующие с углом крена  $45^\circ$ , эффективно используют для парения как горизонтальный, так и вертикальный потоки. Соответственно верхнюю турбулентную часть термика, в которой происходит растекание воздушных масс от оси, планерист должен рассматривать, как зону нисходящих токов, опустившись в которых, он достаточно легко вновь обнаружит осевую восходящую струю, так как под термиком воздушные массы со всех сторон втягиваются в него. Очевидно, находясь в верхней половине термика, отыскать осевой восходящий поток значительно труднее, несмотря на то, что его скорость такая же, как и вниз.

Поэтому планеристу легче обнаружить термик, если он подлетает к нему снизу. Выполняя при этом виражи в восходящем потоке, пилот чувствует, что подъем усиливается за счет влияния втягивающихся в термик потоков. И наоборот, выполняя вираж в верхней части термика, пилот чувствует ослабление подъема из-за растекания воздушных масс. Скорость восходящего потока на оси термика, используемого планеристами, примерно в 2,2 раза выше скорости подъема самого термика. Когда пилот почувствовал, что воздушный поток, в котором он парит, стал турбулентным, самое время поискать другой термик, так как теперь планер сможет продолжать подъем лишь со скоростью, составляющей менее половины скорости на оси. В то же время планер, парящий под тем же термиком, в состоянии использовать его с большим успехом.

Ознакомившись с картиной поля скоростей в термике, следует четко представить себе, что планер в верхней, турбулентной части термика может лишь кратковременно использовать осевое восходящее течение, хотя его скорость почти в два раза превосходит скорость подъема верхней кромки термика, так как

оно быстро затухает по мере приближения к вершине. На рис. 8.3.1 указаны средние значения скорости восходящего потока с учетом его флюктуаций.

Если бы все термики укладывались в рамки данной модели, они были бы очень небольшими, но весьма интенсивными вблизи земли и обладали бы скоростью, уменьшающейся обратно пропорционально высоте подъема. Однако различные отклонения от модели наблюдаются как вблизи земли, где зарождаются термики, так и на больших высотах, где они зачастую перекрываются, так как сильно увеличиваются в размерах. Эти вопросы обсуждаются ниже в разд. 9.3.

Использование термиков птицами и насекомыми обсуждается в разд. 12.2—12.4 и 12.6.

## 8.6. Клубы газа

Клуб представляет собой турбулентную массу газа, инжектированную в прежде не возмущенную среду. Вихревое кольцо — не клуб, поскольку оно не турбулентно. Предполагая, что существует единственная конфигурация клуба и что суммарный импульс остается постоянным, получим следующие соотношения между его скоростью перемещения  $w$ , размером  $R$  и пройденным расстоянием  $z$ :

$$w m R^3 = \text{const} = w_0 m R_0^3, \quad (8.6.1)$$

$$\frac{dR}{dt} \sim w = \frac{dz}{dt}. \quad (8.6.2)$$

Из этого следует

$$z = nR, \quad (8.6.3)$$

$$\frac{w}{w_0} = \frac{R_0^3}{R^3} \quad (8.6.4)$$

и

$$z_A = 4w_0 R_0^3 n^3 t. \quad (8.6.5)$$

Индекс 0 обозначает величины, отнесенные к определенному моменту времени,  $mR^3$  — объем, а  $n$  — константа (по крайней мере, для каждого клуба), характеризующая угол расширения. Результаты изложенных выше рассуждений представлены здесь в сжатой форме, поскольку нам уже известны следствия соответствующих предположений относительно свойств термиков. Имеются также соображения размерности, неявно скрытые



в уравнении (8.6.1), которое включает предположение о несущественности влияния вязкости.

Циркуляция пропорциональна произведению  $\omega R$ , которое, следовательно, пропорционально  $z^{-2}$ . Поэтому циркуляция, а значит, и число Рейнольдса, уменьшаются обратно пропорционально  $t^{1/2}$ . Это в свою очередь означает, что вскоре после рассматриваемого момента силы вязкости станут весьма существенными, а течение в основном ламинарным.

Существуют две другие важные особенности клубов, о которых нужно упомянуть. Ричардс (1965) измерял распределение скоростей внутри и вне клубов, полученных в лабораторных условиях в воде, и нашел, что оно такое же, как и в термиках, в пределах той точности измерений, которая возможна и имеет смысл в данной ситуации. Даже внешне клуб очень похож на термик: на его фронте, как и у термика, существует область смещения. В наиболее типичных случаях значения параметров составляют  $m = 3$  и  $n = 4$ , но изменяются в пределах от 1,7 до 6,3, что весьма похоже на случай термиков. Картина движения, следовательно, не очень существенно зависит от того, каким образом это движение реализуется, поскольку для термика эта картина выглядит так же, как и для клуба, невзирая на то, что термик меньше замедляется, так как плавучесть постоянно дает приращение импульсу.

Второй особенностью клубов является то, что их трудно моделировать в лабораторных условиях, поскольку с помощью круглого отверстия легче получить вихревое кольцо. На краю отверстия происходит отрыв течения, и вихревая пелена срывается с него. Если эта вихревая пелена имеет форму воротничка, то она быстро сворачивается в вихревое кольцо, в особенности если высота «воротничка» мала по сравнению с радиусом кольца. Ричардс выпускал столбик жидкости, длина которого была больше ширины используемого прямоугольного отверстия, и, таким образом, обеспечивал турбулентность течения. Возможны и другие конфигурации, но нужно учитывать два соображения. Во-первых, необходимо некоторое расстояние, на котором может сформироваться модельный клуб, во-вторых, движение вскоре становится ламинарным из-за быстрого уменьшения числа Рейнольдса. Хорошие клубы получаются при стрельбе из орудий.

## 8.7. Всплывающие клубы

Предположив, что конфигурация термиков и клубов одна и та же, мы можем ожидать, что клуб, обладающий плавучестью, в должное время станет термиком, если первоначальный

импульс направлен вертикально, поскольку изменения формы не требуется. В этом случае импульс записывается в форме

$$k\omega mR^3 = k\omega_0 mR_0^3 + gB_0 mR_0^3 t, \quad (8.7.1)$$

где  $k$  — размерный коэффициент, дающий импульс при умножении на произведение скорости и объема. Используя (8.6.2), мы, следовательно, получим выражение

$$z^4 = 4n^3 R_0^3 \left( \omega_0 t + \frac{1}{2k} g B_0 t^2 \right), \quad (8.7.2)$$

которое для малых  $t$  похоже на (8.6.5), а для больших  $t$  — на (8.2.11). Циркуляция и число Рейнольдса пропорциональны величине  $\omega R$ , зависимость которой от времени имеет вид

$$\omega R = \frac{n^{1/2} R_0^{3/2}}{2} \frac{\omega_0 + (gB_0 t/k)}{[\omega_0 t + 1/2 (gB_0 t^2/k)]^{1/2}}. \quad (8.7.3)$$

Это выражение убывает при малых  $t$  как  $t^{-1/2}$  и стремится к пределу, равному  $n^{1/2} R_0^{3/2} g^{1/2} B_0^{1/2} / (8k)^{1/2}$ , при больших  $t$ .

Всплывающие клубы, выпущенные под углом к вертикали, рассматриваются в работах Ричардса (1968, 1970).

## 8.8. Двумерные термики и клубы

Тот же подход пригоден для изучения двумерных случаев. Двумерный термик может быть получен в лаборатории при помощи цилиндрической кюветы, смонтированной на горизонтальной оси. В кювету налита всплывающая или тяжелая жидкость, которая быстро опрокидывается в нейтральную среду. Из опыта найдено, что лучше иметь либо кюветы со щелью, либо две параллельные, которые сливают жидкость навстречу друг другу, чтобы не сообщить ей искажающего бокового импульса. Для осесимметрических термиков, используя приведенную длину, получаем

$$z = nR \quad (8.8.1)$$

и

$$\omega = C (gBR)^{1/2} \quad (8.8.2)$$

при условии сохранения плавучести

$$BR^2 = B_0 R_0^2. \quad (8.8.3)$$

Это ведет к

$$\frac{dz}{dt} = C (ngB_0 R_0^2 / z)^{1/2}$$

или

$$z^{3/2} = 3/2 C (ngB_0 R_0^2)^{1/2} t, \quad (8.8.4)$$

и так как

$$\omega \sim z^{-1/2}, \quad (8.8.5)$$

то циркуляция и число Рейнольдса пропорциональны величине

$$\omega z \sim z^{1/2} \sim t^{1/2}. \quad (8.8.6)$$

Этот параметр возрастает с расстоянием и временем; следовательно, двумерные термики остаются и далее турбулентными или становятся таковыми, если сначала они еще не были полностью турбулизированы.

Общее строение двумерных термиков очень похоже в сечении на строение осесимметричных термиков и клубов, за исключением того, что угол их расширения больше, а параметр  $n$  равен 2. В то же время у двумерных термиков отсутствует полный переход во фронтальную область жидкости, захваченной извне тыловой частью, поскольку иначе силы плавучести, действующие вдоль оси симметрии и увеличивающие циркуляцию в соответствии с (8.8.6), могут не проявиться. Ричардс нашел, что для двумерных термиков  $n$  может находиться в интервале от 1,3 до 3,2, тогда как для плавящихся двумерных клубов величина  $n$  меняется в пределах между 2,6 и 5,7 при типичных значениях, соответственно равных приблизительно 2 и 4.

Рис. 8.4.1 показывает двумерный термик и картину его развития, которая визуализована за счет большой временной экспозиции при съемке светящихся частиц в подсвеченном сечении. Двумерный клуб удовлетворяет соотношениям

$$z = nR \quad (8.8.7)$$

и

$$\omega R^2 = \omega_0 R_0^2, \quad (8.8.8)$$

в соответствии с которыми получаем выражения

$$z^3 = 3n^2 \omega_0 R_0^2 t \quad (8.8.9)$$

и

$$\omega R = n \omega_0 R_0^2 z^{-1} \sim t^{-1/2}, \quad (8.8.10)$$

показывающие, что в данном случае число Рейнольдса тоже уменьшается, хотя и медленно, чем в случае осесимметричного клуба.

Для двумерного всплывающего клуба уравнением, аналогичным (8.7.1), будет

$$k \omega m R^2 = k \omega_0 m R_0^2 + g B_0 m R_0^2 t, \quad (8.8.11)$$

из которого следует

$$z^3 = 3nR_0^2 \omega t + \frac{1}{2} \frac{gB_0}{k} t^2, \quad (8.8.12)$$

а вычисление числа Рейнольдса дает значения сначала убывающие, а затем возрастающие до бесконечности.

Без специального эксперимента нельзя с уверенностью заключить, что термик, первоначально появившийся в виде клуба, медленно развивающегося до ламинарного режима при малом числе Рейнольдса, обязательно станет снова турбулентным. Во всяком случае, это произойдет после того, как термик станет достаточно большим и число Рейнольдса для вихрей также станет большим.

## 8.9. Напорные струи

Теперь, когда мы уже выработали определенный стиль анализа, можно быстро рассмотреть различные случаи постоянных источников импульса или плавучести.

Осесимметричная напорная струя, проникающая в покоящуюся жидкость той же плотности, как легко установить, приобретает коническую форму. Это неизбежно, если единственными параметрами, определяющими движение, являются поток количества движения и расстояние от отверстия. На достаточном удалении от отверстия развившаяся турбулентность, во-первых, стирает всякое влияние особенностей формы отверстия и профиля скоростей в нем и, во-вторых, интенсивность турбулентности может стать достаточно большой для того, чтобы пренебречь вязкостью. Если эти два условия выполнены, то можно сделать вывод, что ширина струи  $R$  должна быть пропорциональна расстоянию от эффективного источника и что характерный для движения масштаб вихря в любой точке струи также пропорционален этому расстоянию. Следовательно,

$$z = nR. \quad (8.9.1)$$

Поэтому же профиль безразмерных скоростей во всех сечениях струи одинаков. Если жидкость, вытекающая из отверстия, каким-либо образом помечена (рис. 8.9.1), то конус, радиус которого мы обозначим  $R$ , будет представлять собой границу, которую меченая жидкость не может преодолеть. Вне этого конуса движение безвихревое, даже если вблизи конуса оно выглядит нестационарным. Внутри конуса картины основного течения и флуктуаций подобны во всех поперечных сечениях, что является следствием определенной простоты ситуации, в которой не наблюдается какое-либо влияние сжимаемости. Следовательно, настоящее рассмотрение неприменимо для сверхзвуковых струй.

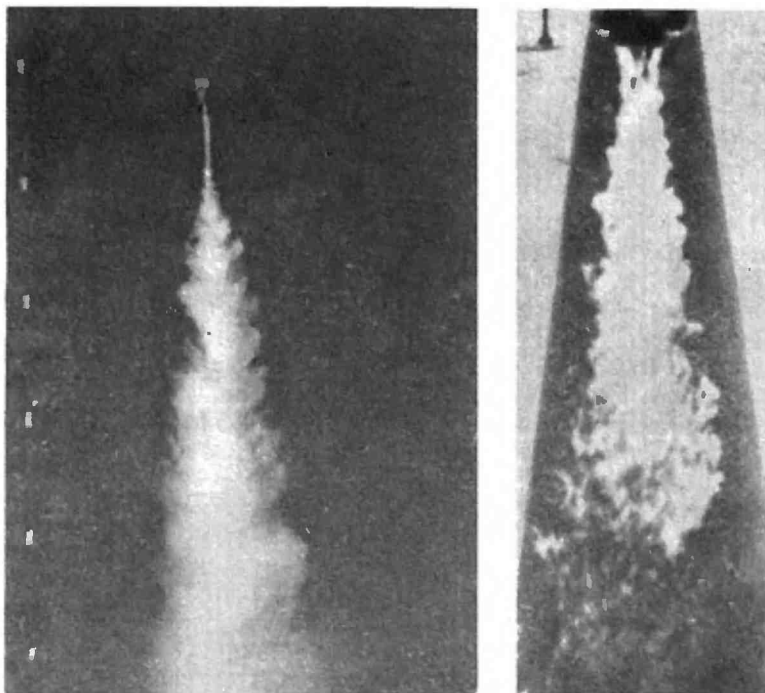


Рис. 8.9.1. Всплывающая жидкость, выпускаемая через конический насадок в невозмущенную воду в баке.

Примечательны особенности, на которые есть ссылки в разд. 8.9-8.13:

- 1) некоторое сужение струи жидкости, когда она только что оторвалась от насадка, в соответствии с соотношениями (8.13.7);
- 2) начало неустойчивости, когда скорость достигает значения, определяемого уравнением (8.10.1) (константа уравнения дается в таблице в конце главы);
- 3) рост струи вдоль конуса с вихрями, пропорциональными ширине конуса;
- 4) форма вихрей, показывающая, что наиболее сильным является течение вверх вдоль оси симметрии.

Показанная справа напорная струя бесцветной жидкости, не имеющая плавучести, но обладающая при выпуске из отверстия большим количеством движения, внешне очень похожа на изображенную слева, за исключением того, что турбулентность начинается сразу вблизи насадка. В данном случае жидкостью была соленая вода, содержащая нерастворимый осадок  $BaSO_4$  и имеющая большую плотность, чем пресная вода в баке, но внешне это выглядит так же, как при движении вверх и наличии плавучести. Масштаб эксперимента помечен слева интервалами длиной 10 см. Фоном на снимке служит темный клин, а подсветка с обеих сторон помогает визуализировать струю. Этот теневой фотоснимок показывает участок сужения широкой струи, которая инжктирована со скоростью, меньшей, чем соответствующая ее плавучести.

Так как поток количества движения пропорционален квадрату скорости и площади поперечного сечения струи, то

$$\omega^2 z^2 = \omega_0^2 z_0^2 = \text{const}, \quad (8.9.2)$$

или

$$\omega \sim z^{-1}. \quad (8.9.3)$$

Число Рейнольдса равно

$$\frac{\omega R}{\nu} = \text{const}, \quad (8.9.4)$$

однако циркуляция (измеренная по направлению вверх вдоль оси, по радиусу от оси и назад к источнику через невозмущенную жидкость) является здесь бесполезным понятием, поскольку бесконечно возрастает как логарифм  $z$  при  $z$ , стремящемся к нулю. Постоянство числа Рейнольдса означает, что если папорная струя турбулентна вблизи отверстия, то она остается турбулентной и на бесконечности (в отличие от клуба).

Скорость подсоса внешней жидкости, обозначенная  $U$  у границы вертикальной струи на расстоянии  $R$  от ее оси, может считаться горизонтальной. Из соображений размерности она должна быть пропорциональна  $\omega$ , а следовательно,  $z^{-1}$  и  $R^{-1}$ . Это согласуется с непрерывностью потока импульса через поперечное сечение струи, поскольку его приращение равно 0 для смещения  $dz$  по направлению вдоль оси. Это согласуется также с уравнением неразрывности, поскольку приращение направленного вверх потока в объеме должно равняться горизонтальному потоку внутрь на участке толщиной  $dz$ . Следовательно (рис. 8.9.2), получаем

$$d(\omega R^2) \sim 2\pi R U dz. \quad (8.9.5)$$

Здесь мы используем знак пропорциональности, поскольку не определили точно, что именно за скорость представлена значением  $\omega$ .

Скорость течения с флуктуациями в разные моменты времени и в разных точках струи можно выразить в виде

$$\omega = \bar{\omega}(r, z) + \omega'(r, z, t), \quad (8.9.6)$$

где  $\bar{\omega}$  представляет собой усредненное по времени значение в точке. Скорость  $\bar{\omega}$  имеет характерный профиль для каждого значения  $z$ , определяемый функцией  $\omega_1(r)$ , так что

$$\bar{\omega} = \omega_1(r) z^{-1} \quad (8.9.7)$$

и

$$\omega' = \omega_1'(r) z^{-1} f(t). \quad (8.9.8)$$

Наблюдения показывают, что вертикальная скорость время от времени обращается в ноль в каждой точке струи, т. е.  $w'$  имеет тот же порядок величины, что и  $\bar{w}$ . Вследствие этого усредненный по времени поток импульса равен

$$\int_0^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \overline{w^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^R (\bar{w}^2 + \overline{w'^2} + 2\bar{w}w') dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R (\bar{w}^2 + \overline{w'^2}) dr =$$

$$= \dot{M}_m + \dot{M}_f, \tag{8.9.9}$$

где  $\theta$  — азимут в плоскости  $z = \text{const}$ , а  $\dot{M}_m$  и  $\dot{M}_f$  — потоки им-

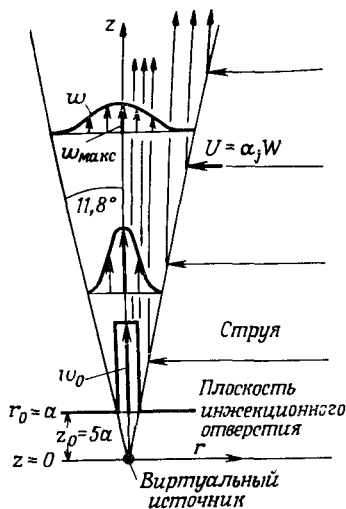


Рис. 8.9.2. Параметры, используемые для описания напорной струи.

В плоскости инжекционного отверстия скорость имеет равномерное распределение, которое скоро становится колоколообразным и хорошо представляется гауссоидой или косинусоидой. В правой части струи показаны усредненные линии тока. Виртуальный источник в вершине описывающего конуса находится ниже отверстия на расстоянии  $\sim 5$  радиусов отверстия.

пульса, относящиеся соответственно к среднему и пульсационному движениям. Предполагается, что временное осреднение производится за период, достаточно большой для того, чтобы все средние были независимы от  $\theta$ , так что  $\overline{w'} = 0$ . Так как величина  $w$  того же порядка, что и  $\bar{w}$ , то выражение (8.9.9) сильно зависит от масштаба вихрей.

Если предполагается, что в напорной струе содержится какая-либо пассивная примесь с концентрацией  $\sigma$ , то ее поток постоянен вдоль струи и равен

$$w\sigma R^2 = \text{const}, \tag{8.9.10}$$

так что

$$\sigma \sim \omega \sim R^{-1} \sim z^{-1}. \quad (8.9.11)$$

Отсюда следует, что примеси рассеиваются таким же образом, как и импульс, однако без проведения соответствующих измерений нельзя быть уверенным в справедливости допущения об идентичности профилей  $\bar{\omega}$  и  $\sigma$ . Напротив, в случае клуба ясно, что  $\omega$  и  $\sigma$  коррелированы слабо, так как жидкость, обладающая максимальной скоростью на оси, не загрязнена. Предположение о том, что количество движения рассеивается таким же образом, как и любая другая субстанция, содержащаяся в жидкости (такая, например, как концентрация примеси), известно под названием *аналогии Рейнольдса*. Она оправдывается только в случае, когда зависимости импульса и концентрации от  $z$  подобны, и никоим образом не распространяется на корреляцию между  $\sigma'$  и  $\omega'$ . Если написать для  $\sigma$  уравнения, аналогичные (8.9.7) и (8.9.9), то выражение для потока примеси будет иметь вид

$$2\pi \int_0^R (\bar{\omega}\sigma + \bar{\omega}'\sigma') dr. \quad (8.9.12)$$

Второй член в этом выражении вносит меньший вклад в интеграл, нежели второй член в выражении (8.9.9), поскольку  $\omega'$  и  $\sigma'$  могут слабо коррелировать. С другой стороны, наблюдается, что  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\omega}$  имеют очень похожие профили (т. е. пропорциональны, в первом приближении, одной и той же функции  $r$ ).

Движение вне вертикальной напорной струи можно считать горизонтальным, если отверстие расположено в плоской горизонтальной стенке и не вносит каких-либо новых размерных факторов. В этом случае скорость по направлению к оси струи принимает значение

$$u = UR/r \quad (8.9.13)$$

для всех  $z$  при  $r > R$ . Отсюда следует, что может существовать определенное поле давлений, вызывающее такое движение: в этом случае изобарические поверхности являются цилиндрическими. Внутри струи осредненные по времени линии тока выглядят примерно так, как показано на рис. 8.9.2; они были определены рядом ученых, начиная со Шмидта (Шмидт, 1941), впервые проводившего исследования такого рода.

Форма линий тока в случае, когда отверстие не находится в жесткой плоскости, способной поддерживать такое распределение давлений, еще не рассматривалась. Проведенное рассмотрение применимо и в случае истечения струи из отверстия в конце длинной трубы бесконечно малого диаметра. Любые



другие конфигурации, такие, как отверстие в вершине конуса или в конце трубы на конечном расстоянии от плоской границы, потребуют введения дополнительных безразмерных параметров, которые нарушают простоту проведенного рассмотрения. Как бы то ни было, на практике оно не может быть корректным для случая течения из насадка на конце длинной трубы, поскольку поле давлений за насадком не такое, как перед ним, из-за вовлечения жидкости в струю, так что внешнее течение не будет плоским.

Величина  $n$  в выражении (8.9.1) практически равна 5. Она не может меняться от случая к случаю, как это имеет место для изолированных термиком и клубов, поскольку стационарная струя сама по себе усреднена за значительный период времени, так что значение  $n$  получается единственным. Следовательно, теоретически все напорные струи подобны, и кинофильм, снятый об одной из них, может представить любую другую при соответствующем изменении, если это потребуется, масштаба и скорости демонстрации. Движение вне струи в случае, когда имеется плоская стенка, будет таким же, как для равномерного распределения стоков вдоль оси, т. е. для линейного стока. Следовательно, разумно предположить, что движение вне струи в отсутствие стенки будет приближенно таким же, как в случае полубесконечного линейного стока. В точках, близких к границе струи, отличие от случая бесконечного линейного стока тоже не очень велико из-за малого угла расширения струи.

*Двумерная напорная струя* образуется линейным источником количества движения. Из постоянства потока импульса следует

$$\omega^2 z = \text{const}, \quad (8.9.14)$$

так что

$$\omega \sim z^{-1/2} \sim R^{-1/2}. \quad (8.9.15)$$

Поскольку число Рейнольдса пропорционально  $\omega z$ , оно возрастает вдоль по струе пропорционально  $z^{1/2}$ , так что струя всегда турбулизуется по достижении определенной точки. Здесь, однако, существует некоторое затруднение, так как скорость вовлечения жидкости в струю убывает вдоль оси как  $z^{-1/2}$ , а это означает, что одно и то же значение горизонтального градиента давления на всех расстояниях  $z$  неспособно вызвать подобное компенсационное течение. Так как течение двумерно, то горизонтальное ускорение, направленное к струе, отсутствует, если течение вне струи строго горизонтально. Следовательно, такое горизонтальное течение вне струи является одним из теоретически возможных вариантов, хотя оно вихревое и, следовательно, не может быть порождено струей, инжесктированной

в покоящуюся жидкость. На практике вне струи, вероятно, существует некоторое нисходящее компенсационное течение, поскольку конечность времени существования струи препятствует установлению теоретически возможного асимптотического состояния, когда градиенты давления отсутствуют.

*Развивающаяся струя* (рис. 8.9.3), которую иногда называют *неустановившейся* или *свежей струей*, поддается довольно простому анализу. Она состоит из головной части, которая выглядит как фронтальная область развивающегося клуба, и следующей за ней конической части, которая подобна установившейся напорной струе. Количественное подобие тоже сохраняется, так что общий объем пропорционален  $z^3$ . Суммарный импульс, направленный вдоль струи, пропорционален времени, прошедшему от момента выпуска струи, и так как все скорости пропорциональны между собой, то скорость распространения головной части струи может быть представлена следующим образом:

$$wz^3 \sim t \quad (8.9.16)$$

и

$$w = \frac{dz}{dt}, \quad (8.9.17)$$

так что

$$z^2 \sim t. \quad (8.9.18)$$

Это соотношение, так же, как и приведенное ниже (8.10.10), было получено Спэкманом (1964). Число Рейнольдса и циркуляция, измеренная вдоль контура MNPQM на рис. 8.9.4, постоянны, поскольку

$$w \sim z^{-1}, \quad (8.9.19)$$

как и в стационарной струе. Поведение головной сферической части все-таки больше напоминает поведение термика, чем клуба, поскольку количество движения в ней постоянно подпитывается последующими порциями жидкости и сохраняется неизменным. Иначе ее движение замедлялось бы в соответствии с (8.6.5).

Если источник непрерывный, то на фиксированном расстоянии от него после прохождения головной части развивающаяся струя ведет себя как обычная стационарная струя; если же источник прекращает действовать, то жидкость начинает распространяться подобно клубу.

Спэкман нашел для развивающейся струи следующие значения параметров: угол расширения  $\theta = 11,8^\circ \pm 0,3^\circ$ , среднее значение  $n = 4,76$ . Используя измерения Рикоу и Сполдинга (1961),

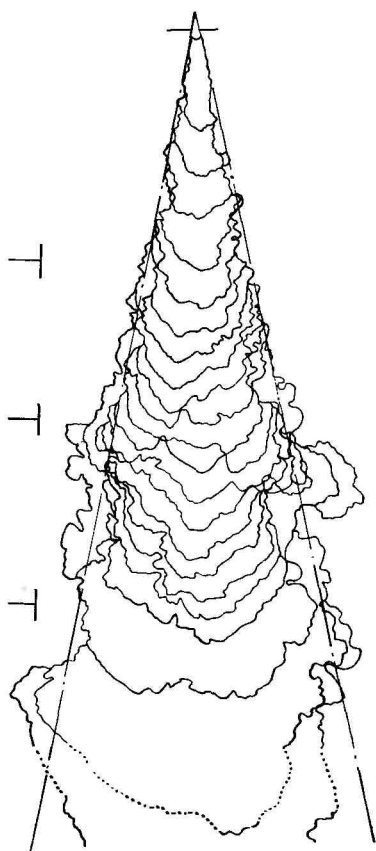


Рис. 8.9.3. Последовательные положения границы развивающейся напорной струи.

На фотоснимках показаны промежуточные и последнее положения струи. Случайные протуберанцы на ранних стадиях выходили за пределы описываемого конуса, но с уходом вперед головной части струи вовлекались обратно внутрь конуса.

он нашел также, что  $\dot{M}_f/\dot{M}_m = 0,74$ , где  $\dot{M}_f/\dot{M}_m$  — отношение потоков количества движения пульсационного и среднего течений. Для развивающейся струи Спэкман определил коэффициент пропорциональности в выражении (8.9.18), а именно

$$z_c^4 = 180 \frac{\dot{M}}{\rho} t^2, \quad (8.9.20)$$

где  $\dot{M}$  — поток импульса через отверстие. Коэффициенты формы

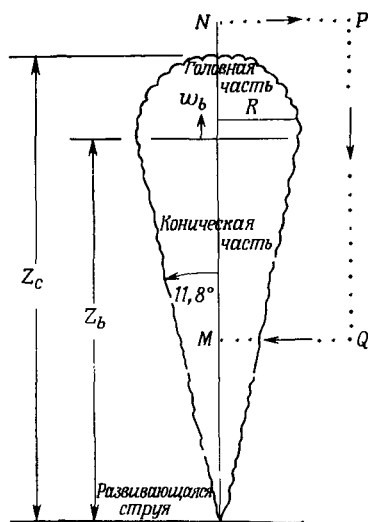


Рис. 8.9.4. Геометрия развивающейся напорной струи.

Контур MNPQM может быть использован для определения циркуляции системы (M — либо точка посередине между виртуальным источником и основанием головной части, либо точка, определенная каким-либо иным подходящим способом).

имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} z_c/z_b &= 1,3, & v_{\text{кон}} &= 0,012z_c^3, \\ dz_c/dt &= 2W_b, & v_{\text{г.ч}} &= 0,021z_c^3. \end{aligned} \quad (8.9.21)$$

Здесь  $V_{\text{кон}}$  и  $V_{\text{г.ч}}$  — объемы конуса и головной части струи соответственно.

Спэкман оценил также скорость вовлечения жидкости в головной части и обнаружил, что она меняется от максимума на оси до величины  $0,11W_b$  на периферии при средней величине скорости в головной части  $0,6W_b$ . Величина  $W_b$  — средняя скорость в сечении  $z = z_b$ , определяемая по уравнению (8.11.3). Несколько более четверти вовлекаемой в струю жидкости поступает через коническую поверхность. Пульсации скорости в безвихревом движении вне струи можно видеть на снимке, сделанном с большой экспозицией (рис. 8.9.5).

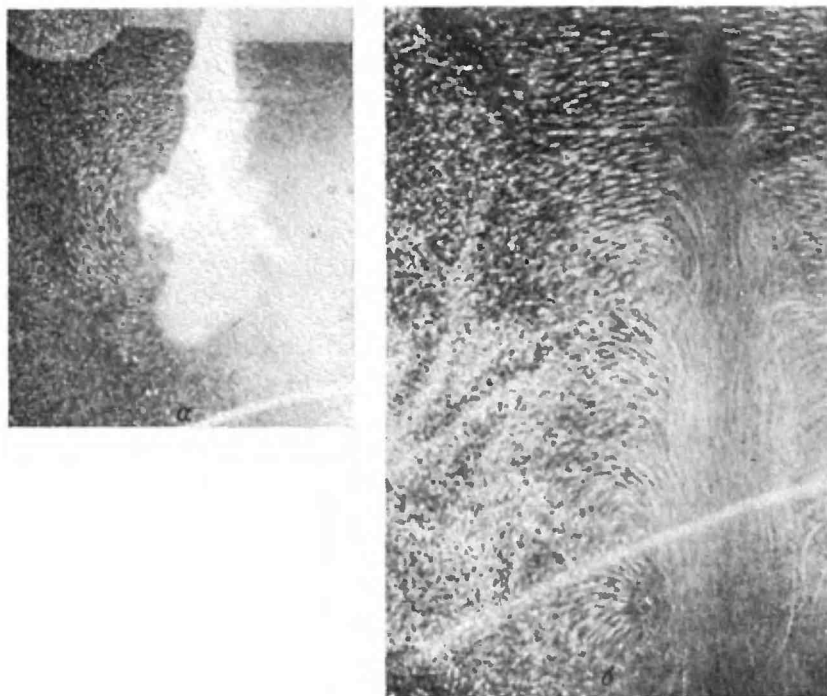


Рис. 8.9.5. Снимки развивающейся напорной струи (а) и факела (б), сделанные с большой выдержкой (Спэкман, 1964).

а — ориентация частиц, взвешенных в воде, характеризует векторы скорости. Видны искажения поля скоростей вокруг больших протуберанцев и вынос жидкости вперед из головной части.

б — подсветка частиц в плоскости движения выявляет картину течения. Наблюдается большая скорость в ядре струи и возмущение окружающей среды большими вихрями.

## 8.10. Факелы

Течение, порождаемое постоянным источником всплывающей жидкости, обычно называется *факелом*, а понятие *напорная струя* используется для обозначения течения с начальной скоростью в источнике в отсутствие плавучести. Осесимметричный факел имеет постоянный поток всплывающей массы или концентрации примеси, обозначаемый  $B$ , в направлении вдоль оси, а возрастание потока количества движения при подъеме на высоту  $dz$  равно подъемной силе, действующей на слой толщины  $dz$ . Следовательно (рис. 8.10.1),

$$\omega BR^2 = \text{const} \quad (8.10.1)$$

и

$$d(\omega^2 R^2) \sim BR^2 dz. \quad (8.10.2)$$

Так как по тем же соображениям, что и выше,  $R \sim z$ , из этих уравнений получается

$$\omega \sim z^{-1/3}, \quad (8.10.3)$$

$$B \sim z^{-5/3}. \quad (8.10.4)$$

Следовательно, как это видно из сравнения с (8.9.11), факел замедляется с меньшей скоростью, чем напорная струя, вследствие постоянного воздействия подъемной силы, а разбавляется быстрее вследствие дополнительного перемешивания, вызванного градиентами плотности. Так как скорость не пропорциональна  $R^{-1}$ , то приток жидкости извне будет различным на разных высотах при заданном расстоянии от оси и, следовательно, компенсационное течение не будет строго горизонтальным.

Наиболее многочисленные эксперименты, проведенные на газовых струях и подтверждающие соотношения (8.10.3) и (8.10.4),

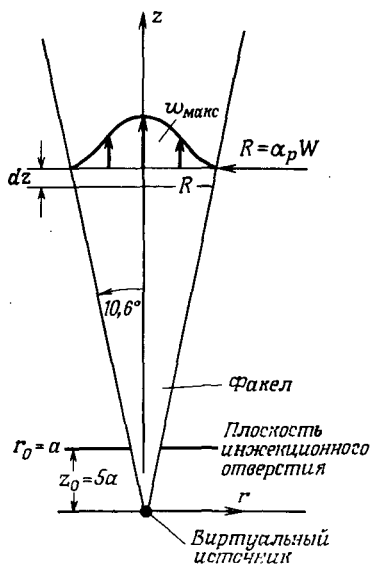


Рис. 8.10.1. Геометрия и параметры факела.

были проведены Роузом, Йи и Хэмфрисом (1952). Невозможно представить факел как ламинарное течение, поскольку он существенно неустойчив, так как число Рейнольдса, будучи пропорциональным  $\omega z$ , т. е. в данном случае  $z^{2/3}$ , быстро возрастает в факеле с увеличением высоты над источником. Рассуждение, однако, оказывается незавершенным, поскольку оно лишь предполагает, что снизу в струе существует ламинарная область, выше которой струя турбулентна, так как с убыванием высоты число Рейнольдса убывает. Этот вопрос обсуждается в дальнейшем в разд. 8.12. Конкретные наблюдения подтверждают вывод о том, что факел всегда становится турбулентным.

Двумерный факел порождается горизонтальным линейным источником всплывающей жидкости. Его описывают следующие

уравнения, аналогичные (8.10.1) и (8.10.2):

$$\omega BR = \text{const} \quad (8.10.5)$$

и

$$d(\omega^2 R) \sim BR dz, \quad (8.10.6)$$

откуда при  $R \sim z$  следует

$$\omega = \text{const} \quad (8.10.7)$$

и

$$B \sim z^{-1}. \quad (8.10.8)$$

Уравнение (8.10.7) означает, что максимальные, средние и характерные для отдельных вихрей скорости одни и те же на всех высотах, хотя профиль их, имеющий одну и ту же математическую форму, расширяется пропорционально высоте. Скорость вовлечения жидкости в факел также одна и та же на всех высотах. Так как это не соответствует течению, которое создавало бы поле давлений пад всплывающей жидкостью, то компенсационный поток не может быть строго горизонтальным, если только вертикальное ускорение в струе не будет давать точно такой же эффект, что и поле давлений.

Если скорость притока жидкости к оси равна  $u$ , а факел (речь идет, например, о струе дыма в атмосфере) поднимается при боковом ветре  $u_0$ , то, вообще говоря, можно было бы заключить, что дымовая струя будет просто смещаться в сторону в процессе подъема, так что ее ось расположится на прямой, наклоненной под углом к вертикали с тангенсом, равным  $u_0/\omega$ , а скорости притока воздуха к оси равны  $u + u_0$  и  $u - u_0$  по разные стороны от струи. Эта идея слишком примитивна в том смысле, что на самом деле в факеле не существует единственной вертикальной скорости  $\omega$ , которая определяла бы такой постоянный угол наклона. Более того, ось струи имеет переменный наклон по отношению к направлению силы тяжести соответственно изменению поля давлений с высотой. Когда боковой ветер  $u_0$  превосходит скорость притока  $u$ , компенсирующий поток воздуха с подветренной стороны струи прекращается и струя прижимается к земле. Эта идея весьма плодотворно использовалась в FIDO-системе для удаления тумана со взлетных полос аэродромов при отсутствии ветра. В FIDO-системе линейные источники тепла в виде парафиновых горелок устанавливались по обе стороны взлетной полосы; при этом каждый линейный источник тепла порождал компенсирующий поток воздуха со скоростью  $u$ , направленный против соответствующего потока для другого источника. В результате эти источники втягивали весь воздух, находящийся в пространстве между ними, и, быстро сливаясь, образовывали как бы единый виртуальный источник, находящийся

посередине между двумя этими реальными источниками примерно на той же высоте (рис. 8.10.2). При этом над полосой возникает область нагретого воздуха, в которой туман испаряется, и создаются условия нормальной видимости для посадки самолета. Во всех подобных случаях картина течения одинакова; однако для испарения тумана из вовлеченного воздуха необходимо значительное количество тепла.

Двумерный факел сильно турбулизован, так как число Рейнольдса пропорционально  $z$  и быстро возрастает с высотой.

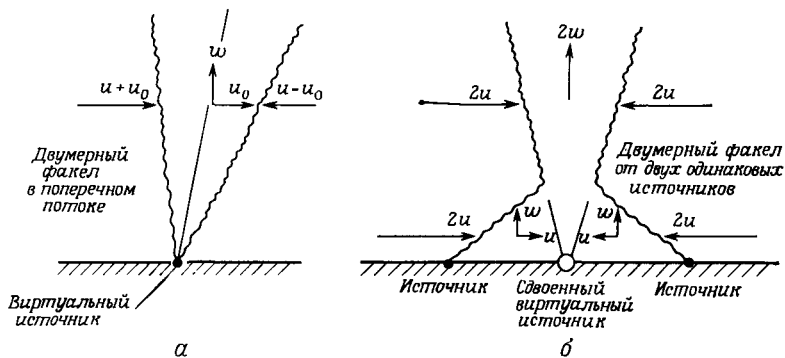


Рис. 8.10.2. Двумерный факел в поперечном смещающем потоке, имеющем скорость  $u_0$ .

Показано сложение этой скорости со скоростью вовлечения жидкости  $u$ , которая одна и та же на всех высотах. Два параллельных линейных источника тепла (плавучести) образуют единую струю взаимным вовлечением: они образуют над землей между собой область нагретого воздуха, над которой факел поднимается как бы из расположенного посредине виртуального источника удвоенной интенсивности.

*Развивающийся осесимметричный факел* похож на развивающуюся напорную струю, но имеет суммарную величину количества восходящего движения, пропорциональную общей подъемной силе всей выделившейся нагретой массы. Следовательно, при коэффициенте плавучести  $B$  и постоянной интенсивности источника, начавшего действовать при  $t = 0$ ,

$$\frac{d}{dt} (\omega R^3) \sim gBR^3 \sim t, \quad (8.10.9)$$

или

$$gBmR^3 = Ft,$$

где  $mR^3$  представляет собой объем, а  $F$  есть поток архимедовой силы через выходное отверстие в источнике. Так как  $w = dz/dt$  и  $R \sim z_c$ , должны иметь место соотношения

$$z_c \sim t^{3/4}, \quad (8.10.10)$$

$$\omega \sim z_c^{-1/3} \sim t^{-1/4}. \quad (8.10.11)$$



и

$$B \sim z_c^{-5/3}. \quad (8.10.12)$$

Закон рассеяния плавучести, примесей и импульса получается тот же, что и для осесимметричного стационарного факела. Но здесь  $z_c$  — максимальная высота, а  $\omega$  и  $B$  — характерные параметры развивающегося факела. Подобно термику, головная часть факела подпитывается рассеивающейся субстанцией (силой плавучести или импульсом) снизу и замедляется не так быстро, как термик, для которого  $\omega \sim z^{-1} \sim t^{-1/2}$ ,  $B \sim z^{-3}$ . Число Рейнольдса возрастает как  $z^{2/3}$ , так что факел должен стать турбулентным.

*Двумерный развивающийся факел* описывается подобными же соотношениями, которые в данном случае принимают вид

$$\frac{d}{dt}(\omega R^2) \sim gBR^2 \sim t, \quad (8.10.13)$$

что приводит к

$$z_c \sim t, \quad (8.10.14)$$

$$\omega = \text{const} \quad (8.10.15)$$

и

$$B \sim z^{-1}. \quad (8.10.16)$$

Налицо, как и ожидалось, сходство с (8.10.7) и (8.10.8).

Отметим, что для любой системы, движущейся за счет архимедовых сил, можно написать соотношение

$$\omega \sim (gBR)^{1/2} \quad (8.10.17)$$

как альтернативу уравнению (8.10.15). Это вытекает из простых соображений размерности.

Спэкман получил для развивающегося осесимметричного факела (в обозначениях, определенных в конце разд. 8.9) следующие зависимости:

$$\theta = 10,4^\circ \pm 0,6^\circ,$$

$$z_c^4 = 39Ft^3.$$

Здесь  $F$  — поток плавучести через отверстие,

$$V_{г.ч} = 0,0084z_c^3, \quad v_{\text{кон}} = 0,017z_c^3, \quad m' = 0,0254,$$

где  $m'z_c^3$  — объем,  $z_c/z_b = 1,3$ ,  $dz_c/dt = 1,3W_b$ .

Он оценил также скорость вовлечения жидкости в факел и нашел, что через коническую поверхность факела поступает гораздо больше жидкости, чем через его головную часть.

Оказалось, что для головной части скорость вовлечения в среднем составила  $0,26W_b$ , что соответствует по величине скорости для верхней части конуса. Около 60 % вовлеченной жидкости попадает в струю через конус.

### 8.11. Всплывающие напорные струи

В осесимметричном факеле величина потока количества движения обусловлена определенным потоком сил плавучести. Если поток количества движения превышает эту величину, то система ведет себя, как напорная струя, т. е. ее количество движения убывает быстрее, а процессы разбавления идут медленнее, чем в факеле. Когда поток количества движения становится равным этой характерной величине, струя начинает вести себя как факел.

Мы хотим проанализировать именно ту область, в которой происходит такой переход. Поскольку теория размерностей приводит только к степенным зависимостям между величинами, часто предполагают, что такой тип соотношений является естественным. Наверно, поэтому многие исследователи, заранее предполагая степенной характер соотношений, проводят эксперименты лишь для того, чтобы определить показатель степени. Следует отметить, что анализ размерностей вполне справедлив, когда исследуемое явление столь же просто, как и рассмотренные нами выше случаи, для которых степенные соотношения действительно закономерны. Мы же сейчас должны так проанализировать эксперименты, чтобы выяснить все другие соотношения, в частности относящиеся к картине явления, профилям скорости и сил плавучести или концентрации примеси в горизонтальных сечениях, их величинам и корреляции между пульсациями этих величин.

Если  $w$  и  $b$  — мгновенные значения вертикальной скорости и сил плавучести, то осредненные по времени потоки количества движения и архимедовой силы описываются выражениями

$$mR^2W^2 = \int_0^{\infty} 2\pi r \bar{w}^2 dr = \int_0^{\infty} 2\pi r (\bar{w}^2 + \overline{w'^2}) dr \quad (8.11.1)$$

и

$$\frac{1}{g} \Phi = kR^2WB = \int_0^{\infty} 2\pi r \bar{w} \bar{b} dr = \int_0^{\infty} 2\pi r (\bar{w} \bar{b} - \overline{w'b'}) dr, \quad (8.11.2)$$

где горизонтальная черта обозначает усреднение по времени, а штрих — отклонение от среднего значения. Величина  $\Phi$  опре-

делена в (8.11.2),  $m$  и  $k$  — коэффициенты пропорциональности, которые должны быть измерены.  $R$  определено так же, как и в начале разд. 8.9, а именно как радиус, за пределы которого на данной высоте вещество всплывающей напорной струи не проникает.  $W$  и  $B$  — средняя скорость и сила плавучести соответственно, определенные таким образом, что поток скорости (количества движения при единичной плотности) равен  $\pi R^2 W$ , а суммарная сила плавучести в элементарном объеме толщиной  $dz$  равна  $gBR^2 dz$ . Средняя горизонтальная скорость вовлечения жидкости в струю на высоте  $z$  при радиусе  $R$  обозначена  $U$ , а коэффициент захвата  $\alpha$  определен соотношением

$$U = \alpha W. \quad (8.11.3)$$

Применительно к данному случаю уравнение неразрывности можно интерпретировать как равенство изменения вертикального потока через некоторый объем горизонтальному потоку в этот же объем. Следовательно,

$$\frac{d}{dz} (\pi R^2 W) = 2\pi R U = 2\pi \alpha R W. \quad (8.11.4)$$

Если подставить в это уравнение величины  $R$  и  $W$ , выраженные через  $z$ , которые для напорной струи имеют вид (8.9.1) и (8.9.2), то получим, используя (8.11.3), что для осесимметричной напорной струи

$$\alpha = \frac{1}{2n}. \quad (8.11.5)$$

С другой стороны, если мы используем (8.10.3) и (8.10.4), то для осесимметричного факела получим

$$\alpha = \frac{5}{6n}. \quad (8.11.6)$$

Параметры  $\alpha$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $k$  постоянны для каждого конкретного случая, и здесь едва ли стоит обсуждать их значения, так как вполне достаточно полученных общих зависимостей, характеризующих явление в целом.

Профили скоростей оказываются в большей или меньшей степени близки к распределению Гаусса. Естественно, эти профили не будут совпадать с гауссовскими при больших значениях  $r$ ,

где в случае осесимметричной напорной струи  $\bar{w} = 0$  при  $r > R$ . Одна волна косинусоиды (которая очень похожа на гауссиан, за исключением участков вблизи концов) является более точным приближением, но обычно предпочитают формулу Гаусса, поскольку она привычнее и ее удобнее использовать. Во всяком случае, профили, измеренные в факеле и напорной струе, достаточно

похожи друг на друга для того, чтобы предположить, что в уравнении (8.11.1)  $m$  принимает одно и то же значение для обоих видов струи. Значительно легче определить параметр  $n$  (поскольку  $n = z/R$ ). Оказывается, что в большей или меньшей степени этот параметр одинаков для обеих струй. Из (8.11.5) и (8.11.6) следует, что коэффициент захвата для факела в  $5/3$  раза больше, чем для напорной струи, и оказывается, что сила плавучести является прямой причиной увеличения вовлечения окружающих масс за счет возникновения завихренности. Этот вывод [см. (8.11.3)] вытекает из определения  $W$  согласно (8.11.1), и именно поэтому важно равенство  $m$  для обоих случаев. Иногда при рассуждениях основываются на предположении, что  $\alpha$  является своего рода универсальной константой, так как перемешивание обусловлено разностью скоростей напорной струи и окружающей среды, но при этом не отмечается, что всплывающие и напорные струи должны обладать различными значениями либо  $m$ , либо  $n$ .

Если допустить, что уравнение (8.11.2) применимо к описанию потока концентрации примеси  $b$  в напорной невсплывающей струе [выше отмечалось, что и плавучесть, и концентрация примеси рассеиваются одинаково, так что уравнение (8.11.2) может относиться к любой субстанции, диффундирующей в факеле], то, чтобы добиться определенного прогресса в теории всплывающей напорной струи, следует допустить универсальную применимость (8.11.2) при одном значении  $k$ . Пока не существует достаточно очевидных доказательств справедливости такого предположения, но его следствия представляют некоторый интерес.

Вертикальная производная потока количества движения равна силе плавучести, поэтому

$$\frac{d}{dz} (mW^2R^2) = gBR^2. \quad (8.11.7)$$

Значения параметров здесь подбираются соответствующим образом. Поток сил плавучести постоянен, так что

$$WgBR^2 = \frac{1}{k} \Phi = \text{const}. \quad (8.11.8)$$

Следовательно, уравнение (8.11.7) может быть преобразовано:

$$\frac{d}{dz} \left( mW^2 \frac{z^2}{n^2} \right) = \frac{\Phi}{kW} = \frac{\Phi z}{k(W^2 z^2)^{1/2}}. \quad (8.11.9)$$

Это уравнение имеет решение

$$3/2 (W^2 z^2)^{3/2} = \frac{n^2 \Phi}{km} 1/2 (z^2 + c^2), \quad (8.11.10)$$

где  $c^2$  — постоянная интегрирования. Преобразуя, получим

$$W^3 = C^3 \left( \frac{1}{z} + \frac{c^2}{z^3} \right), \quad (8.11.11)$$

где

$$C^3 = \frac{3n^2}{4km} \Phi. \quad (8.11.12)$$

Уравнения (8.11.3) и (8.11.4) дают  $\alpha$  в форме

$$\alpha = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{z^2 + 3c^2}{z^2 + c^2} \right). \quad (8.11.13)$$

Для той области, где струя еще остается напорной, т. е. при  $z \ll c$ , имеем

$$W = Cc^{2/3} z^{-1}, \quad \alpha = \frac{1}{2n}, \quad (8.11.14)$$

тогда как для области всплывающей струи, где  $z \gg c$ , получаем

$$W = Cz^{-1/3}, \quad \alpha = \frac{5}{6n}. \quad (8.11.15)$$

Архимедова сила может быть определена из (8.11.7); она равна

$$gB = \frac{n^2 \Phi}{kz (z^2 + c^2)^{1/3}}, \quad (8.11.16)$$

т. е. для стадий напорной и всплывающей струй пропорциональна  $z^{-1}$  и  $z^{-5/3}$  соответственно.

Эти формулы могут применяться непосредственно в случае, если импульс всплывающей напорной струи больше, чем у просто всплывающей струи данной плавучести; переход от всплывающей напорной струи к просто всплывающей струе имеет место примерно на высоте  $z = c$ .

Если напорная струя имеет отрицательную плавучесть, из (8.11.12) следует, что величина  $C^3$  отрицательна; это означает, что для того, чтобы величина  $W$  в выражении (8.11.11) была положительна, постоянная интегрирования, обозначенная выше как  $c^2$ , должна быть отрицательной и интервал высот  $z$ , до которых струя может подниматься, оказывается ограниченным. Если заменить  $c^2$  на  $-c'^2$ , то увидим, что скорость становится равной 0 при  $z = c'$ , после чего начинается опускание обратно к источнику, и формулы теряют физический смысл. Коэффициент захвата равен

$$\alpha = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{3c'^2 - z^2}{c'^2 - z^2} \right), \quad (8.11.17)$$

при  $z \ll c'$  он становится таким же, как и для напорной струи,

но уменьшается вместе с  $z$  и становится равным 0, когда  $z^2 = = \sqrt[3]{5}c'^2$ . Это формально выражает ту мысль, что перемешивание возрастает, когда плавучесть положительна, а когда она отрицательна, то перемешивание уменьшается до 0, прежде чем направленная вверх скорость станет равной 0. Модель становится бессмысленной в диапазоне высот между  $z = \sqrt[3]{5}c'$  и  $z = c'$ , поскольку рассеяние требует сохранения конической формы струи в то время, когда она замедляется.

Выше  $z = c'$  из модели формально следует, что там, где плавучесть больше, чем у факела с данной скоростью подъема, и вовлечение становится больше, чем у факела. Коэффициент захвата становится бесконечным при  $z = c'$ , где  $W = 0$ , поскольку модель требует, чтобы смещение происходило за счет плавучести, даже если скорость  $W$  относительно внешней среды становится равной нулю. Но этот вывод поставлен под вопрос в разд. 8.13 на основании того, что предположение  $R \sim z$  некорректно.

## 8.12. Подобие в стратифицированной среде

В случаях, рассматривавшихся до сих пор, оказывалось, что скорости изменения всех величин зависели только от локальных условий, т. е. от конкретных значений различных величин, определенных при некотором частном значении  $z$ . Иногда это подтверждалось хорошим согласием теории с наблюдениями, однако на самом деле теория подобия утверждает только, что локальные условия могут быть выражены определенным образом, хотя механизм рассматриваемых явлений таков, что движение сильно зависит от того, что происходит в слое выше и ниже данного, в той же степени, как и от того, что происходит на данном уровне.

Когда среда стратифицирована и описывается выражением

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (8.12.1)$$

в случае несжимаемой жидкости, уравнения потоков количества движения и сил плавучести в более общем случае, чем это охватывается соотношениями (8.11.7) и (8.11.8), имеют вид

$$m \frac{d}{dz} (W^2 R^2) = g B R^2 \quad (8.12.2)$$

и

$$k \frac{d}{dz} (W R^2 B) = -W R^2 \beta. \quad (8.12.3)$$

Последнее из этих уравнений выражает тот факт, что плавучесть уменьшается при перемещении вверх в стратифицированной среде. Преобразуя эти уравнения, получаем

$$\frac{dR}{dz} + \frac{R}{W} \frac{dW}{dz} = \frac{RgB}{2mW^2} = \frac{F}{2m} \quad (8.12.4)$$

и

$$\frac{dR}{dz} + \frac{-3R}{W} \frac{dW}{dz} = -\frac{R\beta}{kB} - \frac{R}{F} \frac{dF}{dz} = -\frac{S}{kF} - \frac{R}{F} \frac{dF}{dz}, \quad (8.12.5)$$

где

$$F = \frac{gBR}{W^2} \quad (8.12.6)$$

есть число Фруда, выражающее отношение сил плавучести и массовых сил, а

$$S = \frac{g\beta R^2}{W^2} \quad (8.12.7)$$

есть параметр устойчивости, представляющий собой отношение статической устойчивости и инерционных сил. Теперь получаем

$$\frac{dR}{dz} = \frac{1}{n} = \frac{3F}{4m} + \frac{R}{2F} \frac{dF}{dz} + \frac{S}{2kF}, \quad (8.12.8)$$

а из уравнения неразрывности в форме (8.11.4) определяем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dR}{dz} + \frac{R}{2W} \frac{dW}{dz} = \frac{5F}{8m} + \frac{R}{4F} \frac{dF}{dz} + \frac{S}{4kF} = \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{F}{4m}. \end{aligned} \quad (8.12.9)$$

Частный случай безразличной стратификации получается, если положить  $\beta$  и  $S$  равными 0. Если число Фруда в этом случае постоянно и не равно 0, то из (8.12.6) следует (8.10.17), так что  $1/n = 3F/4m$  и  $\alpha = 1/2n + 1/3n$  для факела. При  $F = 0$  легко получим  $\alpha = 1/2n$  для напорной струи. Если  $n$  постоянно при  $\beta = 0$ , то из (8.12.8) можно получить решение

$$F = \frac{4m}{3n} \frac{z^2}{z^2 + c^2}, \quad (8.12.10)$$

которое дает вариации  $F$  для случая разд. 8.11.

На практике факелы по форме слабо отличаются от конуса в стратифицированной среде (за исключением окрестности уровня, на котором они перестают подниматься), и предположение о постоянстве  $n$  представляется достаточно реалистичным. Чтобы продвинуться дальше в нашем анализе, предположим также, что  $m$  и  $k$  тоже постоянны. Это ведет к постоянству профилей средних и пульсационных скорости и плавучести.

Если сделать дополнительное предположение о том, что и  $S$  постоянно, то уравнение (8.12.8) переписывается в виде

$$-2n dz/z = dF \left( \frac{3F^2}{4m} - \frac{F}{n} + \frac{S}{2k} \right), \quad (8.12.11)$$

а интегрирование дает

$$F = \frac{2m}{3n} \left( \sigma + 1 - \frac{2\sigma c^{2\sigma}}{z^{2\sigma} + c^{2\sigma}} \right), \quad (8.12.12)$$

где

$$\sigma^2 = 1 - \frac{3n^2 S}{2mk}. \quad (8.12.13)$$

Предположение о постоянстве  $S$  приводит через (8.12.7) к появлению связи между  $W$  и  $\beta$  и представляется искусственным. Выражение (8.12.12) представляет  $B$  как функцию  $z$  через (8.12.6); (8.12.12) сводится к (8.12.10), когда  $\beta$ , а следовательно, и  $S$  равны 0 и  $\sigma = 1$ .

Величина  $W$  получается тогда интегрированием (8.12.4) в форме

$$W^3 = C^3 z^{-\sigma-2} (z^{2\sigma} + c^{2\sigma}). \quad (8.12.14)$$

Это выражение сводится к (8.11.7) при  $\sigma = 1$ .

Постоянная интегрирования  $C$  получается подстановкой в формулы (8.12.6) и (8.12.12) известных значений входящих туда величин, помеченных индексом 1, так что

$$\frac{gB_1 R_1}{W_1^2} = F_1 = \frac{2m}{3n} \left( \sigma + 1 - \frac{2\sigma c^{2\sigma}}{z_1^{2\sigma} + c^{2\sigma}} \right), \quad (8.12.15)$$

а  $C$  определяется из (8.12.4) в виде

$$C^3 = \frac{W_1^3 z_1^{\sigma+2}}{2\sigma c^{2\sigma}} \left[ \frac{2m}{3n} (\sigma + 1) - F_1 \right]. \quad (8.12.16)$$

Этот частный случай приведен, поскольку он позволяет получить полное решение; однако требование постоянства  $S$  весьма искусственно, хотя, конечно, оно не является совершенно невозможным в реальных условиях и может быть воспроизведено в лаборатории. В этом случае также имеет место подобие.

Еще более частный случай, когда  $F$  тоже постоянно, представляет собой факел, обладающий подобием в стратифицированной среде. Тогда при  $\sigma = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{gBR}{W^2} &= F = \frac{2m}{3n}, \\ \frac{g\beta R^2}{W^2} &= S = \frac{2mk}{3n^2} \end{aligned} \quad (8.12.17)$$



и

$$W^3 = C^3 z^{-2}$$

в качестве решения, которое возможно только при начальном условии  $c = 0$ .

Полученные решения, обладающие подобием, в действительности не основаны на предположении, что все определено при некотором значении  $z$ , но формально среда и начальные условия подбираются такими, чтобы это было так. С другой стороны, если мы делаем предположение (которое не подтверждено наблюдениями и явно неверно в случаях любого рода выбросов), что все определено только в локальном слое, так что вид распределений в поперечном сечении струи фиксирован, а  $k$  и  $m$  постоянны, то уравнения (8.12.2) и (8.12.3) могут быть объединены и дадут уравнение

$$\frac{d}{dz} \left[ W \frac{d}{dz} (W^2 z^2) \right] = -\frac{1}{mk} g \beta W z^2, \quad (8.12.18)$$

которое может быть проинтегрировано численными методами для нахождения  $W$  как функции  $z$ , если  $\beta$  задана как функция  $z$ . Тогда  $B$  получится из (8.12.2), а  $\alpha$  — из (8.12.9).

Предположения, которые требуются для приемлемости такого численного решения, таковы, что, вероятно, лучшее разъяснение даст сильно упрощенный подход, изложенный в гл. 10. Во всяком случае, кроме военной необходимости, трудно вообразить себе другую ситуацию, когда такое теоретическое рассмотрение было бы полезным до самих событий. Картина больших пожаров иллюстрирует процесс более красноречиво, чем любые предсказания.

Совсем недавно, однако, разработка металлосодержащих отходов со дна Красного моря потребовала суспензирования отходов для возвращения их в море; шлам плотнее морской воды, которая слабо стратифицирована, за исключением слоя вблизи дна, где соленость резко повышена. Приведенные формулы применимы в области слабой стратификации.

Частное решение (8.12.18) легко найти. Например, если

$$\beta = \frac{mk}{W} \sum_{\lambda} \frac{a_{\lambda}}{z^{\lambda}}, \quad (8.12.19)$$

то решение имеет вид

$$W^3 = \frac{3}{2} z^{-3} \left[ k_0 + \frac{1}{2} k_2 z^2 + \sum_{\lambda} \frac{a_{\lambda}}{(3-\lambda)(5-\lambda)} z^{5-\lambda} \right], \quad (8.12.20)$$

где  $k_0$  и  $k_2$  — константы интегрирования, связанные с наложенными условиями. Это более общее решение, чем то, в котором  $W^3$  зависит только от одной или двух степеней  $z$ , но его значение

для рассматриваемой задачи состоит только в том, что оно может быть использовано для описания конической свободной струи в стратифицированной среде при использовании всех необходимых предположений, указанных выше, поскольку стратификация  $\beta$  не может быть представлена независимо от  $W$ .

### 8.13. Ламинарные конвективные струи

В разд. 8.11 мы подробно обсудили случай факела с дополнительным начальным импульсом. Это рассмотрено не имело физического смысла для случая, когда в струе появлялась дополнительная плавучесть и, как следствие, происходил процесс, обратный вовлечению воздушных масс в факел. Подход, более согласующийся с реальными наблюдениями, в последнем случае требует предположения о том, что при избыточной плавучести

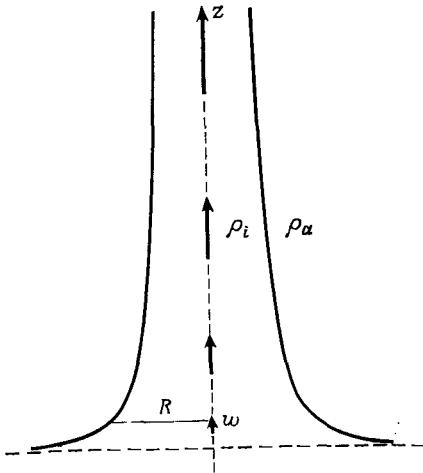


Рис. 8.13.1. Параметры ускоряющейся ламинарной конвективной струи (факела).

свободная струя ускоряется и сужается. Течение тогда остается более или менее однородным по поперечному сечению и ограничено свободной поверхностью струи (рис. 8.13.1), на которой давление такое же, как и внешнее гидростатическое, так что окружающая среда остается невозмущенной.

Если величины для струи и окружающей среды обозначить соответственно индексами  $i$  и  $a$ , а давление на некотором начальном уровне как  $p_0$ , то

$$p_a = p_0 - g\rho_a z. \quad (8.13.1)$$

Так как объемный расход в струе, направленный вверх, постоянен при скорости  $W$ , равномерно распределенной в сечении радиуса  $R$ , то

$$\pi R^2 W = \text{const} = Q, \quad (8.13.2)$$

а давление внутри струи задается выражением

$$p_i = p_0 - g\rho_i z - \frac{1}{2}\rho_i W^2 \quad (8.13.3)$$

в предположении, что  $z$  отсчитывается от уровня, где  $W = 0$ . На границе  $p_a = p_i$ , так что

$$W^2 = 2gz \frac{\rho_a - \rho_i}{\rho_i} = 2gBz, \quad (8.13.4)$$

где

$$B = \frac{\rho_a - \rho_i}{\rho_i}. \quad (8.13.5)$$

Следовательно, в соответствии с (8.13.2)

$$R^4 = \frac{Q^2}{\pi^2 W^2} = \frac{1}{2\pi^2 g B z} Q^2 \quad (8.13.6)$$

и

$$\omega \sim R^{-2}, \quad R \sim z^{-1/4}. \quad (8.13.7)$$

Таким образом, всплывающая струя жидкости ускоряется по направлению от источника как в суживающемся потоке. Поток сил плавучести постоянен, и поток количества движения возрастает до тех пор, пока не достигнет значения, характерного для турбулентной осесимметричной свободной струи такого же размера, после чего начинает вести себя как факел. Рис. 8.9.1 показывает, как начинается турбулентность, принимающая форму меандрирования струн в том случае, когда вязкость, вероятно, препятствует возникновению существенно более мелких вихрей. Как и в случае всех рассмотренных ранее картин движения, компактная масса всплывающей жидкости растягивается и перемещается от одной стороны струи к другой, а вихри увеличиваются в размерах по мере подъема.

Движение такого рода легко возникает в штилевых условиях внутри градиен. Этот случай не нужно смешивать с суживающейся струей (см. разд. 2.4), которая образуется за счет кривизны линий тока при выпуске жидкости через отверстие в область постоянного давления. В данном случае доминирует сила тяжести, а кривизна линий тока не имеет особого значения.

## 8.14. Напорная струя с рециркуляцией

Явление рециркуляции может быть проиллюстрировано на примере напорной струи, заключенной в цилиндрическую трубу. Если струя с сечением, имеющим площадь  $A_2$ , и средней скоростью  $U_2$  втекает в трубу, в которой такая же жидкость течет через сечение площадью  $A_1$  со скоростью  $U_1$ , а на некотором расстоянии вниз по течению поток через сечение площадью

$A_1 + A_2$  имеет среднюю скорость  $U_3$  (рис. 8.14.1), то, поскольку поток вещества постоянен, мы можем записать

$$A_1 U_1 + A_2 U_2 = (A_1 + A_2) U_3. \quad (8.14.1)$$

Давление от точки втекания струи  $A_2 U_2$  к точке вниз по течению, где в грубом приближении потоки смешиваются, возрастает на величину  $\Delta p$ , которая равна уменьшению потока количества движения, так что

$$A_1 U_1^2 + A_2 U_2^2 = (A_1 + A_2) \left( \frac{A_1 U_1 + A_2 U_2}{A_1 + A_2} \right)^2 + \frac{\Delta p}{\rho} (A_1 + A_2). \quad (8.14.2)$$

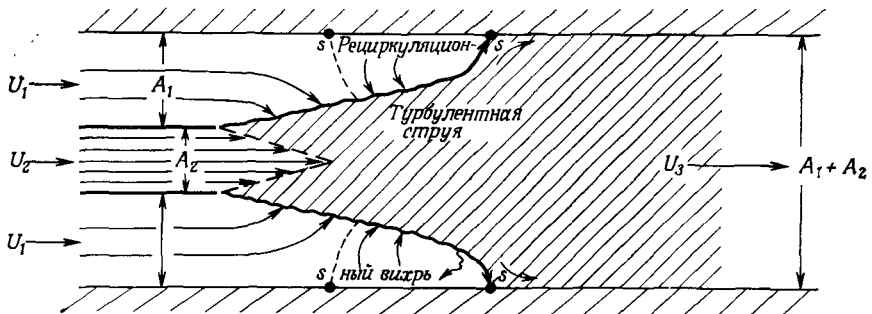


Рис. 8.14.1. Течение в трубе напорной струи с рециркуляцией.

Ламинарная напорная струя, входя в кольцевой ламинарный поток, турбулизуется; безвихревое ядро потока исчезает на удалении от сопла, равном 5 его диаметрам. Окружающая жидкость затормаживается в точках  $S$ , и в кольцевой зоне между стенкой трубы и турбулентной границей струи устанавливается рециркуляционный вихрь.

Следовательно,

$$\Delta p = \rho A_1 A_2 \left( \frac{U_1 - U_2}{A_1 + A_2} \right)^2 > 0, \quad (8.14.3)$$

если  $U_1 \neq U_2$ .

Это возрастание давления порождает застойную зону в окружающей жидкости  $A_1 U_1$ , если

$$\Delta p > \frac{1}{2} \rho U_1^2, \quad (8.14.4)$$

т. е. если

$$\frac{U_2 - U_1}{U_1} > \frac{A_1 + A_2}{2A_1 A_2}, \quad \text{или} \quad \frac{U_2}{U_1} > \frac{A_1^2 + A_2^2}{2A_1 A_2}. \quad (8.14.5)$$

Последнее неравенство, очевидно, возможно, если скорость  $U_2$  достаточно велика. Правая часть неравенства (8.14.5) достигает минимума при  $A_1 = A_2$ , и тогда при  $U_2 > U_1$  происходит торможение внешнего течения. Это течение отрывается от стенки в сечении торможения, и от этого сечения до сечения, где струя уже

Оссимметричные	$n$	$\theta^\circ$	$C$	$C'$	$m$	$m'$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Клуб	1,7(4)	6,3			2,4		-3	-3	1/4	-2
Термик	2(4)	7,3	1,3		3		-1	-3	1/2	0
Напорная струя	4,76	$11,8 \pm 0,3$					-1	-1		$0 M_f =$
Факел	5,51	$10,4 \pm 0,6$	$w_{\max} =$	$gB_{\max} = 11z^{-5/3} \times$			-1/3	-5/3		$= 0,74 M_m$
Развивающаяся напорная струя	4,76		$= 1,4 (gB_{\max} z)^{1/2} =$	$\times F^{2/3} \approx 3gB$	0,033		-1	-1	1/2	$= 2/3 F_f =$
Развивающийся факел	5,51		$= 4,7^{-1/3} F^{1/3} \approx 3w$	0,04	0,025		-1/3	-5/3	3/4	$= 0,4 F_m$
										2/3
Цилиндрические										
Клуб	2,6(4)	5,7					-2	-2	1/3	-1
Термик	1,3(2)	3,2	1,0		1,8(2,4)	3,0	-1/2	-2	2/3	1/2
Напорная струя							-1/2	-1/2		1
Факел							0	-1		1
Развивающаяся напорная струя							-1,2	-1/2	2/3	0
Развивающийся факел							0	-1	1	1

целиком заполняет трубу  $A_1 + A_2$ , возникает область рециркуляции. Условия рециркуляции очень легко установить на практике.

Непрерывное симметричное течение, подобное изображенному на рис. 8.14.1, трудно воссоздать экспериментально так, чтобы оно было двумерным, поскольку поперечную однородность, т. е. строго симметричное движение, обеспечить сложно и струя стремится сместиться к одной из стенок. В осесимметричном случае течение флюктуирует, но рециркуляция легко устанавливается.

### 8.15. Сводка экспериментальных зависимостей

$$z = nR, \quad \omega = C (gBR)^{1/2} = C' (gBz_c)^{1/2},$$

$$\text{объем } V = mR^3 = m' z_c^3 \text{ (осесимметричные струи),}$$

$$V = mR^2 \text{ (цилиндрические струи).}$$

Здесь  $z$  — расстояние вдоль оси струи или высота верхнего фронта термика ( $z_c$ );  $\omega$  — скорость подъема головной части неустановившейся струи или характерная скорость в установившейся;  $B$  — коэффициент плавучести, осредненный по всей струе или в данном сечении  $z$ ;  $R$  — максимальный радиус или полуширина;  $F$  — поток архимедовой силы;  $\dot{M}$  — поток количества движения в источнике. Кроме того,

$$\omega \sim z^\alpha, \quad B \sim z^\beta, \quad \sigma \sim z^\beta, \quad z \sim t^\gamma \text{ и } R_c \sim z^\delta.$$

При  $\delta > 0$  течение становится турбулентным, при  $\delta < 0$  с ростом  $z$  или  $t$  начинают доминировать силы вязкости.  $\sigma$  — концентрация примеси в струе; она пропорциональна коэффициенту плавучести. В факеле  $B_{\max}$  и  $W_{\max}$  — максимальные величины на данном  $z$ . Индексы  $m$  и  $f$  соответственно обозначают среднюю и флюктуационную компоненты.

## СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В СУХОЙ АТМОСФЕРЕ

9.1. Атмосферная конвекция.  
Режимы и наблюдения

Когда происходит свободная конвекция, в атмосфере возникают значительные вариации температур по горизонтали. Воздух, имеющий наибольшую плавучесть, находится во внешней кольцеобразной части термиков, тогда как в их центре, где скорость подъема больше всего, плавучесть воздуха невелика из-за вовлечения туда воздуха извне. Воздух снаружи термиков иногда опускается с максимальной скоростью на небольших расстояниях от них, но это может происходить и непосредственно на их внешней стороне, где воздух теплее окружающего. Воздушная масса между термиками может иметь слабо устойчивую стратификацию и очень медленно опускаться, нагреваясь в процессе опускания, хотя поднимающийся снизу теплый воздух с ней и не перемешивается.

Результаты наблюдений, полученные при помощи шар-пилотов, обычно различаются в зависимости от того, где именно поднимался шар-пилот — в термиках или в окружающих их областях.

Температура воздуха вблизи земли зависит от свойств подстилающей поверхности, которые могут быть различными. Так, над сухой дорогой температура может быть на 5 и более градусов выше, чем над близлежащим лугом. Такая величина, как максимальная дневная температура воздуха в тени, может во многом характеризовать поверхность. Поэтому выбор тех или иных свойств процесса для анализа рассматриваемых ситуаций существенно зависит от того, что главным образом привлекает наше внимание: различие в температурах объемов воздуха различного происхождения или же вертикальные профили осредненных по горизонтали температур. Однако даже в последнем случае рассматриваемые свойства сильно зависят от существования неоднородностей.

Вблизи земли вертикальный градиент температур может быть очень большим; в приземном слое толщиной 2—5 см, в котором в жаркие дни появляются миражи, конвекция происходит в малом масштабе и подавляется вязкостью и радиацией. На несколько большей высоте может существовать режим подобия, где эти физические свойства среды не играют особой роли.

После достижения уровня конденсации определяющим становится влияние облаков. Этот вопрос будет обсуждаться в гл. 11.

Скорость повышения температуры у поверхности оказывает решающее влияние на картину конвекции. Такие картины над травяным покровом, пустыней или морем утром, днем или вечером будут сильно различаться. Однако не следует ожидать, что результаты, которые будут получены нами в процессе анализа, можно применять непосредственно в любом конкретном случае. Каждый наблюдатель, практик, консультант или исследователь сам должен определить, какой именно режим он собирается рассматривать.

Многочисленные дискуссии на тему о том, какова картина конвекции и чем она образована — свободными ли струями или термиками, — оказались бесплодными. Здесь мы явно имеем дело с ситуацией, когда в силу ограниченности имеющихся результатов наблюдений даже хорошее соответствие модели и экспериментальных данных еще не гарантирует правильности модели.

## 9.2. Слабая конвекция. Число Рэлея

Вблизи твердой подстилающей поверхности движение в атмосфере тормозится за счет вязкости. Оно замедляется также вследствие наличия теплопроводности, благодаря которой тепло от нагретой нижней границы передается вверх без движения самого воздуха и уменьшается горизонтальный температурный градиент, без которого не происходит вертикальных движений. Когда вертикальное движение все же имеет место, на некотором расстоянии от границы ему препятствует вязкость, поскольку появляются вязкие напряжения, которые тормозят встречные вертикальные движения в соседних струях. Если восходящие и нисходящие движения распространяются и выше, то горизонтальные градиенты температур уменьшаются, а горизонтальное движение усиливается; вблизи границы этому препятствует вязкость. Над областью восходящих и нисходящих движений создается горизонтальное течение, направленное в противоположную (относительно нижнего горизонтального течения) сторону; таким образом, образуется ячеистая структура. Ячейки конвекции в очень грубом приближении имеют в поперечном сечении форму квадрата, поскольку ячейки любой другой формы оказывали бы большее сопротивление движению. Точная форма ячеек зависит от того, какого они типа: квадратные или шестиугольные — и от условий, существующих на верхней и нижней границах слоя. Имеется довольно много опубликованных данных по свойствам ячеистой конвекции, однако для описания процессов в реальной атмосфере они не применимы нигде, за исключением



нижнего слоя толщиной порядка нескольких сантиметров. Но даже для этого слоя большая часть теоретических описаний бесполезна, поскольку поток теплового излучения сильно превосходит поток тепловой конвекции, если подстилающая поверхность нагрета. Таким образом, условия теплопередачи вблизи подстилающей поверхности оказывают большое влияние на картину конвекции в вышележащих слоях. Эта ламинарная конвекция создается силой тяжести, которая приводит к относительному изменению плотности  $\Delta\rho/\rho$ . Представим себе, что существует некоторый градиент плотности, при котором начинается конвекция. Для его определения нужно использовать глубину участвующего в движении слоя  $h$ . Если величина  $\Delta\rho$  связана с апомалиями архимедовых сил, возникающими за счет вертикального смещения жидкой частицы на высоту  $h$ , то критическое значение градиента увеличивается с ростом коэффициентов молекулярной теплопроводности  $\kappa$  и молекулярной вязкости  $\nu$ . Зависимость критического значения градиента от  $\kappa$  и  $\nu$  должна быть симметрична. Для получения размерности градиента плавучести (ускорение/длина) искомое соотношение должно принять форму

$$\frac{g \Delta\rho}{h\rho} = \text{Ra} \frac{\kappa\nu}{h^4}, \quad (9.2.1)$$

где  $\text{Ra}$  — безразмерная величина, называемая числом Рэлея. Для начинающегося движения при жестких проводящих границах классический анализ дает число Рэлея  $\text{Ra} = 27\pi^4/4$ , т. е. величину порядка  $10^3$ . На основании зависимости  $\text{Ra}$  от  $h^3$  можно заключить, что в неглубоких слоях вблизи нагретой границы могут устанавливаться очень большие градиенты. На практике максимум температуры обычно превышает критическое значение и тепло рассеивается вверх также за счет излучения. Даже в условиях относительно сухого климата это излучение поглощается водяным паром главным образом в нижнем двухметровом слое воздуха. По этой причине молекулярные коэффициенты  $\kappa$  и  $\nu$  не имеют отношения к картине конвекции в атмосфере, однако вместо них нельзя использовать турбулентные коэффициенты вязкости и переноса тепла. Дело в том, что еще не выяснено до конца, как именно происходит турбулентный перенос тепла и количества движения, а значения коэффициентов турбулентного переноса сильно меняются по пространству, занятому отдельными вихрями, так что концепция коэффициента турбулентного переноса в данном случае бесполезна.

Теория ламинарной ячеистой конвекции является хорошим примером взаимопроникновения идей. Она была создана для описания лабораторных экспериментов. Все интересные аспекты этой теории появились в результате попыток в лабораторных же условиях продемонстрировать ее применимость, поскольку помимо

лаборатории она имеет мало прямых приложений. В частности, направление движения, сохраняющего ячеистый характер, объяснялось изменением вязкости и теплопроводности с температурой. Для атмосферы направление движения всегда определяется тем, что локальные объемы воздуха (или, как их часто называют, воздушные частицы) вырываются вверх из сильно нагретого слоя вблизи земли. Они вовлекают в процесс движения окружающий воздух, перемешиваются с ним и поднимаются вверх, проникая сквозь окружение. О поведении этих воздушных частиц высказывались разнообразные предположения. В частности, считали, что первоначально они ведут себя как струи типа факела (вблизи земли, на расстоянии порядка нескольких метров и менее), которые выше становятся более похожими на термики. Затем, возможно, вновь пройдя переходную стадию факела, эти воздушные частицы опять поднимаются в виде термика. Как мы увидим впоследствии, действительная структура такого движения зависит от скорости нагревания и природы подстилающей поверхности.

### 9.3. Полностью турбулентная конвекция в режиме подобия

Для нас наибольший интерес представляет ситуация, когда размер ячеек, или масштаб свободной конвекции, определяется единственным параметром: расстоянием от поверхности земли. Рассмотрим эту ситуацию, не касаясь геометрии ячеек. Вертикальная скорость  $w$  задается выражением

$$w = C (gBz)^{1/2}. \quad (9.3.1)$$

При этом

$$B \sim \frac{z}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (9.3.2)$$

поскольку для адиабатического вертикального смещения  $\Delta \theta = z \partial \theta / \partial z$ , а  $B = \Delta \theta / \theta$  ( $\theta$  — потенциальная температура). Если теперь предположить, что имеется геометрическое подобие (т. е. что восходящий поток на любой высоте занимает одну и ту же долю горизонтальной поверхности), а поток плавучести одинаков на всех высотах (так что тепло, подводимое к основанию воздушной частицы, дойдет до его вершины), то получается

$$wB = \text{const}, \quad (9.3.3)$$

или

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \sim z^{-1/3}. \quad (9.3.4)$$

Если слой в целом нагревается медленно, то поток тепла линейно убывает и вместо константы получаем для (9.3.3) выражение вида  $C_1 - C_2 z$ . Тогда

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \sim \left( \frac{C_1 - C_2 z}{z^4} \right)^{1/3}. \quad (9.3.5)$$

Подобие теперь нарушено, поскольку введен добавочный параметр, а именно высота над поверхностью Земли, на которой поток плавучести становится равным 0. Выше этого уровня конвекция отсутствует. Однако вблизи подстилающей поверхности выражение (9.3.5) будет мало отличаться от (9.3.4). Действительно, при любых измерениях в нижней половине слоя было бы трудно обнаружить какое-либо отклонение от (9.3.4), если не было большой скорости изменения ситуации. Если учесть, что  $1/\theta$  изменяется значительно меньше, чем  $\partial\theta/\partial z$ , то, в грубом приближении, (9.3.4) переходит в хорошо известный результат:

$$\partial\theta/\partial z \sim z^{-1/3}, \quad B \sim z^{-1/3}, \quad w \sim z^{1/3}. \quad (9.3.6)$$

Существенным достоинством является то, что этот результат получен без ссылок на картину конвекции, только на основании теории размерности с учетом выражений (9.3.1) и (9.3.2). Этот вывод был представлен в различных формах, зависящих от предполагаемой картины конвекции. Однако даже если выражение (9.3.4) и окажется верным для конкретного частного случая, все равно картину явления определить не удастся.

Если конвекция происходит в виде термик, струй типа факела или развивающегося факела, то необходимо предположить, что число их в единичном объеме убывает с высотой, и восходящими потоками на каждой высоте будет занята одна и та же доля горизонтальной поверхности. Это может произойти в результате слияния локальных элементов конвекции, когда конусы, внутри которых происходит подъем этих элементов, перекрываются. Вследствие такого слияния вертикальная скорость возрастает как  $z^{1/3}$  вместо того, чтобы убывать с увеличением  $z$ , как это происходит в любом изолированном термике, факеле или развивающемся факеле. Это объясняется тем, что плавучесть убывает медленнее, когда часть захваченной жидкости сама обладает плавучестью.

#### 9.4. Конвекция в режиме подобия при опускающейся нестратифицированной среде

Представленный ниже анализ взят из работы автора (Скорер, 1969). Если отсутствует вертикальный перенос объема, т. е. нет общей горизонтальной конвергенции, а приращениями плотности

в данном случае можно пренебречь, то

$$\sigma\omega + (1 - \sigma)\omega_e = 0. \quad (9.4.1)$$

Здесь  $\sigma$  — доля горизонтальной области, занятая движением, направленным вверх, а  $\omega$  и  $\omega_e$  — вертикальные скорости восходящего потока и окружающей среды соответственно. Обозначая через  $\bar{\tau}$  среднее значение  $\tau$ , равное  $\theta^{-1}$  на любой высоте, а через  $\tau'$  и  $\tau'_e$  — приращения  $\theta^{-1}$  в восходящем потоке и окружении соответственно, запишем

$$\bar{\tau} = \sigma(\bar{\tau} - \tau') + (1 - \sigma)(\bar{\tau} - \tau'_e),$$

или

$$\sigma\tau' + (1 - \sigma)\tau'_e = 0. \quad (9.4.2)$$

Здесь по определению  $\tau'$  положительно, так что  $\tau'_e$  отрицательно. Для жидкости можно подставить  $\rho$  вместо  $\tau$ .

Поток плавучести, если опустить множитель  $g$ , равен

$$F = \sigma\omega\tau' + (1 - \sigma)\omega_e\tau'_e = \frac{\sigma}{1 - \sigma}\omega\tau'. \quad (9.4.3)$$

Также

$$B = \tau'\bar{\tau}, \quad (9.4.4)$$

и из формулы (9.3.1), которая применима для любых конфигураций ячеек, получаем

$$\omega\tau' = C \left( g \frac{\tau'}{\bar{\tau}} r \right)^{1/2} = C (g\tau'^3 z / n\bar{\tau})^{1/2}, \quad (9.4.5)$$

где  $C$  и  $n$  — величины, которые зависят от конфигурации конвективных ячеек, как это описано в гл. 8.

Так как

$$\bar{\tau} = \tau_e - \tau'_e = \tau_e + \frac{\sigma}{1 - \sigma}\tau', \quad (9.4.6)$$

где  $\tau_e$  — постоянное значение  $\tau$  в адиабатически опускающейся нестратифицированной среде (не считая области вблизи поверхности земли, где  $\tau'$  сравнимо с  $\tau$ ), то можно подставить  $\bar{\tau} \approx \tau_e$ , так что (9.4.3) и (9.4.5) дадут

$$F = \frac{\sigma C}{1 - \sigma} \left( \frac{g}{n\tau_e} \tau'^3 z \right)^{1/2}. \quad (9.4.7)$$

Следовательно, если  $F$  независимо от  $z$ , то должно иметь место соотношение

$$\tau' \sim z^{-1/3}, \quad (9.4.8)$$

как в (9.3.6). Дифференцируя (9.4.6), получим

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{\partial \sigma'}{\partial z}, \quad (9.4.9)$$

или

$$\frac{-\sigma'/1 - \sigma}{\partial \bar{\sigma}/\partial z} = \frac{-\sigma'}{\partial \sigma'/\partial z} = 3z. \quad (9.4.10)$$

Этот результат потребуется в разд. 9.6. Он приводит к выражению

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial z} \sim \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \sim z^{-4/3}, \quad (9.4.11)$$

эквивалентному (9.3.4), откуда следует и (9.3.6).

Важно отметить, что в целом среда, преодолеваемая термиком, имеет слабо неустойчивую стратификацию. Термики, превышение температуры которых над окружением убывает по высоте, создают более «неустойчивый» вертикальный градиент температур. Опускающийся воздух имеет безразличную стратификацию; чтобы получить среднее значение вертикального градиента температуры для окружения, измерения должны быть представлены слабо устойчиво, то нисходящее движение вызовет заметное потепление. Такого рода потепление действительно часто встречается на практике, но анализ его на основе теории подобия уже невозможен, поскольку при определении стратификации вводится нелинейный параметр.

## 9.5. Подъем термиков в потоке со сдвигом ветра

Термик, поднимающийся в горизонтальном потоке со сдвигом ветра, где градиент скорости ветра равен  $\partial U/\partial z$ , испытывает по отношению к окружающей среде горизонтальное ускорение величиной  $\omega \partial U/\partial z$  в направлении, противоположном  $U$ . Он испытывает также ускорение под действием архимедовых сил, направленное вверх и имеющее величину  $gB$ . Следовательно, на термик действует результирующее ускорение, равное векторной сумме двух указанных ускорений и имеющее величину

$$g^*B = \frac{gB}{\sin \theta} = \frac{\omega \partial U/\partial z}{\cos \theta}, \quad (9.5.1)$$

где  $\theta$  — угол наклона оси термика к горизонту (рис. 9.5.1).

Предположим, что картина явления при наклонном подъеме термика будет такой же, как и при вертикальном. Тогда

абсолютная величина его скорости  $\omega^*$  относительно окружающей среды выражается через вертикальную  $\omega$  и горизонтальную  $u$  компоненты его вектора скорости следующим образом:

$$\omega^* = \frac{\omega}{\sin \theta} = \frac{u}{\cos \theta} = C (g^* B r^*)^{1/2} = C \left( \frac{g}{\sin \theta} B \frac{r}{\sin \theta} \right)^{1/2}, \quad (9.5.2)$$

где  $r^*$  — радиус термика по нормали к его оси симметрии. Отсюда

$$\omega = C (g B r)^{1/2} \quad (9.5.3)$$

и

$$\frac{u}{\partial U / \partial z} = \frac{\omega \operatorname{ctg} \theta}{\omega^{-1} g B \operatorname{ctg} \theta} = C^2 r = \frac{C^2 z}{n}. \quad (9.5.4)$$

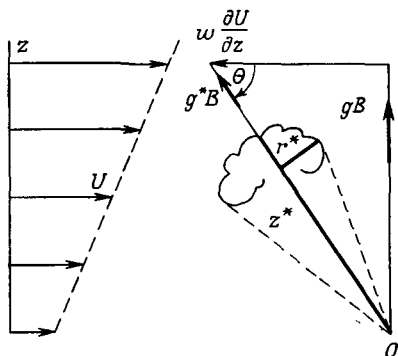


Рис. 9.5.1. Термик, поднимающийся в слое со сдвигом ветра.

Профиль скорости в слое представлен в левой части рисунка. Относительно среды термик испытывает горизонтальное ускорение, равное  $\omega \partial U / \partial z$ , и вертикальное, направленное вверх и равное  $gB$ . Результирующее ускорение равно по модулю  $g^*B$  и направлено под углом  $\theta$  к горизонту, а ось симметрии термика соответственно наклонена.

Основная идея настоящего раздела базируется на свойствах термиком и не может быть механически перенесена на факелы или развивающиеся факелы без введения принципиально новых предположений. Дело в том, что хотя движение верхушки развивающегося факела, поднимающегося в потоке со сдвигом, должно быть во многом таким же, как у термика, верхушка факела переносится по ветру быстрее основания, что, следовательно, приводит к нарушению осевой симметрии. В нашем рассмотрении необходимо предположить, что изменения  $U$  по глубине термика несущественны; кроме того, они малы по сравнению с  $\omega$ . Это условие записывается в виде

$$r \frac{\partial U}{\partial z} \ll \omega. \quad (9.5.5)$$

## 9.6. Отношение коэффициентов турбулентного переноса для количества движения и тепла

В предыдущих разделах приведены формулы для вычисления скоростей вертикального переноса горизонтального количества движения, тепла и массы. В соответствии с теорией диффузии

Фика, или  $K$ -теорией, вертикальный коэффициент переноса пла-  
вучести  $K_H$ , среднее значение градиента  $\tau$  и поток  $F$ , задаваемый  
выражением (9.4.3), связаны между собой соотношением

$$F = \frac{\sigma}{1-\sigma} \omega \tau' = -K_H \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z}. \quad (9.6.1)$$

Таким образом, используя (9.4.10), можно получить  $K_H$ :

$$K_H = -\frac{\sigma}{1-\sigma} \omega \tau' \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} = 3\omega z. \quad (9.6.2)$$

Определив  $U$  как среднюю скорость ветра и полагая, что  $u$   
и  $u_e$  — приращения горизонтальной скорости соответственно для  
термиком и окружающей среды, получим уравнение, аналогичное  
(9.4.2):

$$U = \sigma(U - u) + (1 - \sigma)(U - u_e), \quad (9.6.3)$$

так что

$$\sigma u + (1 - \sigma) u_e = 0. \quad (9.6.4)$$

Из определения коэффициента вертикального переноса гори-  
зонтального количества движения  $K_M$  получаем выражение

$$-K_M \frac{\partial U}{\partial z} = -\sigma u \omega - (1 - \sigma) u_e \omega_e \quad (9.6.5)$$

для напряжения Рейнольдса, описанного в разд. 7.3.

Используя (9.5.4), приходим к выражению

$$K_M = \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\gamma u \omega}{\partial U / \partial z} = \frac{\sigma C^2}{(1-\sigma) n} \omega z. \quad (9.6.6)$$

Отсюда с учетом (9.6.2) получаем

$$\frac{K_M}{K_H} = \frac{\sigma C^2}{(1-\sigma) 3n}. \quad (9.6.7)$$

Вывод этого соотношения не обусловлен наличием очень глу-  
бокого слоя, в котором существует режим подобия; однако оно  
применимо и к такому слою. Даже если поток меняется с высо-  
той, это может привести только к небольшому изменению мно-  
жителя 3 в выражении (9.6.7), который появился из (9.4.10), за-  
висит от  $\tau_e$  и не зависит от  $z$  в (9.4.6). Значения  $C^2$  и  $n$  ха-  
рактеризуют природу конвективных ячеек; если они подобны терми-  
кам, можно использовать (8.2.13). При  $n = 4$  и  $m = 3$  имеем

$$\frac{C^2}{n} \approx 0,4. \quad (9.6.8)$$

Величина  $\sigma$  крайне неопределенна и, вероятно, меняется  
в зависимости от обстоятельств. Некоторые радарные снимки,  
сделанные в горизонтальной плоскости (рис. 9.6.1), полученные

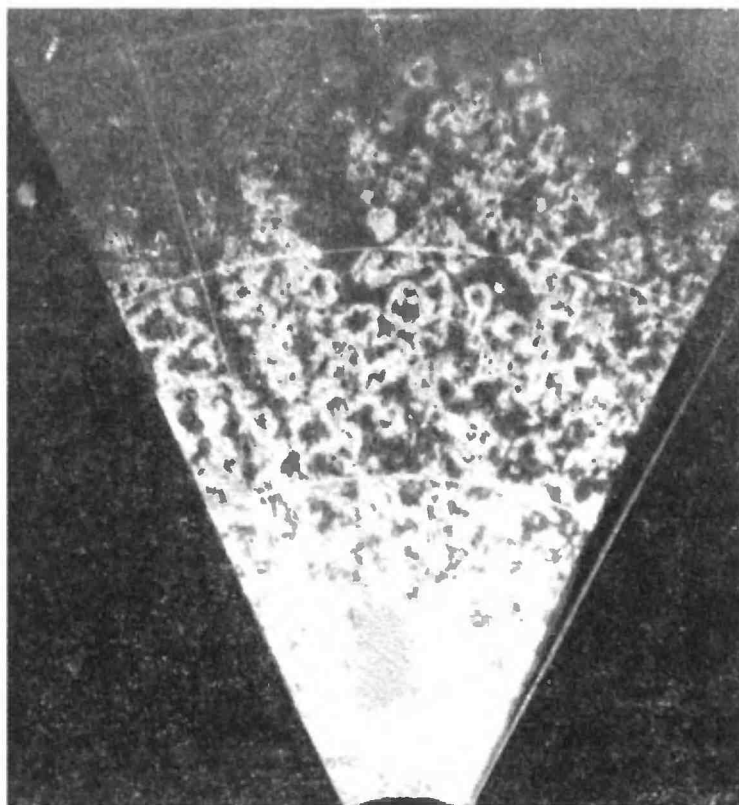


Рис. 9.6.1. Радарный снимок термиков под углом возвышения  $2^\circ$  с интервалами между линиями дальности 9 км.

Нестационарность картины явления, изменчивость с высотой и зависимость от активности конвекции делают затруднительным получение представительного значения  $\sigma$ . В данном случае конвекция была очень активной; хотя площадь, занятую активными термиками, определить трудно, она оказывается убывающей с высотой. См. также рис. 6.2.2 (фото-снимок любезно предоставлен Университетом им. Дж. Гопкинса).

Конрадом и Кропфли (1968), показывают, что величина  $\sigma$  находится в пределах между 0,1 и 0,6; по-видимому, эти величины завышены, поскольку используемый метод относится к термикам, падающим в слое конечной толщины, а не на бесконечно тонкой поверхности. В слое с кучевыми облаками величина  $\sigma$  может меняться в пределах от  $\sim 0,5$  до  $\sim 0,01$ . Большие величины появляются, вероятно, в тех случаях, когда существует горизонтальная конвергенция, а средняя вертикальная скорость не равна 0. В большинстве случаев можно, по-видимому, полагать  $\sigma < 0,3$ . Если  $\sigma = 0,1$ , что представляется



наиболее разумной величиной для области непосредственно под конвективным облаком, то

$$\frac{K_M}{K_H} = 0,014. \quad (9.6.9)$$

Если  $\sigma=0,5$ , то

$$\frac{K_M}{K_H} = 0,13. \quad (9.6.10)$$

Последнее значение, по-видимому, близко к верхнему пределу. (Большие значения отношения  $K_M/K_H$ , например порядка 1, должны быть связаны с разного рода вихрями.)

Причина столь малой величины рассматриваемого отношения разъяснена в разд. 7.3. Попросту говоря, дело заключается в том, что архимедовы силы порождают завихренность, вектор которой горизонтален, а вихри, вызванные горизонтальной завихренностью, не растягиваются под действием сдвига горизонтального ветра. Однако замкнутые горизонтальные вихревые линии переносят в вертикальном направлении объем, а следовательно, массу или плавучесть, без создания касательных напряжений, поскольку при этом не расходуется энергия потока со сдвигом. Наклон вертикальной оси термика вследствие сдвига потока порождает, как мы видели в разд. 9.5, наклонные вихревые линии, которые растягиваются основным течением и получают от него энергию. Мелкие вихри в термике непрерывно расходуют его энергию, так что основная часть энергии термика в любой данный момент времени оказывается произведенной недавно. Это означает, что большая часть имеющейся завихренности перпендикулярна силе тяжести, которая эту завихренность вызывает.

Рассмотрим другой крайний случай, а именно устойчиво стратифицированную среду. Как только горизонтальные вихревые линии выводят поверхности равной плотности из горизонтального положения, образуется противоположно направленная завихренность. Можно сказать, что устойчивая стратификация противостоит проникающему вертикальному движению и поворачивает его в обратную сторону. Поэтому горизонтальная компонента вектора завихренности исчезает независимо от того, каким путем образуются вихри. Однако остальные компоненты остаются и могут порождать турбулентные напряжения, будучи наклоненными в потоке со сдвигом. Турбулентность, вызывающая вертикальный перенос массы и тепла, не может существовать при устойчивой стратификации, и разрушается либо стратификация, либо проникающее движение. Крайним является случай, когда единственными вихрями оказываются устойчивые волны. В этом случае горизонтальное

количество движения может переноситься в пространстве (см. разд. 5.11) без какого бы то ни было переноса массы или тепла, и тогда

$$\frac{K_M}{K_H} = \infty. \quad (9.6.11)$$

В численном прогнозировании погоды конечно-разностная аппроксимация неминуемо вводит искусственно сглаженный эквивалент механизма диффузии. Этого, очевидно, достаточно для того, чтобы представить любой вертикальный перенос количества движения, но не перенос тепла и водяного пара. Поэтому на практике  $K_M$  принимают равным 0, а  $K_H$  считают бесконечным для тех ситуаций, когда конвекция активна, т. е. когда вертикальный градиент температуры превосходит влажно-адиабатический.  $K_H$  тогда относят к потенциальной температуре по влажному термометру и к относительной влажности.

## 9.7. Сомнительность понятия коэффициента турбулентного переноса

Коэффициент турбулентного переноса можно использовать только тогда, когда в спектре размеров вихрей имеется соответствующий интервал, на котором можно произвести выборку (см. разд. 7.3). Более того, неправильно полагать, что достаточно большое время выборки обязательно обеспечит получение значимого параметра, даже если полученная величина не зависит от времени выборки.

Атмосферная конвекция отсутствует, когда воздух устойчиво стратифицирован, например ночью. Значение вертикального температурного градиента, осредненное за период в несколько дней, обычно устойчиво; оно никогда не становится сильно неустойчивым, поскольку движение термиком и перенос тепла вверх начинаются уже при слабо неустойчивом температурном градиенте. Поскольку при устойчивом температурном градиенте отсутствует конвективный перенос тепла сверху вниз, происходит общий перенос тепла вверх за счет долговременной конвекции. Осредненный тепловой поток выше, чем для осредненного градиента, следовательно, коэффициент переноса отрицателен. Эта несообразность была впервые подмечена Голдом много лет тому назад, но его замечание оставлено без внимания теми, кто увлечен выяснением того, что же собой представляет этот коэффициент. Величина коэффициента очень велика, когда конвекция сильна, но равна 0, когда конвекция отсутствует; следовательно, его среднее значение бессмысленно.

## 9.8. Формы свободной конвекции

Слабую конвекцию трудно получить в лабораторных условиях, а в атмосфере она почти никогда не встречается. Даже в вязкой жидкости течение становится нестационарным при слабом увеличении притока тепла: частицы поднимаются от нагретой нижней границы сквозь окружение к верхней границе, где растекаются. Поэтому движение оказывается проникающим. Турбулентную природу свободной атмосферной конвекции невозможно исследовать в лабораторных условиях, поскольку в мелком вязком слое наличие вязкости препятствует перемешиванию воздуха термиком с окружением посредством вихрей.

### 9.8.1. Улицы и ячейки

Облачные улицы могут состоять из очень тонких облаков. Эти облака являются как бы только верхней границей движения, которое происходит под ними и не зависит существенно от обусловленного конденсацией изменения плавучести воздуха в облачном слое. Хотя в некоторых улицах облаков обязательно имеются большие, даже дождевые, облака, мы будем рассматривать только некрупные разновидности облаков, такие, например, как на рис. 9.8.1. Временами облачные улицы образуются над сушей утром, иногда это происходит вечером, когда конвекция не очень активна и ограничена слоем более или менее одинаковой глубины. Это влияет на взаимное расположение облаков: они не могут располагаться очень близко друг к другу, так как тогда поддерживающие их восходящие потоки (даже если они начинались на земле в виде крошечных термиком) будут накладываться друг на друга и не останется места для нисходящих потоков. Если же облака отодвинутся друг от друга, то между ними могут вклиниться свежие термики. Не требуется особо сложных рассуждений, чтобы оценить этот довод. Примем, что на верхней границе слоя ширина восходящего потока равна ширине нисходящего, и предположим, что при подъеме от земли до этой границы ширина термика примерно удвоится. Тогда при  $n=4$  (как для термика) получится, что удвоение ширины термика происходит при подъеме на высоту, равную его ширине на верхней границе. Поэтому ширина ячейки конвекции должна быть вдвое больше глубины. Облачные улицы обычно располагаются друг от друга на расстоянии удвоенной высоты основания облака, следовательно ячейки конвекции имеют примерно такую же ширину. Однако это никоим образом не доказывает иногда выдвигаемого соображения, что, поскольку ячейки конвекции в жидкости



Рис 9.8.1. Аэрофотоснимок облачных улиц над Оксфордширом.

постоянной вязкости и в атмосфере имеют приблизительно одинаковую форму, механизмы процессов в этих средах должны быть полностью аналогичны. На самом деле характер процессов перемешивания в атмосфере под действием вихрей в пределах системы имеет переменный характер. Для объяснения формы ячеек предлагалось использовать число Прандтля (вихревое число Прандтля для однородного турбулентного слоя равно  $K_M/K_H$ ). Однако не имеется каких-либо опытных данных, которые указывали бы на горизонтальный перенос количества движения и тепла вихрями, аналогично тому, как это может быть установлено в лабораторных условиях для вязкой проводящей жидкости. Тем не менее многие скорее предпочли бы неверную теорию, чем вообще отсутствие математического описания деталей процесса. Применительно к атмосфере это неразумно, поскольку ситуации в ней различаются так сильно, что любая точная теория оказалась бы бесплодной, особенно такая, как теория турбулентного переноса, которая не открывает здесь ничего нового, не базируется на динамике процессов и является лишь представлением кинематической идеи.

Облачные улицы часто возникают над морем, в особенности там, где воздушный поток нагревается медленно, а слой постоянной глубины расположен над большой территорией. Так как нагревание идет медленно, то взаимодействие между терми-

ками может достичь более или менее стационарного состояния. Усиление конвекции не отражается на структуре облачных улиц, но диапазон размеров облаков увеличивается. В слое, отгороженном инверсией, через которую облака не могут проникнуть, интенсивная конвекция редка, но обычно образуется слой облаков с наковальнями.

Облачные улицы формируются и выстраиваются в ряды в течение 10—30 мин с момента появления облаков, так что их структура уже как бы существует в движении воздуха вниз. Это можно наблюдать, когда воздух движется от холодной суши к теплему морю, где ситуация, подходящая для создания улиц, уже имеется, или когда они образуются утром. Указанное время сравнимо со временем подъема частиц сквозь конвективный слой. Таким образом, механизм образования облачных улиц не может быть прямо связан с вращением Земли, поскольку для проявления эффекта вращения требуется существенно большая часть суток.

Одна из теорий облачных улиц предполагает, что они возникают в слое Экмана. В слое Экмана скорости ветра постоянны по величине и направлению на каждой высоте над большой территорией и определяются из баланса сил, обусловленных градиентом давления, сил Кориолиса и касательных напряжений (см. разд. 4.10). Такой профиль ветра неустойчив по отношению к возмущениям, которые соответствуют образованию облачных улиц. Этот профиль зависит от постоянного коэффициента турбулентного переноса, который равен нулю, когда есть улицы. Более того, так как в воздухе имеется сильный вертикальный обмен, профиль ветра не может быть стационарным. Наконец, частицы воздуха совершают полный оборот в ячейке за время, много меньшее суток. Энджел и Пек (1963 и 1967) провели шаропилотные измерения, показывающие, что длительность одного оборота частицы в ячейке имеет порядок 30 мин, что согласуется со значениями скоростей порядка 1—10 м/с, измеренными планеристами в облаках или восходящих потоках в облачных улицах. Это означает, что для динамики рассматриваемого движения сила Кориолиса не является существенным фактором.

Улицы выглядят лежащими примерно по ветру. Частицы воздуха движутся по спирали (рис. 9.8.2), и обычно полагают, что расположение улиц в виде продольно ориентированных валков вызвано трением о подстилающую поверхность. Трудность объяснения поперечно ориентированных валков заключается в том, что на стыке между двумя соседними валками один из них создавал бы восходящий поток, а другой — нисходящий. Это происходило бы потому, что валки должны вращаться в направлении завихренности, определяемой сдвигом

ветра, который в свою очередь порождается трением о подстилающую поверхность. В случае же продольной ориентации соседние валки имеют противоположное направление вращения. С другой стороны, в свободной атмосфере сдвиговый слой может порождать облачные валы с тем же самым направлением вращения, что и у сдвига, поскольку верхняя и нижняя границы срываемого слоя могут быть деформированы так, что

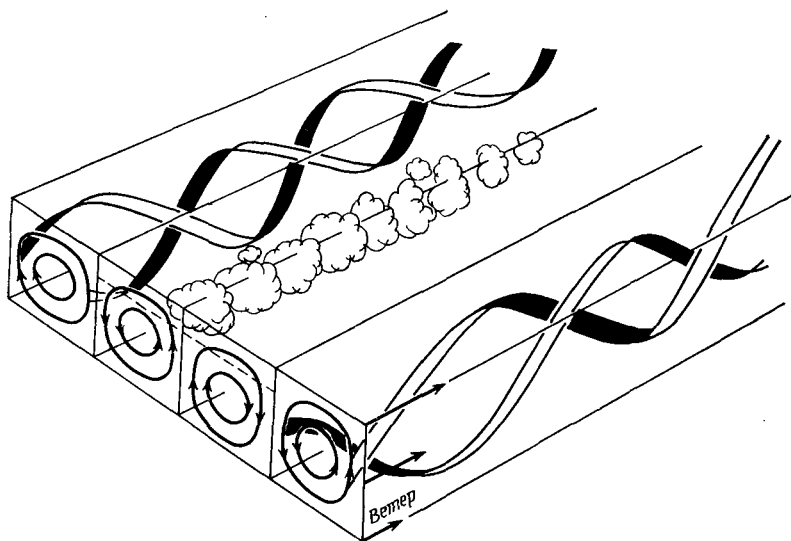


Рис. 9.8.2. Усредненное спиральное движение частиц в конвективных облачных уллицах.

Облака могут образовываться в верхней части восходящего течения либо в ячейках, либо непосредственно над ними. На рисунке показаны облака, генерируемые только средними ячейками. Если бы уровень конденсации находился на высоте, помеченной штриховой линией, а течение было ламинарным, то облачный слой полностью занял бы часть объема ячеек выше уровня конденсации.

образуются срывные вихри (правая часть рис. 6.3.2). В слоях альтокумулюсов, вытянутых в длинные ячейки, движение при сильном сдвиге приводит к образованию облачных валов, описанных в гл. 6, а при слабом — к очень медленному отрыву и закручиванию периферийного слоя, вследствие чего возникает либо квадратная, либо не ориентированная структура. Это опровергает старую идею, полученную из лабораторных экспериментов над дымом, находящимся в относительном движении между стеклами, которая заключается в том, что ячейки вытянуты в продольном направлении, когда сдвиг потока большой, и в перпендикулярном, когда он мал. Не очевидно, что в тонких слоях альтокумулюсов вообще встречаются валки,

ориентированные в продольном направлении; чтобы они образовались, необходима, по-видимому, жесткая граница.

Часто предполагается, что тени от облачных улиц над суши вызывают неравномерный нагрев земли, что вызывает новые восходящие потоки с освещенных солнцем площадей. Это может вызывать поперечную миграцию улиц, что часто и наблюдается. Такое явление менее вероятно над морем, где солнечное освещение несущественно влияет на процессы, имеющие малый временной масштаб.

Когда ветер, а следовательно, и сдвиг ветра отсутствуют, малые конвекционные облака изолированы и распределены равномерно, если подстилающая поверхность однородна.

### 9.8.2. Шлейфы и гряды

Отдельные шлейфы облаков часто формируются с подветренной стороны от какого-либо крупного препятствия или ис-

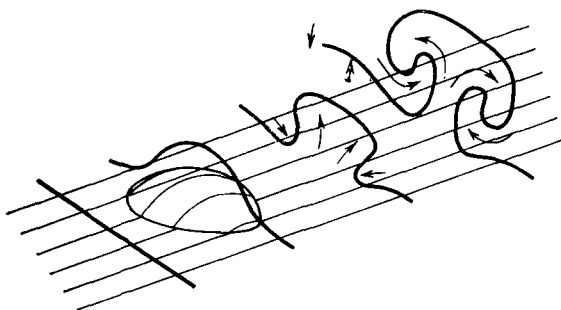


Рис. 9.8.3. Развитие термика, оторвавшегося от неустойчивого слоя из-за неровности на подстилающей поверхности.

точника тепла. На рис. 9.8.3 изображено конвективное движение, которое, как и термики, начинается из слоя с неустойчивой стратификацией, расположенного у земли. Горизонтальное течение, проходя над возвышенностью, выталкивает вверх часть этого слоя. Таким же образом может создавать гряду конвективных облаков со своей подветренной стороны крупный источник тепла, такой, как металлургический завод с большими выбросами шлака, или неостывшее озеро осенью под порывами холодного ветра. Острова в океане могут вызывать сходное явление, но обычно они порождают шлейф циррусов: воздух в нижнем слое движется медленно, так что остров, освещенный солнцем, оказывается непрерывным источником тепла, и находящиеся на высоте примерно 10 км и более облака с наковальнями уносятся сильным ветром. Эти шлейфы хорошо видны

на спутниковых снимках; по ним можно делать оценки скорости ветра.

Небольшое кучевое облако, появляющееся на вершине восходящей части термика и зависящее от процессов, происходящих ниже, иногда состоит, по-видимому, из серии термиков, исходящих из источника, движущегося в том же направлении, что и облако, но медленнее его. На рис. 9.8.4 показано, как в потоке со сдвигом ветра, когда теплый воздух поднимается из сверхадиабатического слоя, с наветренной стороны термика господствующим оказывается нисходящий поток. Сдвиг ветра

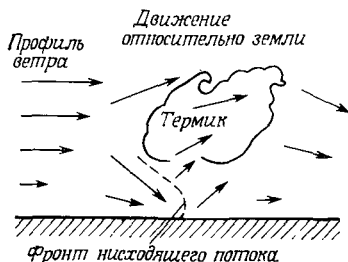


Рис. 9.8.4. Нисходящий поток вблизи восходящего потока, оторвавшегося от подстилающей поверхности, при усилении ветра с высотой.

Фронт нисходящего потока имеет большую горизонтальную скорость, чем медленно движущийся теплый воздух вблизи земной поверхности. В результате нисходящий поток захватывает этот теплый воздух, подпитывая кучевые облака свежими термиками.

вынуждает холодный воздух опускаться к земле, который, перемещаясь под углом к горизонту, захватывает находящийся у поверхности земли теплый воздух, движущийся более медленно. Таким образом, термики появляются в точках, скорость перемещения которых больше, чем в слое у поверхности земли, и меньше, чем в облачном слое. Облака такого рода, показывающие движение термиков, поднимающихся в потоке со сдвигом, изображены на рис. 9.5.1 и 11.5.4.

### 9.8.3. Источники тепла

Источники термиков хорошо известны; некоторые из них описаны выше в разд. 9.8.2. Другие возникают вследствие различий в свойствах подстилающей поверхности. Спелые колосья могут аккумулировать теплый воздух, который потом уносится порывами холодного ветра, пригибающими колосья к земле. Зеленая растительность, наоборот, остается холодной за счет испарения воды, так что является источником скорее скрытого, чем явного тепла. Поэтому вблизи от нее открытая сухая земля, скалы, бетон или песок могут порождать термики. Излюбленными для планеристов являются источники, защищенные от ветра; предполагается, что на подветренной стороне леса или скал генерируется теплый объем медленно движущегося воздуха, который становится горячее окружения, поскольку меньше рассеивает тепло вверх за счет турбулентности,



чем быстро движущееся окружение. Поэтому такой источник время от времени порождает дискретные порции воздуха, обладающего плавучестью, которые поднимаются вверх в виде термиков.

#### 9.8.4. Конвекция за счет вращения

В пустыне подстилающая поверхность нагрета сильно, но сохраняет тепло очень плохо. Большая часть этого тепла расходуется на длинноволновое излучение поверхности, которое поглощается и рассеивается в нижнем слое атмосферы толщиной в несколько метров, преимущественно за счет водяного пара. Вследствие этого образуется неустойчивый слой, часто глубиной в десятки и даже сотни метров, без ярко выраженного источника термиков на поверхности земли. Как только термик поднимается, холодный воздух опускается к подстилающей поверхности, и она существенно охлаждается, так как сильно нагрет только ее верхний слой толщиной в несколько миллиметров. Воздух в пустотах между песчинками делает песок очень эффективным теплоизолятором. Поэтому уже на глубине нескольких сантиметров от поверхности суточные вариации температуры незначительны в противоположность изменениям температуры непосредственно на поверхности, которые имеют порядок  $50^{\circ}\text{C}$ . В таких условиях за одним термиком не следует другой, подпитывающий его, и развитие больших термиков сильно тормозится.

Отсюда ясно, что любая система, способная получать тепло с поверхности по мере движения над ней, может существовать и даже расти. Такой системой является, например, песчаный смерч. Вращение начинается из-за появления горизонтального сдвига ветра, обусловленного различием в шероховатости для отдельных участков подстилающей поверхности. Конвергенция вызывает растяжение вихревых линий в вертикальном направлении и интенсификацию вращения. В результате, как это описано в разд. 3.8, образуется вторичное течение, так что по мере движения системы в нее непрерывно поступает тепло с подстилающей поверхности, преимущественно с той стороны, где тангенциальная скорость совпадает с направлением ветра. Поэтому вращающийся циклонально песчаный смерч движется вправо по отношению к ветру (рис. 9.8.5). Песчаный смерч в подходящей ситуации может остаться стационарным. Имеется описание песчаного смерча, образовавшегося из куч песка, привезенного самосвалами для строительства плотины. Суинн (Виллис, 1953, стр. 78) дает красочное описание песчаного смерча в Египте, включая появление зоны низкого давления в центральной его части. Эта зона создается либо центробеж-

ным движением частиц, либо тем, что воздух вблизи оси, втягиваемый в вихрь сверху, обычно холоднее и свободен от пыли. С другой стороны, иногда полагают, что пыль поглощает достаточное количество солнечного тепла для того, чтобы нагреть окружающий воздух. Это может быть верно для пыльного смерча высотой в несколько сот футов, так как пыль такого смерча находится в воздухе в течение нескольких минут, и не содержащий пыли воздух в ядре вихря должен быть холоднее.

Механизм возникновения песчаного смерча в общих чертах понят, но многие детали остаются неясными и не поддающимися описанию даже в рамках более тонкой теории. Сущест-

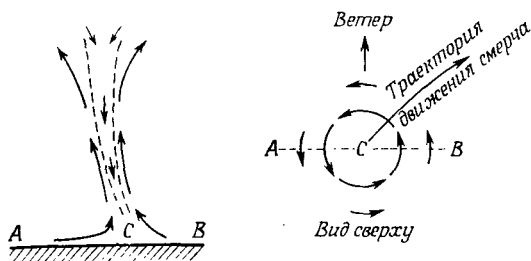


Рис. 9.8.5. Движение в песчаном смерче.

Основание смерча перемещается вместе с ветром, а также в направлении стороны, движущейся вперед. Иногда в центре песчаного смерча имеется нисходящий поток, особенно если система только что образовалась и не очень высока.

вует большое разнообразие в относительном влиянии вкладов поверхностного трения, теплопроводности и конвективного переноса тепла к воздуху как от горячей пыли, так и от тонкого слоя горячего воздуха толщиной в несколько миллиметров, который до прихода ветра от вихря был почти неподвижным. Смерчи могут быть высотой от нескольких десятков сантиметров до нескольких сот метров. Иногда они могут достигать слоя конденсации и иметь облако на вершине (Айвз, 1947). Такие смерчи теперь легко поддаются объяснению, но для остальных народов они до сих пор ассоциируются с чудом.

### 9.8.5. Анабатический ветер

Название анабатического (восходящего) дано ветру, который рождается в ложбинах, прогреваемых солнцем. Наиболее благоприятными для его развития являются условия, когда воздушная масса над ложбиной устойчиво стратифицирована. Это препятствует нагретому воздуху подниматься высоко над подстилающей поверхностью, так что он, растекаясь по ложбине, продолжает нагреваться. Часто восходящее течение оста-

плавляется у границы снежного покрова, выше которой поверхность отражает солнечные лучи и остается холоднее окружающего воздуха. Над этой поверхностью может существовать

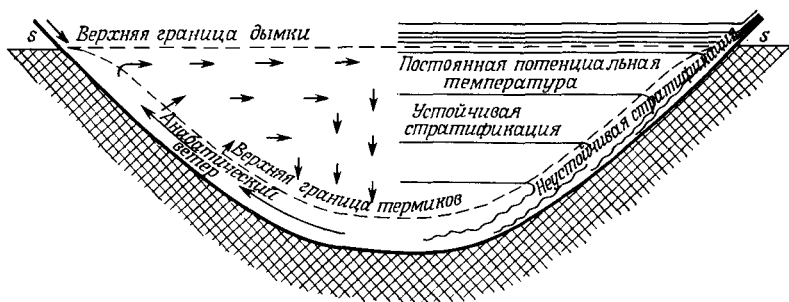


Рис. 9.8.6. Движение воздуха (слева) и его стратификация (справа) в долине, где анабатические ветры дуют по склону вверх.

$S$  обозначает границу снежного покрова, выше которой нмеется узкий слой холодного воздуха и возможен катабатический ветер.

катабатическое (нисходящее) движение. Дымка, возникшая в долине, движется вверх по ложбине и растекается в страти-

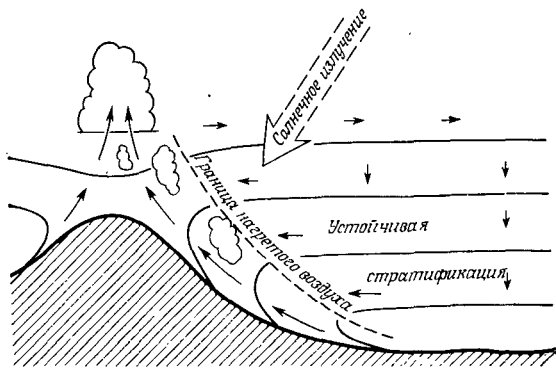


Рис. 9.8.7. Ветры, дующие вверх по склону и подпитывающие кучевое облако, находящееся над вершиной горы, где воздушная масса стратифицирована слабо устойчиво.

фицированной воздушной массе на различных уровнях в соответствии со стратификацией (рис. 9.8.6). Хорошо очерченная поверхность дымки образуется на верхней границе восходящего ветра, которая часто является общим уровнем вершин гор.

Когда сильная стратификация над вершинами гор отсутствует, анабатическое течение подпитывает кучевые облака,

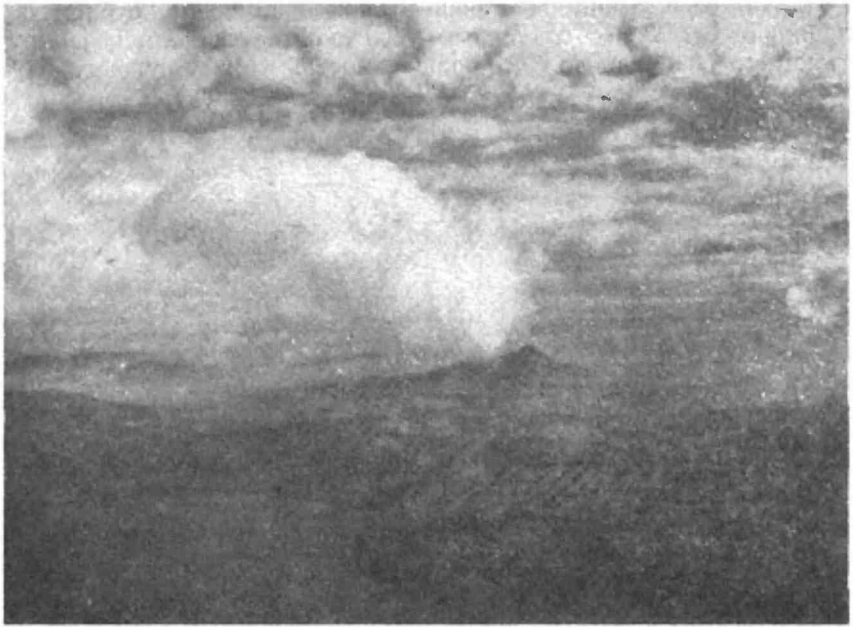


Рис. 9.8.8. Кучное облако, выросшее из анабатического ветра над горой в Чехии.

Воздух в долине устойчиво стратифицирован. Снимок сделан М. Колдовским с горы Милесовка.

имеющиеся над этими вершинами (рис. 9.8.7 и 9.8.8). (Детально эти вопросы рассмотрены в книгах автора *Clouds of the World* и *Air Pollution*.) Наиболее отважные планеристы, готовые летать вблизи горных склонов, могут искусно парить в анабатических ветрах.

### 9.8.6. Эффекты механического перемешивания. Фен

В потоке воздуха над сильно шероховатой поверхностью происходит механическое перемешивание, и слой смешения приобретает равномерную потенциальную температуру. Если этот слой первоначально имел устойчивую стратификацию, то происходит охлаждение верхней и нагрев его нижней части. Этим иногда можно объяснить, почему температура воздуха у поверхности Земли с подветренной стороны крупных естественных препятствий выше, чем с наветренной (эффект фена), в особенности если поверхность достаточно шероховата, чтобы перемешивание происходило в слое толщиной несколько сот

метров. При этом образуется инверсия на верхней границе слоя смешения, которая становится верхней границей зоны конвекции с подветренной стороны. Инверсия может быть усилена наличием облаков, возникающих на уровне максимального охлаждения; эти облака излучают тепло в пространство в длинноволновом диапазоне, вследствие чего охлаждаются, создавая в слое нисходящую конвекцию и ускоренное охлаждение. Иногда при этом образуется смог. Более подробное описание этого вопроса содержится в книге автора *Air Pollution*.

## 9.9. Фронты морских бризов

Морские бризы — это общее место в элементарной географии и в жизни обитателей побережья. В течение многих лет на них ссылаются также как на причину изменения характеристик воздушных масс днем или вечером в удаленных от побережья областях, куда бризы иногда проникают. То, что они появляются с резким падением температуры, было известно давно, но, поскольку знания структуры верхних слоев атмосферы были недостаточными, не думали, что это происходит благодаря бризам.

Когда воздух над сушей вследствие утренней конвекции нагревается, проникновение морского воздуха во внутренние области суши приводит к скачку температуры там, где теплый воздух встречается с холодным. Наличие скачка усложняет расчеты на ЭВМ из-за применения конечно-разностной аппроксимации. Было предпринято несколько попыток аналитического представления установившегося состояния, достигаемого асимптотически спустя длительное время. Из-за того что перемешивание на границе похоже на перемешивание в верхней части термика, поскольку выдвинутые вперед зоны вторгающегося воздуха захватывают воздух из окружения, для описания рассматриваемого явления целесообразно использовать основные параметры, характеризующие термики.

Пусть  $B = \Delta\rho/\rho$  — плавучесть перемещающегося воздуха, а  $d$  — высота, которой достигнет фронтальная поверхность этого воздуха перед тем, как этот объем погрузится обратно в нижний слой (рис. 9.9.1). Тогда  $V$ , скорость перемещения фронта относительно окружающего воздуха, будет зависеть от параметров  $B$  и  $d$  следующим образом:

$$V = C (gBd)^{1/2}, \quad (9.9.1)$$

где в грубом приближении  $C = 2/3$ . Скорость  $V$  определяется как  $U_w + U_c$ , т. е. как сумма скоростей, с которыми сближаются теплый и холодный воздух. Соотношение (9.9.1) получено по

данным лабораторных экспериментов и фронтов морского бриза в атмосфере, наблюдавшихся главным образом Симпсоном (Симпсон, 1969, 1972, 1977) вблизи Лашема с использованием планера. Холодный воздух, имеющий более высокую влажность, часто легко наблюдается благодаря большой затуманенности.

Область максимума восходящего потока со скоростями порядка  $0,7V$  в атмосфере оказывается неожиданно узкой, вследствие чего планер часто может подниматься только над

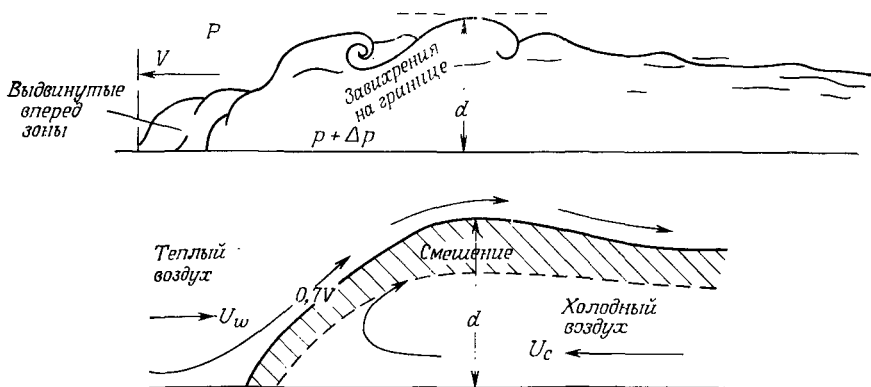


Рис. 9.9.1. Схематическое представление фронта морского бриза.

Смешение происходит на фронте, где теплый воздух увлекается выдвинутыми вперед зонами, и у верхней границы, где возникают вали. Максимальная скорость восходящего потока порядка  $0,7V$ .

полосой шириной  $\sim 100$  м. Это может быть объяснено наличием нерегулярных возмущений в перемещающемся фронте, где грибовидные выступающие зоны холодного воздуха захватывают теплый воздух. Воздух в слое смешения обладает плавучестью относительно холодного воздуха. В модельных экспериментах зона смешения, будучи освещенной щелевым источником света, выглядит, если рассматривать ее в вертикальной плоскости движения, как зона облачных валов на границе с длиной волны, незначительно превосходящей  $d$ . Валы перемещаются от головной части потока. На рис. 9.9.2 показан модельный эксперимент для этого явления.

Морские бризы, наблюдавшиеся Симпсоном, обычно имели величину  $d$ , равную  $\sim 700$  м; разность плотностей  $\Delta\rho$  соответствовала разности температур в  $1^\circ\text{C}$ , а скорости составляли  $\sim 3$  м/с. Бризы на суше, вызывающие охлаждение воздуха почью, много уже, подобно кататическим (нисходящим) ветрам, поскольку ночное выхолаживание действует по высоте

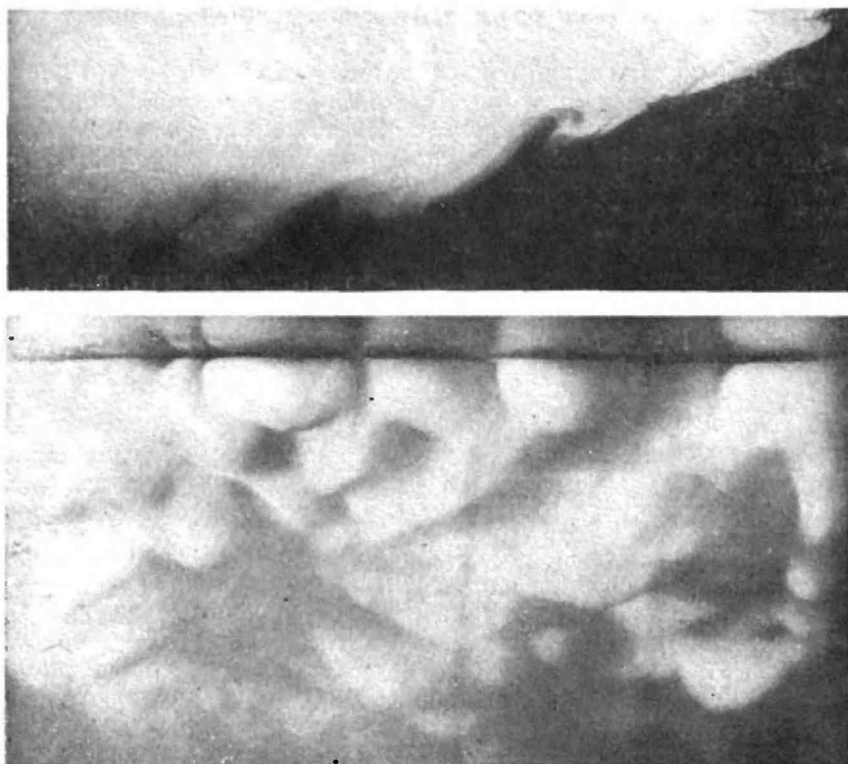


Рис. 9.9.2. Модельный эксперимент Г. О. Ануара.

В отличие от экспериментов Симпсона (1969) легкая подбеленная жидкость движется вдоль свободной поверхности воды в резервуаре. Представлены виды сбоку и спереди. Из-за отсутствия трения на границе завихрения меньше, чем в случае твердой границы (Симпсон, 1972). На обоих снимках можно видеть отражение от свободной поверхности. (Фотоснимок любезно предоставлен Hydraulics Research Laboratory.)

только в пределах нескольких метров, если нет сильного ветра. Когда есть заметный ветер, бриз над сушей производит незначительный эффект. Однако бризы над сушей могут вызывать важные последствия, например перемещая полосы тумана от побережья. Обычно они возникают ранним утром, втягиваются на сушу и испаряются в течение первой половины дня. Это — обычное явление на западных побережьях Средиземного моря, в частности вблизи Гибралтара.

Похожие потоки возникают, когда снежные лавины, поднимая снег с поверхности, охлаждают воздух. Поток воздуха, выходящий из зоны ливня, также имеет отчетливо выраженные фронты; наиболее впечатляющее зрелище такого рода дают

самумы, наблюдающиеся в Судане. Ливни, порождающие эти самумы, происходят на расстоянии, может быть, 100 миль; об этих ливнях могут и не подозревать те, кто попал в самум.

Воздушные массы проходят через фронт морского бриза в течение малой доли суток, а восходящие потоки имеют скорость 3 м/с и выше. Следовательно, силы Кориолиса не имеют особого влияния на детали этого процесса. Однако направление движения воздуха на побережье заметно меняется после нескольких часов действия морского бриза. Поэтому формула (4.8.3) для наклона фронта здесь неприменима. Из-за движения холодного воздуха наклон равен не  $60^\circ$ , как следует из рис. 2.4.2, а. Наблюдается различных размеров выступающая зона, которую можно объяснить вязким сопротивлением нижней границы.

## 9.10. Скос потока и инверсионный след самолета

При полете самолета возникает скошенный нисходящий поток, который создает два противоположно направленных перемещающихся вихря одинаковой интенсивности. В левой части рис. 9.10.1 показаны линии тока этого движения в системе координат, связанной с неподвижной средой. В правой части этого рисунка движение изображено в системе координат, связанной с вихрями. Из правой части рисунка видно, что вокруг вихря возникает циркуляционная зона, воздух в которой циркулирует относительно вихрей и опускается вместе с ним. Окружающая среда обтекает этот объем, как если бы он был твердым телом.

В безразлично стратифицированной атмосфере вихри могут опускаться до земли. Здесь они попадают под влияние генерируемых ими сопряженных вихрей, которые вынуждают их двигаться раздельно вблизи земной поверхности. Но обычно еще до этого вихри разрушаются под действием внешней турбулентности и собственной неустойчивости. Концевые вихри самолета обычно имеют осевую составляющую скорости, которая зависит от расстояния до оси вихря. В соответствии с разд. 3.10 это ведет к неустойчивости и распаду вихрей. Кроме того, пара вихрей тоже нестабильна, поскольку возникшие синусоидальные возмущения будут расти. Такое возмущение бывает наиболее нестабильным в плоскостях, расположенных под углом в  $45^\circ$  к плоскости, содержащей эти вихри. Поэтому те части вихрей, которые сближаются и смещаются вниз, испытывают ускорение в этом направлении. Указанный результат следует из теории малых возмущений. В случае больших возмущений



продолжать вычисления из-за ряда сложностей становится невозможным.

Над основанием облака атмосфера устойчиво стратифицирована, а это означает, что, опустившись вниз на некоторое расстояние, воздух в циркуляционной зоне приобретает плавучесть. Вследствие этого на внешней границе зоны возникает скачок плотности, что порождает там вихревой слой. В левой

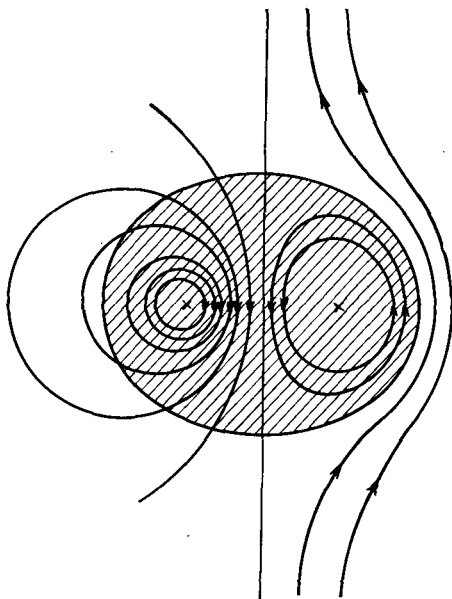


Рис. 9.10.1. Линии тока течения, порожденного двумя параллельными линейными вихрями.

Справа представлено течение относительно вихря, слева — относительно невозмущенной жидкости. Заштрихованная площадь показывает циркуляционную зону, жидкость в которой перемещается вместе с вихрями.

части рис. 9.10.2 показано направление вектора завихренности. Абсолютная величина вектора завихренности возрастает от 0 в нижней точке границы до максимума в верхней ее точке по мере обтекания циркуляционной зоны средой.

Спустя некоторое время завихренность на границе становится столь большой, что меняет картину движения. Чтобы определить значение завихренности, нужно проинтегрировать уравнение (6.3.4), используя уравнение (6.3.5). Оба эти уравнения были выведены в предположении, что ускорение воздуха пренебрежимо мало по сравнению с ускорением силы тяжести. Это предположение, действительно, почти не ограничивает общности рассмотрения, поскольку воздух ускоряется в основном за счет кривизны течения, а ускорение почти нормально к поверхностям равной плотности. Следовательно, ускорение почти не увеличивает завихренность. Поэтому на высоте  $z$

относительно плоскости, содержащей пару вихрей, завихренность описывается выражением

$$\eta = \frac{g^3_0}{q_0} (z + \sqrt{3}R). \quad (9.10.1)$$

Константа в формуле появляется потому, что в нижней точке торможения  $S$  (рис. 9.10.2), где  $z = -\sqrt{3}R$ , завихренность

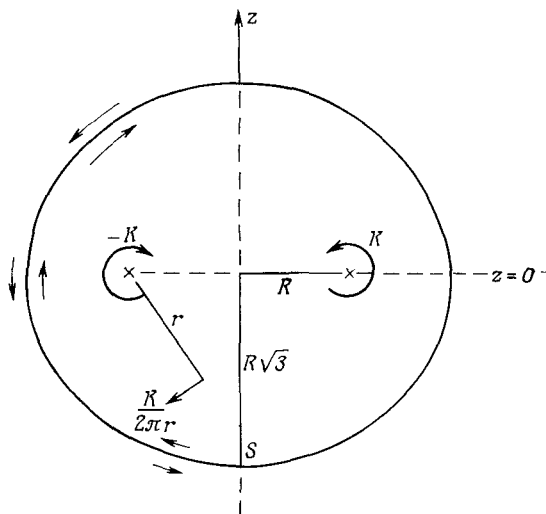


Рис. 9.10.2. Система координат для пары вихрей с циркуляцией  $\pm K$ , разнесенных на расстояние  $2R$ .

$S$  — нижняя точка торможения на границе циркуляционной зоны. Она движется вниз с той же скоростью, что и вихри. Завихренность, порожденная на границе разрывом плотности, возрастает, когда воздух движется вдоль границы от нижней точки торможения к верхней.

равна 0 (в этой точке направленные вниз скорости движения воздуха и вихрей равны). В подвижной системе отсчета, связанной с вихрями,  $q$  представляет собой компоненту скорости сопровождающего вихри воздуха, направленную вдоль его границы. Каждый из двух вихрей создает поле тангенциальных скоростей, имеющих величину  $K/2\pi r$  на расстоянии  $r$  от него.

Предположим, что скачок плотности  $\Delta\rho$  приблизительно остается постоянным вдоль границы (это не совсем строго, в частности, из-за того, что есть движения вверх и вниз, которые появляются во внешнем стратифицированном воздухе). Завихренность переходного слоя на границе получается тогда умножением (9.10.1) на толщину слоя  $\delta$ , если она мала.

Подставив

$$\eta\delta = H \quad (9.10.2)$$

и

$$\beta_0 = \frac{\Delta\rho}{\rho}, \quad (9.10.3)$$

получим, что  $H$ , завихренность на единицу длины границы (размерность длина/время), равна

$$H = \frac{g \Delta\rho}{q_0 \rho} (z + \sqrt{3}R). \quad (9.10.4)$$

Проинтегрируем по всему пограничному слою эффект воздействия завихренности на воздух, сопровождающий вихрь. Это позволит определить для конкретной точки дополнительную скорость, приобретенную сопровождающим воздухом за счет завихренности. На границе величина  $z$  пропорциональна  $R$  и функции положения, характеризующей геометрическую форму системы. Длина границы также пропорциональна  $R$ . До выполнения интегрирования проведем некоторые оценки качественного характера. В зоне левого вихря горизонтальная компонента скорости, вызванная завихренностью левой половины пограничного слоя, оказывается больше, чем направленная навстречу ей горизонтальная компонента, обусловленная завихренностью правой половины. Точки верхнего левого квадранта характеризуются большей завихренностью, чем соответствующие точки нижнего левого квадранта, а так как это вызывает движение левого вихря вправо, то в результате вихри будут перемещаться навстречу друг другу. Вследствие этого каждый из них будет вынуждать другой вихрь опускаться быстрее. Завихренность элемента границы  $H$  порождает скорость, пропорциональную  $H/R$ , а после интегрирования вдоль границы суммарный эффект получается пропорциональным  $RH/R$ . Таким образом,

$$\frac{dR}{dt} \sim -H \sim -g \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{R}{q_0} \sim -g \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{R^2}{K}, \quad (9.10.5)$$

поскольку скорость  $q_0$  на границе, обусловленная в основном завихренностью, пропорциональна  $K/R$ .

Если теперь предположить, что стратификация окружающей среды устойчива, а показатель устойчивости равен  $\beta$ , то для системы вихрей, опускающихся со скоростью  $K/R$ , приращение плотности задается выражением

$$\frac{d}{dt} \left( g \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \sim g\beta \frac{K}{R}. \quad (9.10.6)$$

Тогда из (9.10.5) получим

$$g\beta \frac{K}{R} \sim \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{R^2} \frac{dR}{dt} \right), \quad (9.10.7)$$

т. е.

$$g\beta \frac{1}{R} \sim \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{R},$$

так что

$$R \sim R_1 e^{-\alpha \sqrt{g\beta} t}. \quad (9.10.8)$$

Здесь  $R_1$  — начальное значение  $R$ , а  $\alpha$  — определяемая геометрией системы константа, которую мы здесь оценивать не будем.

Очевидно, что рассматриваемая система не может существовать долго. Если  $R$  убывает, то скорость опускания воздушной массы и  $\Delta\rho$  увеличиваются до тех пор, пока разность плотностей  $\Delta\rho$  не становится столь большой, что возникают важные эффекты, обусловленные завихренностью пограничного слоя, которые будут рассмотрены несколько ниже.

Скорером и Давенпортом был использован другой подход. Они следовали идее, выдвинутой Тернером в результате изучения всплывающих вихревых колец, которое описано в его книге *Upwancy effects in fluids*. Согласно этому подходу направленная вниз компонента количества движения системы вихрей равна  $2\rho KR$  [см. Ламб, 1932, § 152, уравнение (6)]. Поскольку на объем сопровождающего воздуха действует направленная вверх архимедова сила, эта компонента убывает. Так как величина  $K$  постоянна, то должно убывать и  $R$ . Если пренебречь влиянием завихренности в пограничном слое на вертикальную компоненту количества движения циркуляционной зоны, то получим зависимость

$$R = R_1 \operatorname{sech} \frac{\sqrt{mg\beta}}{2\sqrt{2\pi}} t, \quad (9.10.9)$$

которая похожа на выражение (9.10.8), за исключением моментов времени вблизи  $t = 0$ . Число  $m$  определяется так, чтобы величина  $mR^2$  представляла собой площадь поперечного сечения циркуляционной зоны. Оно равно 11,5. Поэтому можно положить  $\alpha$  равным  $(11,5/8\pi)^{1/2}$ , т. е. 0,68.

Наличие завихренности в пограничном слое вызывает смещение верхней точки торможения внутрь циркуляционной зоны. Поэтому часть воздуха, содержащая новую завихренность, упрется, так что объем циркуляционной зоны уменьшается, а вихри сближаются. На рис. 9.10.3 показаны линии тока для этой ситуации.

По мере того как вихревое движение усиливается в направлении первоначальной точки торможения  $S$ , поле скоростей трансформируется и перемещается вверх в тонком двойном вихревом слое. Суммарная завихренность этого слоя равна 0, и он скоро уничтожается вследствие того, что противоположно на-

правленные и равные по абсолютной величине вихри находятся в нем близко друг от друга.

Однако вихревой слой нестабилен. С увеличением завихренности он утолщается и от него отделяются валы. Скорер и Да-

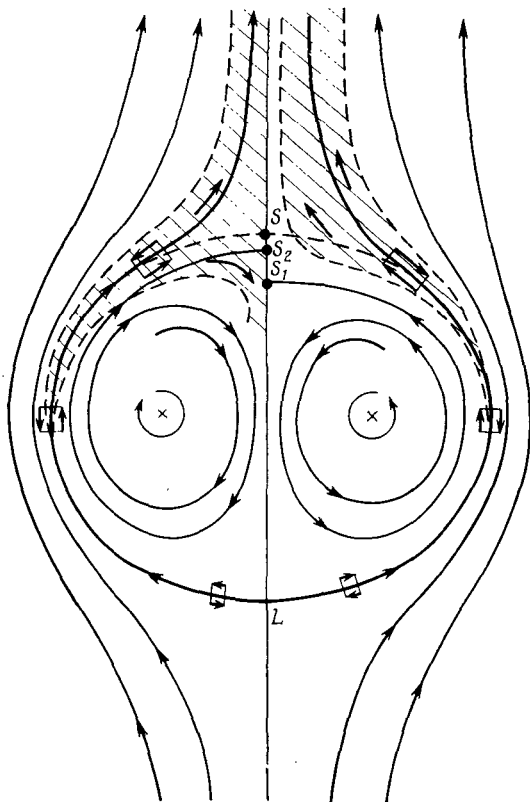


Рис. 9.10.3. Образование завихренности на границе циркуляционной зоны.

Завихренность уносится с вершины циркуляционной зоны, когда верхняя точка торможения опускается из своего первоначального положения  $S$  в положение  $S_1$ . Заштрихованная область представляет собой слой смешения, возникающий вследствие неустойчивости вихревого слоя на границе. Большая его часть уносится, как показано в правой части рисунка. Но если точка торможения поднимается и положение  $S_2$ , то часть слоя смешения может вновь захватываться циркуляционной зоной.

венпорт (1970) показали, что хотя точка торможения и опускается первоначально в положение  $S_1$ , так что весь слой смешения будет поддерживаться за счет восходящего (в системе координат, связанной с вихрями) движения, однако через некоторое время (которое для типичной атмосферной стратификации равно примерно 2 мин) точка торможения опять должна

подняться вверх. Одновременно вихревой слой утолщается. Вследствие этого часть смешиваемого воздуха начинает поступать в середину циркуляционной зоны, как показано в левой части рис. 9.10.3, где точка торможения находится в положении  $S_2$ . Как только это произошло, движение циркуляционной зоны становится неустойчивым. (Неустойчивость такого рода описана в разд. 3.11 и представлена на рис. 3.11.2.)

Напомним теперь, что первоначальная пара вихрей была неустойчивой по отношению к синусоидальным возмущениям даже до того, как плавучесть начала играть важную роль. Поэтому малые возмущения должны были бы возрастать. Однако, так как по (9.10.8)  $R$  убывает (и, следовательно, экспоненциально возрастает вертикальная скорость вихрей  $K/2\pi R$ ), указанные возмущения вызываются только архимедовыми силами и по наблюдениям просто невозможно различить эти два эффекта. Данная теория может быть использована и для описания конденсационного следа, наблюдающегося за самолетами. Поскольку для этого требуется обсуждение физики конденсации, соответствующая часть вопроса будет рассмотрена в разд. 11.3 и 11.4.

Более приближенно динамику процесса недавно исследовала Хилл (1975) с использованием численных методов. Картина явления была рассчитана ею до момента отрыва вихревого слоя.

### 10.1. Общие принципы

Теория диффузии вводила в заблуждение многих авторов. Они исходили из предположения, что рассеяние определяется диффузией, а диффузия лучше всего характеризуется коэффициентом диффузии. Далее в полном объеме можно было использовать теорию переноса. Возражением против данного подхода является то, что пока неизвестно, каким именно должен быть этот коэффициент, поскольку он очень сильно меняется во времени и пространстве. Во всяком случае, первоначально предполагается, что движение, рассеивающее загрязняющие вещества, связано только с атмосферными процессами, а сами загрязняющие вещества ведут себя пассивно. В ситуациях, когда выбрасываются загрязняющие вещества, обладающие значительной плавучестью, это неверно, поскольку основной причиной разбавления таких загрязняющих веществ является именно наличие у них плавучести.

Принцип аналогии Рейнольдса, гласящий, что количество движения и масса разбавляются одинаково, успешно применяется в теории частично турбулентных течений, так как для таких течений он находится в большем или меньшем соответствии с действительностью. Однако это может оказаться совершенно неверным в применении к полностью турбулизованному движению, каким является ветер, или к таким объектам, как термики, клубы и напорные струи, для которых не существует постоянных средних значений параметров. Например, в разд 9.6 показано, что отношение коэффициента вертикального переноса тепла или вещества к коэффициенту вертикального переноса горизонтального импульса может изменяться от случая к случаю в 100 и более раз. Многие исследователи не отдают себе отчет в том, что легче просто измерить распределение загрязняющих веществ, чем сначала измерять турбулентные характеристики движения воздуха и только потом прогнозировать распределение загрязняющих веществ на основе некоторой теории. Поскольку сами коэффициенты, используемые в теории, рассчитываются на основании измерений загрязнения воздуха, такое прогнозирование часто оказывается бесцельным, так как не выявляет

сущности процессов. При этом предположение о том, что перенос осуществляется вихрями, даже не проверяется, а только вычисляются коэффициенты, при помощи которых процесс описывался бы, если бы ожидаемое распределение было получено в результате некоторого рода диффузии под действием вихрей.

Действительно, рассеяние вызывается движениями, которые могут быть названы вихревыми. Можно предположить, что интервал времени или объем пространства наблюдений охватывает достаточно большое число этих вихрей, чтобы можно было использовать статистический подход. Однако и этот подход может оказаться неэффективным, поскольку временной масштаб флуктуаций не ограничен. Необходимо учитывать, что при исследовании загрязнений воздуха время отбора проб всегда влияет на значение полученной концентрации, так что предположение о применимости теории турбулентной диффузии некорректно.

Если подойти к диффузионным теориям без предубеждения, то оказывается, что они сводятся к определению коэффициентов диффузии, наличие которых позволяет провести анализ и получить результат, который можно сопоставить (обычно весьма приближенно) с имеющимися измерениями. Данные таких измерений всегда характеризуются столь большими разбросами, что не могут обеспечить проверку какой бы то ни было гипотезы. Такие измерения обычно относятся к набору ситуаций, когда погодные условия были различными, а потому скорости переноса также различались. Большая часть экспериментов проводилась на уровне земли с подветренной стороны от полностью изолированной трубы, а теория используется для описания диффузии загрязняющих веществ от приподнятого источника. Поскольку для большинства случаев вертикальный профиль концентраций не измерялся, коэффициент диффузии по вертикали просто берется таким, чтобы при расчетах получался правильный результат. Ряд измерений концентрации  $\text{SO}_2$  был проведен при полном незнании коэффициента поглощения ее подстилающей поверхностью, так что ряд исследований такого рода оказался плодом чистой фантазии. Обычно результаты расчетов оказываются не совсем бессмысленными, но только потому, что иными и быть не могут. Загрязняющие вещества так или иначе должны куда-нибудь распространяться, так что просто из принципа неразрывности следует, что при реалистичных предположениях их концентрация оценивается с ошибкой в 2—3 раза. Поскольку результаты наблюдений повсюду варьируются в тех же пределах, исследователь оказывается в ситуации, когда он просто не может сильно ошибиться.

История вопроса показывает, что лабораторный подход



сильно страдал надуманностью. Модельные ситуации подбирались, исходя из их предполагаемой простоты. Всегда считалось, по крайней мере некоторыми исследователями, что такие характеристики воздушного течения, как статическая устойчивость и сдвиг ветра, сильно влияют на процесс разбавления загрязняющих веществ. Делалось много попыток ввести один или два дополнительных параметра, позволяющих описать разнообразие ситуаций. По-видимому, лучше всего для этого подходят параметр  $n$  Саттона и «категории устойчивости» Пасквилла. Эпигоны этих действительно оригинальных авторов с унылой монотонностью повторяют те же рутинные операции, как будто сам факт рассмотрения определенной ситуации или привычка узаконивают процедуру. Поэтому дальше мы не будем касаться данного вопроса. Следует, однако, отметить, что любое усложнение теории, предполагающее принимать в расчет то, что иногда называют многозначительно «метеорологическими параметрами», может дать в результате только очень грубые оценки. Это происходит потому, что все сложности распределения различных физических величин предполагается описать одной-двумя величинами, чего никак нельзя сделать, если нет возможности точно предсказывать такие метеорологические параметры. Поэтому для выполнения процедуры в целом нужно либо обеспечить прогноз метеорологических параметров, который, возможно, неосуществим, либо предположить, что можно пользоваться климатологическими данными. Обычно климатологические данные собирают в течение нескольких лет, а когда приходится давать им оценку, выясняется, что наиболее полезными из них являются данные, полученные как раз по загрязняющим веществам.

Это происходит потому, что источники загрязнения претерпели большие изменения за те несколько десятков лет, которые потребовались для того, чтобы определить нормы атмосферных параметров. Более того, топография поверхности и распределение источников загрязнения сделали почти невозможным применение диффузионных теорий на практике. Это привело к созданию новых теорий, в частности теорий баланса загрязняющих веществ, которые грубы в предельных случаях, но реалистичны в своей простоте. Они представляют собой простое математическое выражение принципа неразрывности, из которого следует, что загрязняющие вещества либо остаются вблизи источника, либо переносятся в соседние области пространства, либо могут быть разбавлены в большом объеме путем подъема и перемешивания в вышележащих слоях.

Пока отсутствует общая теория для таких вычислений, поскольку в каждом конкретном случае подбор учитываемых факторов в известном смысле произволен и определяется исследова-

телем (который привлекает только те данные, которые он имеет или считает важными). Эти вычисления могут учитывать химические реакции, которые меняются в зависимости как от времени суток, если они связаны с ситуацией типа «Лос-Анджелесского смога», так и от характера поглощения подстилающей поверхностью в областях, где господствует загрязнение двуокисью серы. Детальность рассмотрения источников и стоков разнообразных загрязняющих веществ зависит от детальности имеющейся исходной информации. Используемые концепции метеорологии и механики жидкости обычно довольно элементарны, но техника вычислений может быть прямо-таки изощренной. Этот подход типичен для представителей кабинетной культуры, самоуверенно полагающих, что мы отличаемся от своих менее цивилизованных предков скорее умственными способностями, чем количеством потребляемой энергии.

В данной главе мы намерены выделить суть рассматриваемых процессов и проанализировать методы, используемые для описания этих процессов. Мы намерены не столько предлагать уже готовые методы вычислений рассеяния загрязняющих веществ, сколько проверять применимость идей, чтобы читатель мог более сознательно делать выбор между методами и отчетливо понимать, о чем в действительности говорит нам какое-либо вычисление. Можно сослаться на мою книгу *Air Pollution*, где имеется более полный обзор некоторых метеорологических явлений, которые оказывают существенное воздействие на рассеяние загрязняющих веществ, и на книгу д-ра Пасквилла *Atmospheric Diffusion*, в которой дано исчерпывающее рассмотрение вопроса.

Для инженеров и проектировщиков обычно не ясно, насколько в действительности мало пользы от диффузионных теорий при исследовании загрязнения атмосферы. Эти теории во многих проектах подменяли собой знание, так что можно сказать, что их сделали полезными. Тем не менее они были чрезвычайно усложнены, опирались на внушительно выглядявшие формулы и требовали применения мощной вычислительной техники, что часто приводило к необходимости регистрировать и обрабатывать огромное количество данных. Все это настолько задурманивает сознание, что только очень немногие исследователи способны сохранить трезвый взгляд на вещи, выполняя такого рода «исследования». Однако трезвый взгляд здесь необходим, поскольку использование сложной вычислительной процедуры не заменяет необходимости разобраться в сути явления. А она сводится в общем к довольно простой модели: изолированная труба, находящаяся на плоскости в поле стационарного ветра, выбрасывает известное количество загрязняющих веществ, обладающих плавучестью. Рассмотрим эту модель.

## 10.2. Распространение загрязняющих веществ от трубы

Движение воздуха в естественных условиях почти всегда характеризуется большим числом Рейнольдса и малым числом Маха. Поэтому, при прочих равных условиях, оно происходит в режиме подобия при любой скорости ветра, за исключением случая, когда ветер слаб и изменчив. Суть режима подобия состоит в том, что объем воздуха, в который выбрасываются из трубы загрязняющие вещества, пропорционален скорости ветра  $U$ , так что концентрация  $P$  пропорциональна интенсивности выброса  $Q$  и обратно пропорциональна  $U$ .

Следующий шаг наших рассуждений будет обманчиво прост: поскольку в воздушном потоке присутствуют вихри всех масштабов, выясним, какой диапазон размеров вихрей наиболее важен. Для наблюдателя, находящегося на расстоянии  $d$  от источника, вихри масштаба  $d \times 10^{-3}$  не играют особой роли, так как они только слегка размывают внешнюю границу дымового шлейфа. Для него несущественны также вихри масштаба  $d \times 10^3$ , поскольку они только немного изменяют направление ветра. Вихри, с которыми наблюдатель должен считаться, имеют, главным образом, размеры от  $d \times 10^{-1}$  до  $d \times 10$ . Если предположить, что это верно для любого расстояния от источника и что в наличии имеются вихри всех размеров, то можно заключить, что вихри будут производить одинаковое действие по всей шкале масштабов. Следовательно, свободная дымовая струя будет распространяться вдоль конуса, и картина процесса на расстоянии  $nd$  от источника будет совершенно такой же, как на расстоянии  $d$ , но увеличенная в  $n$  раз. Из наличия у явления геометрического подобия следует, что концентрация загрязняющих веществ пропорциональна  $b^{i-2}$ , где  $b$  — диаметр конуса (рис. 10.2.1). Расстояние от источника несущественно, так как коэффициент разбавления зависит не от угла при вершине конуса, а только от диаметра конуса (в данном сечении). Конкретный анализ не должен зависеть от того, какую форму имеет струя — конуса или параболоида вращения, который получается при диффузии с постоянным коэффициентом турбулентной диффузии в поле равномерного ветра, поскольку концентрация в поперечном сечении струи остается пропорциональной  $b^{-2}$ .

На определенной стадии дымовой шлейф должен соприкоснуться с землей. Если загрязняющее вещество поглощается поверхностью, то его концентрация в шлейфе уменьшается. Если поглощение отсутствует, то загрязняющее вещество в шлейфе вблизи поверхности находится в такой концентрации, как если бы существовал фиктивный источник, симметричный действующему

относительно отражающей поверхности (рис. 10.2.2). Во всех точках с подветренной стороны, где шлейф соприкасается с землей, концентрация загрязняющих веществ будет вдвое больше той, которая была бы в тех же точках конуса при отсутствии отражающей поверхности. Такие загрязняющие вещества, как  $\text{SO}_2$ , медленно поглощаются грунтом или водной поверхностью, и можно ожидать, что измеренные концентрации в воздухе будут близки к тем, которые наблюдались бы при отсутствии частично поглощающей поверхности. Значение концен-

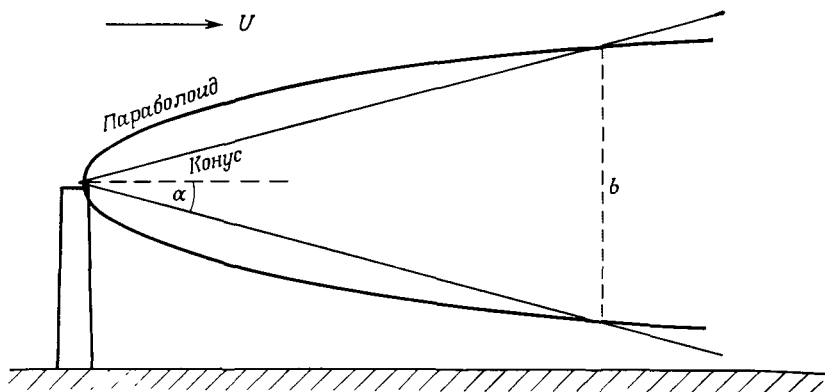


Рис. 10.2.1. Распространение загрязняющих веществ в конической и параболической струях.

трации очень сильно зависит от поглощающих свойств объектов, находящихся в непосредственной близости от измерительного прибора. Пожалуй, наиболее важным примером является изгородь, которая легко может уменьшить концентрацию  $\text{SO}_2$  в воздухе, проходящем через нее, в 2 раза.

Помня про эти сложности, отметим, что в наветренном от точки  $A$  направлении (рис. 10.2.2) загрязняющие вещества на уровне земли отсутствуют, а далеко вниз по потоку их концентрация в приземном слое убывает с расстоянием от источника. Следовательно, существует максимум концентрации на уровне земли  $P_{\text{макс}}$ , приходящийся на некоторую точку, расположенную по ветру относительно точки  $A$ ; точное ее расположение зависит от распределения загрязняющих веществ в поперечном сечении конуса. Предполагается, что это распределение также обладает геометрическим подобием на всех расстояниях от источника в силу схожести поведения упомянутых выше вихрей (однако позднее по этому поводу будут изложены дополнительные соображения), а величина максимума концентрации в профиле по вертикали убывает по мере расширения струи. На рис. 10.2.2

изображен профиль концентрации загрязняющих веществ в вертикальной плоскости, проходящей через источник, при условии полного отражения. Над подстилающей поверхностью на рисунке изображена кривая, показывающая профиль приземных концентраций с подветренной стороны от источника в центральной плоскости струи, а на рис. 10.2.3 представлена карта приземных концентраций в форме изолиний равной концентрации.

Действительная величина  $P_{\text{макс}}$  в точке  $M$  зависит только от

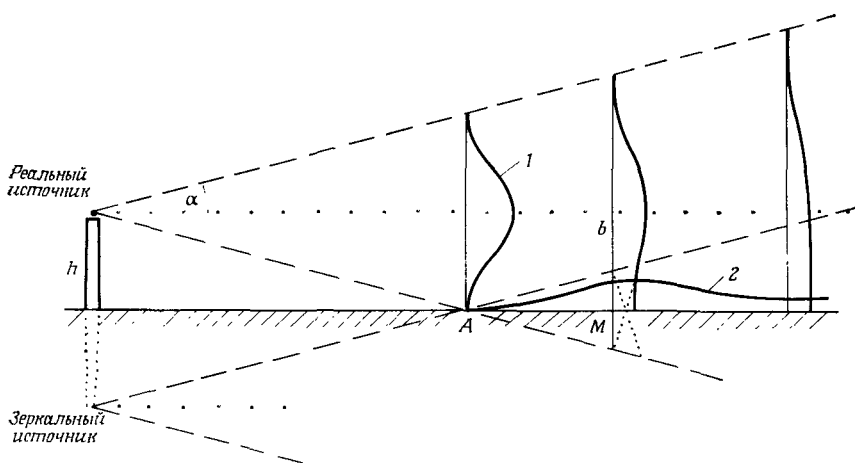


Рис. 10.2.2. Распространение загрязняющей примеси в струе над подстилающей поверхностью.

1 — профиль концентрации загрязнения в вертикальной плоскости; 2 — профиль концентрации загрязнения на уровне земли.

$b$  — диаметра конуса в точке  $M$ . Величина  $b$  пропорциональна высоте источника  $H$ ; коэффициент пропорциональности зависит от формы профиля концентрации в поперечном сечении струи. На рис. 10.2.2 и 10.2.3  $H$  равно высоте трубы  $h$  и  $P_{\text{макс}}$  пропорционально  $h^{-2}$ .

На практике многие источники загрязнения являются одновременно и источниками тепла. Архимедовы силы вызывают подъем выбрасываемых газов. Предположим, что этот подъем может быть охарактеризован высотой  $h'$ , которую мы назовем термическим подъемом. Вдали по ветру шлейф будет вести себя так, как если бы он был выброшен из некоторого источника где-то поблизости от действительного источника (рис. 10.2.4), а если считать, что точка  $M$  расположена достаточно далеко для этого в направлении по ветру, то можно просто сказать, что высота источника равна  $h+h'$ . Тогда получается формула для

максимальной концентрации в виде

$$P_{\max} = N \frac{Q}{U(h+h')^2}, \quad (10.2.1)$$

где  $N$  — числовой множитель, определяемый через угол при

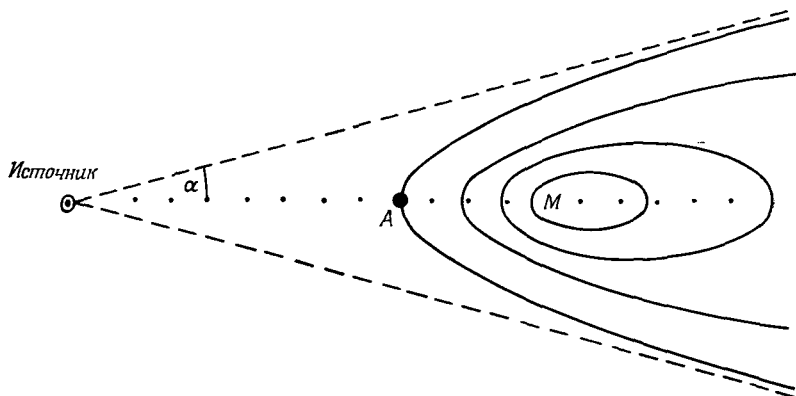


Рис. 10.2.3. Карта изолиний постоянной приземной концентрации примеси, выброшенной из высокой трубы.

Если ветер не меняется, то всюду вне области, ограниченной изолинией, проведенной через точку  $A$ , концентрации равны 0. В точке  $M$  находится максимум. Изолиния, проведенная через точку  $A$ , асимптотически приближается к границам угла  $\alpha$ , в котором распространяется струя.

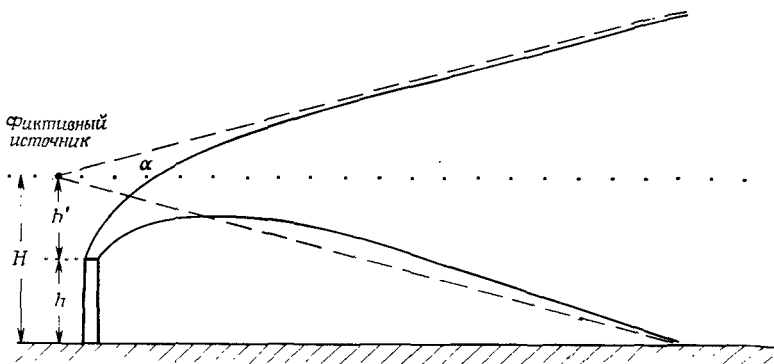


Рис. 10.2.4. Использование воображаемого источника для описания распространения всплывающей струи.

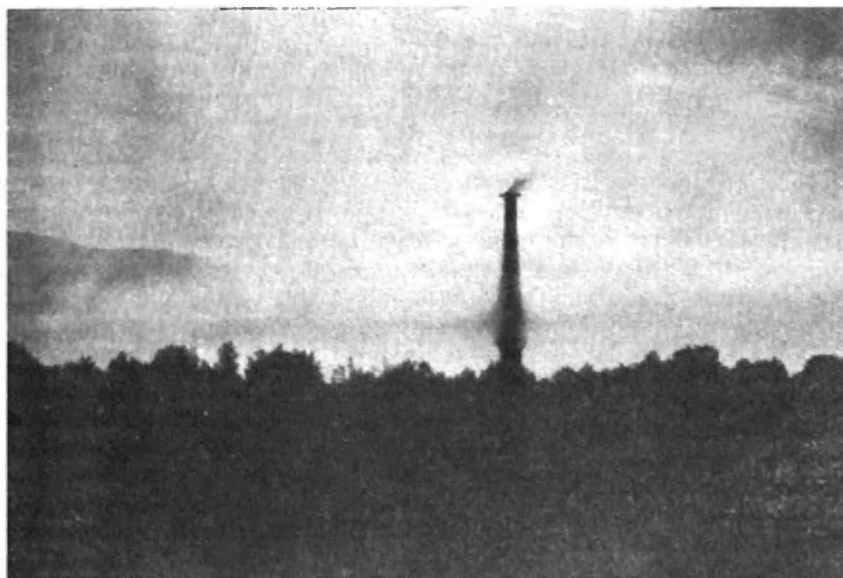
вершине конуса и профиль концентраций в поперечном сечении. Его величина составляет приблизительно 0,15, но в некоторых частных случаях эта величина может меняться от 0,05 до 0,5, особенно если величина  $h'$  точно не известна. Можно получить простую оценку, если предположить, что максимальная концен-

трация на уровне земли оказывается в точке, где концентрация примерно равна средней величине по поперечному сечению струи, а площадь этого сечения составляет  $\sim 2/3$  от площади круга радиусом  $3H/2$ . Поток загрязняющих веществ через всю площадь сечения равен  $Q$  и, следовательно, равен  $2/3\pi(9H^2/4)UP_{\max}$ , откуда находим, что  $N = 2/3\pi$ . Однако это означает лишь, что величина  $N$  находится, вероятно, в пределах от  $0,2 : 3$  до  $0,2 \times 3$ .

Формула (10.2.1) не бесполезна; она важна тогда, когда нужно подчеркнуть, что концентрация в приземном слое сильно уменьшается с увеличением высоты трубы. Следует, однако, заметить, что преимущество высоко расположенной точки истечения состоит также в том, что при устойчивой стратификации более высокие трубы чаще выносят дымовой шлейф над стабильным слоем, который в противном случае может запереть шлейф в пространстве вблизи земли (рис. 10.2.5).

Рис. 10.2.5. Высокая труба алюминиевого завода в долине Дюранс.

Верхняя часть трубы находится над слоем загрязненного воздуха, скопившегося ночью. Загрязняющие вещества были выброшены из многочисленных мелких источников в массу холодного воздуха, порожденную кatabатическим нисходящим воздушным течением с гор. Дымовой шлейф выпускается из трубы и поднимается вверх под действием собственной плавучести. Диск на вершине трубы иногда применяется для предотвращения возникновения флагообразной струи при малой скорости истечения.



### 10.3. Напорная струя и тепловой подъем

Если выбрасываемые из трубы газы нагреты, то они поднимаются выше, чем ненагретые. В настоящем разделе, основанном на работе автора (Скорер, 1959), предполагается, что влияние этого эффекта на приземную концентрацию загрязняющих веществ можно правильно описать, если в расчетных формулах добавить к высоте  $h$  величину  $h'$ . Однако этот простой метод нуждается в экспериментальной проверке.

Если конус имеет большой угол раствора, то дымовой шлейф касается земли совсем близко к трубе. Это может привести к тому, что максимум приземной концентрации окажется к трубе ближе, чем следует из теоретического описания теплового подъема, и, следовательно, в этом случае нужно скорректировать величину  $h'$ , присутствующую в формуле (10.2.1). Ввести определение величины  $h'$  пытались разными способами. Предлагали, например, считать, что это «высота, на которой ось шлейфа становится горизонтальной». Введенную таким образом величину  $h'$  измерить практически невозможно, а любое подобное определение зависит от того, как именно будет измеряться высота оси шлейфа. Сначала всплывающая струя из-за бифуркации похожа в сечении на двумерный термик (рис. 10.3.1 и 8.4.1); при этом никакие другие части термика, кроме вершины и основания, не поддаются ни измерению, ни определению. Затем всплывающая струя становится все больше похожа на струю, которая не обладает плавучестью и пассивно рассеивается окружающими вихрями в направлении по ветру. Следовательно, не существует простого определения, которое можно было бы использовать на практике для получения  $h'$ . Наша цель состоит в том, чтобы выяснить, от чего именно зависит  $h'$ , а как только окажется, что эта величина зависит от  $Q$  и  $U$ , то сразу станет ясно, что простота нашей формулы (10.2.1) вот-вот исчезнет. Искушение покончить с этой формулой и погрузиться в сумбур бесполезного академического исследования должно быть тщательно подавлено. В более сложных случаях мы не извлечем пользы из наличия более сложной формулы; в случае частично турбулизованного течения простая формула дает не менее удовлетворительные результаты. За всю историю создания формул для подъема струи усложнение не давало никаких преимуществ. Простые формулы могут помочь обнаружить суть явления; сложные же дают работу вычислительным машинам, но интерпретация их становится неясной.

Формула (8.11.11) предназначена для вычисления скорости истечения из трубы всплывающей напорной струи. В нее входят константы  $C$  и  $c$ , которые определяют, как будет вести себя струя: как свободная, как напорная или как нечто промежуточ-



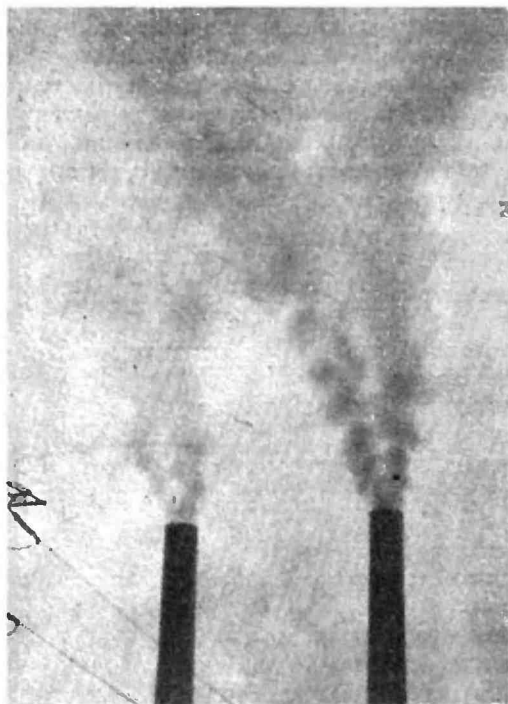


Рис. 10.3.1. Бифуркация изогнутых всплывающих струй за счет циркуляции, порожденной плавучестью.

В поперечном сечении такие струи похожи на двумерные термики.

ное. Эти константы определяются потоками импульса и плавучестью у выходного отверстия трубы.

Ясно, что горизонтальный ветер может заставить вытекающую струю изогнуться (рис. 10.3.2); можно предположить, что это происходит, если вертикальная составляющая скорости  $w$  равна  $\mu U$ , где  $U$  — скорость ветра, а  $\mu$  — числовой множитель, определяемый из наблюдений и примерно равный единице. Считается, что после изгиба струя приобретает скорость, равную скорости ветра, и что ее вертикальное поперечное сечение ведет себя подобно сечению двумерного цилиндрического термика или клуба.

Тепловой подъем осуществится в полной мере, когда вертикальная составляющая скорости, обусловленная архимедовыми силами, уменьшится до значения, имеющего тот же порядок, что и абсолютные величины скоростей внешних вихрей, которые мы представим в виде  $\lambda U$ . Здесь число  $\lambda$  обычно имеет порядок  $10^{-1}$ ,

если ветер дует над не очень шероховатой поверхностью, а стратификация воздушной массы безразлична. Если существуют крупные препятствия (такие, как на застроенных городских территориях), способные создавать большие вихри, или если вследствие солнечного тепла особенно активна термическая конвекция, то  $\lambda$  может быть много больше 0,1. В случае термической конвекции  $\lambda$  может достигать значения 0,4 или даже 1,0, если

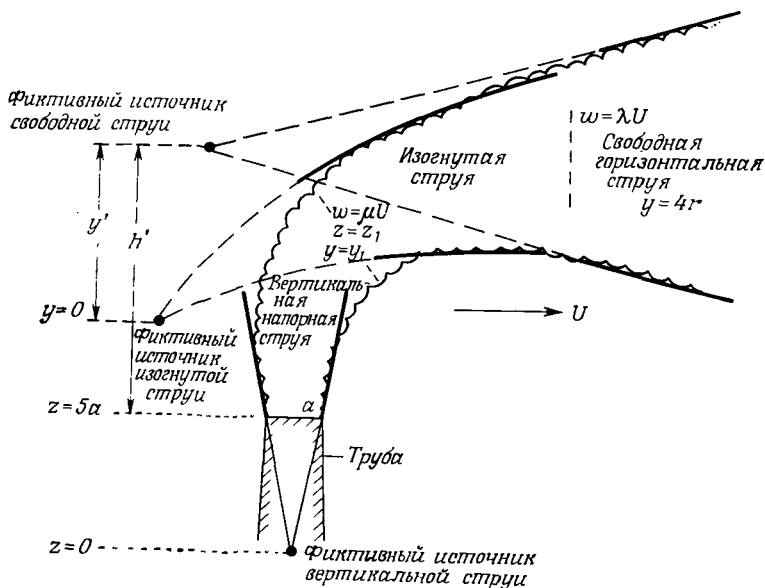


Рис. 10.3.2. Стадии рассеяния струи.

На стадии напорной струи фиктивный источник находится внутри струи. Струя становится изогнутой выше точки, где  $w = \mu U$  (в этой точке  $z = z_1$ ,  $y = y_1$ ). Она ведет себя подобно двумерному термику, пока  $w$  остается больше  $\lambda U$ ; ее фиктивный источник находится на высоте  $y = 0$ . При  $w < \lambda U$  струя становится массивной и диффундирует вдоль конуса, вершина которого находится на высоте  $h'$  от отверстия трубы, где  $y = y'$ .

имеется сочетание сильной конвекции и слабого ветра. В противоположном крайнем случае  $\lambda$  может быть порядка 0,001. Это случается, когда выход трубы расположен достаточно высоко над очень гладкой поверхностью или когда нижние слои очень устойчиво стратифицированы, как часто бывает ясным вечером. Если турбулентностью окружающей среды можно пренебречь вследствие ее незначительности, то тепловой подъем ограничивается только стратификацией среды, и шлейф обычно поднимается до уровня основания конвективных облаков. Причины этого разъяснены в разд. 10.9 и гл. 11.

Чтобы проиллюстрировать применяемый метод, возьмем сначала простейший случай нулевой плавучести. Пусть концентра-

дия загрязняющих веществ равна  $\sigma$ , а радиус выходного отверстия трубы равен  $a$ . Индекс 0 соответствует значениям рассматриваемых величин на выходе из трубы, а индекс 1 — их значениям на той высоте, где струя начинает изгибаться и  $\omega = \mu U$ . В изогнутой части струи вертикальная координата, обозначаемая  $y$ , отсчитывается от уровня, на котором был бы расположен фиктивный источник изогнутой струи. Как упомянуто в разд. 8.8 (см. также разд. 8.15), типичная величина  $n$  равна 4, так что ширина изогнутой части задается выражением

$$y = 4r. \quad (10.3.1)$$

В вертикальной части струн по (8.9.11) имеем

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 z_0 / z, & \omega_1 &= \mu U = \omega_0 z_0 / z_1, \\ \sigma &= \sigma_0 z_0 / z, & \sigma_1 &= \sigma_0 z_0 / z_1 = \sigma_0 \mu U / \omega_0, \\ & & z_1 &= z_0 \omega_0 / \mu U. \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Поток загрязняющих веществ определяется выражением

$$F = \sigma_0 \omega_0 \pi a^2. \quad (10.3.3)$$

В изогнутой части струи площадь сечения (см. разд. 8.15) принимается равной  $2,4r^2$ , так что поток загрязняющих веществ, движущихся со скоростью ветра  $U$ , равен

$$F = 2,4r^2 \sigma U. \quad (10.3.4)$$

Используя (10.3.1) и (10.3.3), получим

$$2,4 \left( \frac{y_1}{4} \right)^2 \frac{\sigma_0 \mu U}{\omega_0} U = \sigma_0 \omega_0 \pi a^2,$$

или

$$y_1 = 4 \left( \frac{\pi}{2,4\mu} \right)^{1/2} \frac{\omega_0 a}{U}. \quad (10.3.5)$$

Так как  $\sigma$  везде пропорционально  $\omega$ , то аналогичное рассуждение можно провести, исходя из соображений сохранения количества движения по вертикали.

Для изогнутой части струи в соответствии с (8.8.5) имеем

$$\omega = \omega_1 y_1^2 / y^2, \quad (10.3.6)$$

так что высота  $y'$ , на которой изогнутая напорная струя становится пассивной, т. е. свободной (где  $\omega = \lambda U$ ), задается выражением

$$y' = y_1 (\omega_1 / \lambda U)^{1/2} = 4 \left( \frac{\pi}{2,4\lambda} \right)^{1/2} \frac{\omega_0 a}{U} \simeq 4,5 \omega_0 a / \lambda^{1/2} U. \quad (10.3.7)$$

Если принять для напорной струи  $z_0 = 5a$ , т. е.  $n = 5$ , то высота

подъема от выходного отверстия трубы до того уровня, где струя становится пассивной, будет равна

$$h' = y' - y_1 + z_1 - z_0 = a \left[ \frac{\omega_0}{U} \left( \frac{4,5}{\lambda^{1/2}} - \frac{4,5}{\mu^{1/2}} + \frac{5}{\mu} \right) - 5 \right]. \quad (10.3.8)$$

Эта формула не годится для случая  $\omega_0 < U$ , т. е. когда струя загибается сразу у отверстия. Поэтому при анализе следует, по-видимому, считать, что  $h'$  положительно (так как  $\omega_0 > U$ ),  $\mu$  имеет порядок единицы, а  $\lambda$  много меньше. Если отверстие в трубе сужается, а объемный поток не меняется, то

$$\omega_0 a^2 = \text{const}, \quad (10.3.9)$$

так что убывание  $a$  эквивалентно возрастанию  $\omega_0$ . Это сильнее всего заметно при  $\lambda \ll \mu$ , что соответствует слабой турбулентности в среде. В этом наиболее показательном случае подъем напорной струи описывается формулой

$$h'_j \cong 4,5 \frac{\omega_0 a}{U \lambda^{1/2}}, \quad (10.3.10)$$

так что действие большой скорости истечения проявляется в подъеме воображаемого начала струи на высоту нескольких диаметров трубы. Учет этого явления при проектировании позволяет избежать захвата вытекающей струи вихрями с подветренной стороны от трубы. Когда струя все же захватывается, она называется *флагообразной*, поскольку похожа на флаг, висящий на трубе (рис. 10.3.3). Иногда ее называют также *провисшей струей*.

Для изгибающейся нефлагообразной струи на удалении от трубы, большем, чем ее высота, наиболее важным эффектом является подъем под действием плавучести. Влияние других малых факторов рассмотрено автором (Скорер, 1959). Вычислим теперь главную составляющую  $h'$ , а именно  $y'$ , для случая значительной плавучести. Это и будет тепловой подъем. В рассматриваемом случае, в соответствии с уже упоминавшимися в гл. 8 измерениями Ричардсона двумерных термиков, для изогнутой струи вместо (10.3.1) в грубом приближении имеем

$$y \cong 2r, \quad (10.3.11)$$

$$\omega = 1,0 (gBr)^{1/2}, \quad (10.3.12)$$

а поток плавучести  $F$  описывается выражением

$$F = 2,4r^2 gBU. \quad (10.3.13)$$

Полагая  $\omega = \lambda U$ ,  $y = y'$  и исключая  $B$  и  $r$ , получим, что величина теплового подъема равна

$$h'_b \cong y' = \frac{2F}{2,4\lambda^2 U^3} \cong 0,8F / \lambda^2 U^3. \quad (10.3.14)$$

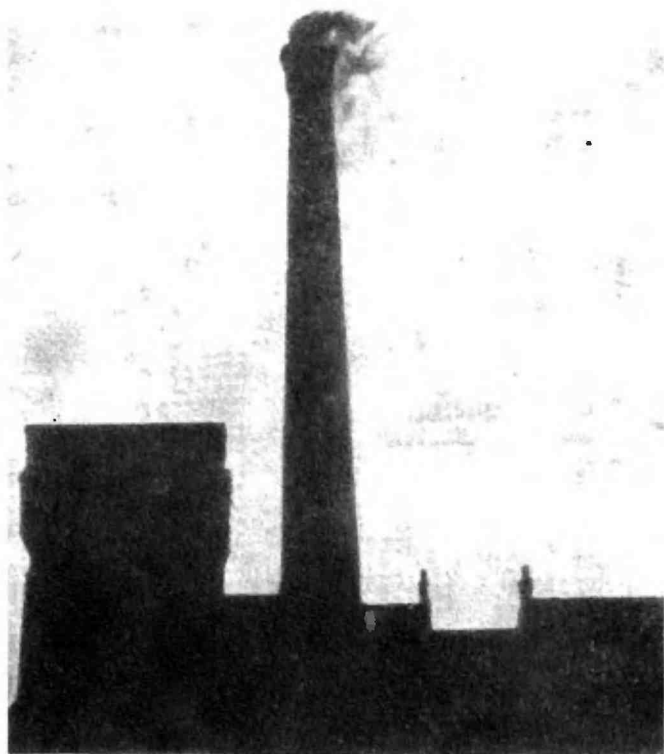


Рис 10.3.3. «Флагообразная» струя.

Скорость истечения недостаточно велика по сравнению со скоростью ветра для того, чтобы препятствовать затеканию дыма в ветровую тень трубы. Когда такое явление происходит часто, труба оказывается закопченной, а ее эффективная высота уменьшается.

В силу приближенности рассмотрения едва ли стоит включать в эту формулу величины  $y_1$ ,  $z_1$  и  $z_0$ . Так как у отверстия

$$F = \pi a^2 \omega_0 g B_0, \quad (10.3.15)$$

то величина  $h'$ , задаваемая выражением (10.3.14), превосходит величину, задаваемую формулой (10.3.10), в отношении

$$\frac{h'_b}{h_j} = \frac{0,8\pi a g B_0}{4,5\lambda^{3/2} U^2}, \quad (10.3.16)$$

и тепловой подъем играет большую роль, чем подъем за счет напорного истечения, если

$$g B_0 \gg 3\lambda^{3/2} U^2 / a. \quad (10.3.17)$$

Самым существенным фактором в двух последних формулах является сильная зависимость от величины  $\lambda$ , которая известна хуже всего. Но это не недостаток приведенных формул, а лишь указание на то, что высота подъема струи до ее изгиба сильно зависит от уровня внешней турбулентности. Этот факт не может быть обойден никакой другой теорией, за исключением такой, в которой величина  $h'$  определялась бы независимо от  $\lambda$ .

Из выражения (10.3.14) видно, что величина  $h'$  пропорциональна потоку плавучести  $F$ . Измерения, проведенные Лукасом с соавторами (1963), показывают, что для больших труб эта зависимость ближе к  $F^{1/4}$ . Впрочем, такая зависимость могла получиться и за счет их предположения, что  $h'$  связана с  $U$  степенной зависимостью, отличной от кубической, а также вследствие того, что более высокие трубы имеют большее значение  $F$ , а ветер, изгибающий струю, на больших высотах, как правило, сильнее. Более того, такая зависимость может быть связана с определением  $h'$ : например, если определить эту величину как высоту, достигаемую всплывающей струей на заданном удалении от источника (или спустя некоторое время после истечения), то в соответствии с (8.8.5) для двумерного термика имеем

$$r \sim t^{2/3}, \quad (10.3.18)$$

а расстояние, пройденное по ветру, задается формулой

$$x = Ut. \quad (10.3.19)$$

Следовательно, высота  $h'$ , достигаемая при  $t = T$  и  $X = UT$ , равна

$$h' \sim T^{2/3} \sim X^{2/3} U^{-2/3}, \quad (10.3.20)$$

что очень сильно отличается от выражения (10.3.14) показателем степени при  $U$ . Таким образом, для проверки любого предложенного для  $h'$  определения не существует адекватных измерений, и, наконец, явно невозможно исключить зависимость результатов измерений от неизвестной степени  $U$  и от способа, которым определяется  $h'$ . При нашем подходе, как и ожидалось, результаты сильно зависят от  $\lambda$ . На практике  $\lambda$ , вероятно, убывает с высотой, и это лишний раз подчеркивает преимущества высоких труб. Используя другие модели всплывающей струи, можно получить степени  $U$ , несколько отличающиеся от предложенных.

Из формулы (10.3.14) при  $B_0 = 0,3$ ,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $\omega_0 = 2 \times 10$  м/с,  $a = 3$  м (что типично для электростанций) и  $\lambda = 10^{-2}$ ,  $U = 3$  м/с (что естественно для ясного вечера, когда грунт начал охлаждаться) получаем  $h' = 170$  км. С другой стороны, при  $\lambda = 10^{-1}$  имеем  $h' = 1,7$  км. В любом случае подъем струи очень

большой, но при  $U = 10$  м/с получаем  $h' = 4,6$  км и 46 м (для  $\lambda = 10^{-2}$  и  $\lambda = 10^{-1}$  соответственно). Эти результаты вполне реальны, хотя надо учитывать, что не всегда существует слой безразлично стратифицированной атмосферы, толщина которого достаточна для такого подъема.

На практике, однако, струя диффундирует вниз под действием не мелких вихрей, а крупных. Следовательно, все теории, в которых важную роль играет рассчитанная величина  $h'$ , должны рассматриваться с большой долей скептицизма.

Бозанке отметил, что, если  $h' \sim U^{-1}$  (это согласуется с одним из его предположений), а ветер таков, что максимум приземной концентрации в соответствии с (10.2.1) достигает наибольшей величины, то значение  $h'$  равно  $h$ . Следовательно, трубу, выбрасывающую газы, обладающие плавучестью, всегда можно считать как бы вдвое выше, чем она есть на самом деле. Этот результат ( $h' = h$ ) не столько неверен, сколько просто не имеет отношения к действительности, поскольку представляет собой именно тот масштаб вихрей, превосходящих ширину струи, за счет которых в основном выброс и переносится к земле. На больших расстояниях высота трубы не оказывает существенного влияния на концентрацию загрязняющих веществ, в особенности если диффузия по направлению вверх ограничена стабильным слоем, который обычно располагается в основании облаков.

Далее, при  $h' \sim U^{-3}$  результатом подхода Бозанке при ветре, максимизирующем  $P_{\max}$ , будет величина  $h'$ , равная  $h/5$ ; это означает, что при вычислениях приземных концентраций загрязняющих веществ мы всегда можем добавить  $h/5$  к действительной высоте трубы. Этот результат сильно отличается от результата, полученного Бозанке, и ближе к реальности, хотя и остается бессмысленным, поскольку оба результата — и старый, и новый — явно не верны для случая бесконечно малой плавучести. Это показывает, что тепловой подъем неадекватно описывается функцией (10.2.1).

Вертикальная составляющая количества движения выбрасываемых из трубы газов для единичной массы у источника равна  $\omega_0$ . Приращение этой составляющей за время  $t$  после истечения вследствие плавучести  $gB_0$  равно  $gB_0 t$ . Эффект плавучести, следовательно, важнее, чем любые эффекты, возникающие за счет ненулевой скорости истечения, начиная с момента

$$t = \omega_0 / gB_0. \quad (10.3.21)$$

Для выбрасываемых газов, температура которых примерно на  $100^\circ\text{C}$  превышает температуру окружающей среды,  $B_0$  будет порядка  $1/3$ . Для скорости истечения порядка 10 м/с эффект плавучести начинает доминировать спустя  $\sim 3$  с после истечения,

или на расстоянии  $\sim 30$  м от трубы по ветру при ветре 10 м/с. Ясно, что для высоких труб плавучесть является единственной существенной причиной подъема струи.

#### 10.4. Опускание дымовой струи; влияние находящихся в струе капелек воды

Если дымовая струя в момент истечения содержит капельки воды, и те испаряются при перемешивании струи со средой, то

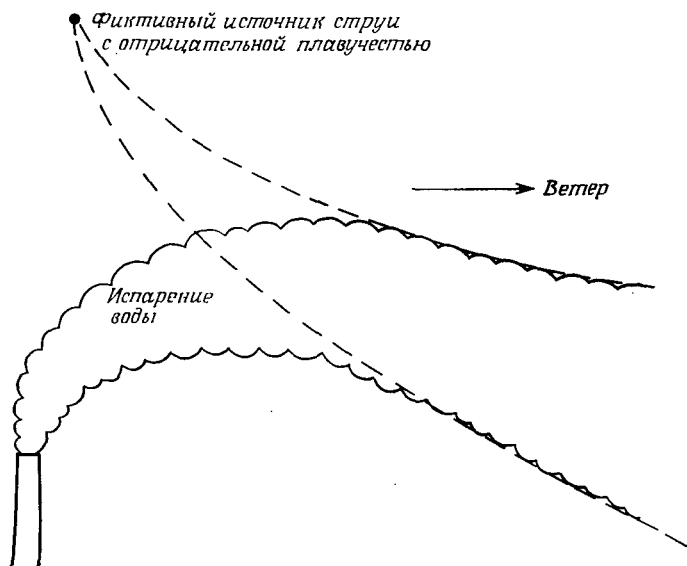


Рис. 10.4.1. Опускание струи с отрицательной плавучестью, обусловленной испарением воды.

Струя ведет себя так, как если бы она опускалась от некоторого фиктивного источника, расположенного выше отверстия трубы. Такое поведение струи обычно для тех случаев, когда загрязняющие вещества до выпуска из трубы удаляются из газов промывкой.

затрачивается скрытая теплота испарения, что может привести к появлению отрицательной плавучести. Дымовой шлейф тогда опускается к земле и ведет себя так, как если бы распространялась струя с отрицательной плавучестью (рис. 10.4.1) от некоторого воображаемого источника, расположенного выше действительного выходного отверстия трубы. На рис. 10.4.2 показано действие охлаждения. Изоплетами представлен дефицит температуры, который должны были бы иметь в воображаемом источнике выходящие газы, не содержащие жидкости, чтобы в струе после разбавления получился тот же дефицит темпера-



туры, который создается в реальной струе после испарения воды. На практике удобно считать, что изоплеты представляют собой коэффициент разбавления выходящих газов, соответст-

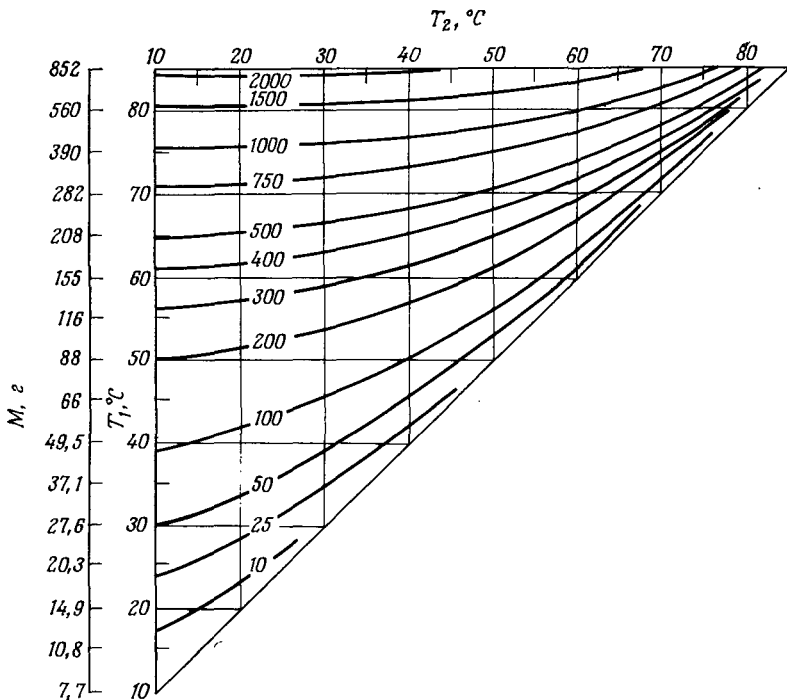


Рис. 10.4.2. Изоплеты, показывающие, на сколько градусов охлаждается струя в результате испарения воды, находящейся в ней в виде капель.

$T_1$  — температура газов в состоянии насыщения;  $T_2$  — температура, до которой они охлаждаются перед истечением в атмосферу; жидкая влага конденсируется в газах в виде облачка. В нной трактовке изоплеты показывают, во сколько раз вытекающие газы, содержащие жидкую влагу, должны быть разбавлены, чтобы оказаться на  $1^\circ\text{C}$  холоднее, чем разбавленные в том же отношении и обладающие теми же характеристиками газы, не содержащие жидкой влаги.

Например, если температура насыщения отходящих газов равна  $60^\circ\text{C}$ , а перед истечением они были охлаждены до  $33^\circ\text{C}$ , то после испарения жидкой влаги струя ведет себя так, как будто в точке истечения она была на  $300^\circ\text{C}$  холоднее. В нной трактовке можно считать, что газы, будучи после истечения разбавлены в 300 раз, окажутся на  $1^\circ\text{C}$  холоднее, чем газы, не содержавшие на момент истечения жидкой влаги.

Дополнительная шкала слева показывает массу воды в граммах на 1 кг воздуха при температуре насыщения  $T_1$ .

вующий дефициту температуры в струе  $1^\circ\text{C}$ . Обычно жидкая влага появляется в струе в результате промывки выходящих газов. При промывке вода испаряется, а газы охлаждаются за счет передачи тепла воде (вода на дне промывочной колонны теплее, чем при входе в нее). Дальнейшие потери тепла,

содержащегося в газах, происходят через стенки промывочной колонны. Результатом является конденсация тумана. На диаграмме рис. 10.4.2  $T_1$  — температура насыщения газов, а  $T_2$  — температура, до которой они охлаждаются к моменту истечения. Дополнительная шкала слева показывает массу воды, присутствующую в виде пара в 1 кг воздуха, насыщенного при температуре  $T_1$ ; отсюда можно получить массу воды, конденсирующуюся при охлаждении до температуры  $T_2$ . Обычно  $T_2$  порядка  $25^\circ\text{C}$ , а  $T_1$  порядка  $40^\circ\text{C}$ , и охлаждение за счет испарения жидкой влаги дает такой же эффект, как если бы выходящий газ был примерно на  $80^\circ\text{C}$  холоднее окружающего воздуха, что соответствует значению  $V_0 \simeq -1/3$ . Не удивительно, что такая струя опустится к земле на расстоянии 5—10 высот трубы, а при легком ветре — и ближе.

## 10.5. Дымовые струи в неподвижном воздухе под инверсией

С уменьшением выходного отверстия температура в дымовой струе, распространяющейся вертикально вверх, меняется по высоте. Дело, главным образом, состоит в том, что с уменьшением выходного отверстия воображаемый источник напорной струи поднимается выше, поэтому возрастает скорость истечения, а с ней и скорость разбавления выходящих газов. В конце концов, напорная струя превращается во всплывающую, согласно аргументации разд. 8.11, где соотношения между величинами  $\omega$ ,  $V$  и высотой  $z$  над источником представлены в виде формул (8.11.11) и (8.11.16). Используемая аргументация применима к дымовому шлейфу, несмотря на то, что в начальной стадии он представляет собой напорную струю. Единственная разница заключается в том, что вершина конуса, вдоль которого поднимается выходящий газ, расположена ниже верха трубы — не на расстоянии  $5a$ , а на расстоянии  $5a'$ , где  $a'$  — новый, уменьшенный радиус. Маловероятно, чтобы это имело какое-либо значение, если речь идет о преодоленной инверсии; то же самое может быть получено простым увеличением высоты трубы на величину  $5(a - a')$ . Это не должно увеличить тягу, требуемую для истечения газов.

## 10.6. Затекание холодного воздуха в трубу

Если держать бутылку с водой вверх дном, то при истечении воды воздух входит внутрь; но если открыть водопроводный кран, то скорость вытекающей воды обычно оказывается столь

большой, что не дает воздуху проникнуть внутрь крана. Таким образом, при уменьшении скорости истечения до некоторого уровня воздух должен начать втекать и внутрь крана. То же самое происходит у верхнего отверстия дымовой трубы: когда газ, обладающий большой плавучестью, выбрасывается с достаточно малой скоростью, холодный воздух извне может проникнуть в трубу. Холодный затекающий воздух по мере проникновения вниз перемешивается с теплым поднимающимся воздухом и в конце концов достигает такого уровня в трубе, ниже которого сильно уменьшившаяся отрицательная плавучесть смеси становится слишком малой, чтобы переносить газ против потока.

Это явление было исследовано Джоргом и Скорером (1967), которые нашли, что среднее значение пороговой скорости истечения газов, при которой начинается втекание холодного воздуха в трубу, зависит не только от плавучести, но и от профиля скорости. Если скорость в пограничном слое увеличивается за счет выравнивания ее профиля при фиксированном объемном расходе, то разность плотностей, необходимая для втекания холодного воздуха, возрастает. По этой причине никаких безразмерных соотношений получено не было, но ясно, что в турбулентном течении, как правило, определяющим фактором является не диаметр отверстия, а толщина пограничного слоя.

Расстояние  $d$ , преодоленное против основного потока в трубе втекающим воздухом, может быть найдено в грубом приближении из формулы

$$\frac{Bgv}{(d^2/D^2 + 8)^3 V^3} = 10^{-6}, \quad (10.6.1)$$

где  $D$  — диаметр трубы,  $V$  — средняя скорость потока в трубе далеко от выхода,  $B$  — плавучесть, а  $v$  — кинематическая вязкость. Хотя эта формула позволяет найти порядок величины пороговой скорости, когда при заданной плавучести  $Bd = 0$ , и дает представление о глубине проникновения затекающего воздуха, имеются существенные ограничения на диапазон используемых в ней величин. Эти ограничения связаны с тем, что оказывают влияние различные посторонние факторы, такие, как шероховатость внутренней стенки трубы, которые нужно принимать во внимание. На практике почти всегда имеется боковой ветер, и эксперименты показывают, что втекание происходит скорее сбоку, а не с подветренной или наветренной стороны выходного отверстия трубы.

Это явление может вызывать затруднения на практике. Так, точки на нефти или мазуте обычно являются источником специфического загрязнения: черной сажи, пропитанной серной кислотой. Особенно сильно это проявляется, когда при наличии метал-

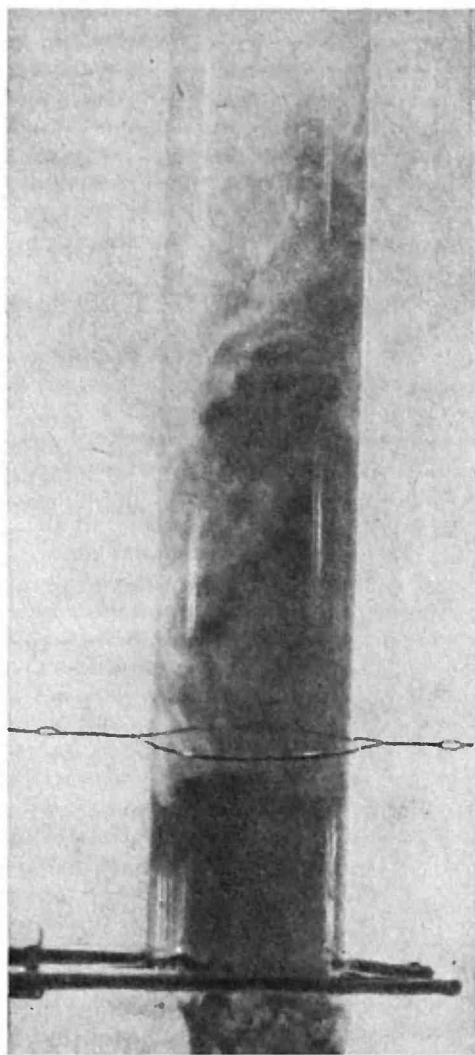


Рис. 10.6.1. Моделирование втекания холодных масс (Джордж и Скорер, 1967).

Соленая вода опускается в стеклянной трубке, которая погружена в резервуар с пресной водой. Вокруг открытого дна трубки имеется 6 струек красителя. Любое втекание менее плотной пресной воды в трубку увлекает за собой краситель, вследствие чего можно наблюдать проникновение пресной воды в соленую. В данном случае пресная вода проникла в глубь трубки несколько больше, чем на 4 ее диаметра.

лических вытяжных труб толки запускаются из холодного состояния. При низкой нагрузке скорости истечения выбрасываемых газов уменьшаются быстрее, чем плавучесть, а из формулы (10.6.1) следует, что тут-то и возможно втекание холодного воздуха снаружи. К тому же, когда втекание происходит в холодную погоду, оно может быть усилено охлаждением стенок трубы. В результате стенки трубы охлаждаются ниже точки конденсации  $H_2SO_4$ , и сажа, осевшая на внутренних стенках трубы, пропитывается кислотой. При последующем возрастании скорости истечения крупные частицы сажи, пропитанной кислотой, выносятся воздушным потоком. Вынесенная концентрированная серная кислота может оказаться причиной пожара или повреждения различных объектов. Предупредить это явление можно путем поддержания достаточно высокой скорости истечения и обеспечения такой теплоизоляции трубы, чтобы температура внутри нее была выше точки конденсации кислоты. Установлено, что неплоские выходные отверстия труб также уменьшают вероятность затекания холодных масс.

Хотя холодный воздух иногда втекает и в градирни, все же для градирен, имеющих форму гиперболоида, наиболее вероятен отрыв вытекающих газов от внутренней стенки на уровне минимального диаметра градирни. О втекании холодных масс и возможном их проникновении до дна градирни, в общем, известно очень мало. Однако, вероятно, это не очень существенная проблема, во всяком случае, из-за того, что на дне обычной градирни источники тепла распределены равномерно. Такое распределение источников тепла препятствует охлаждению значительной части объема вытекающих газов.

На рис. 10.6.1 показано экспериментальное устройство, с помощью которого была получена формула (10.6.1).

## 10.7. Разновидности дымовых струй

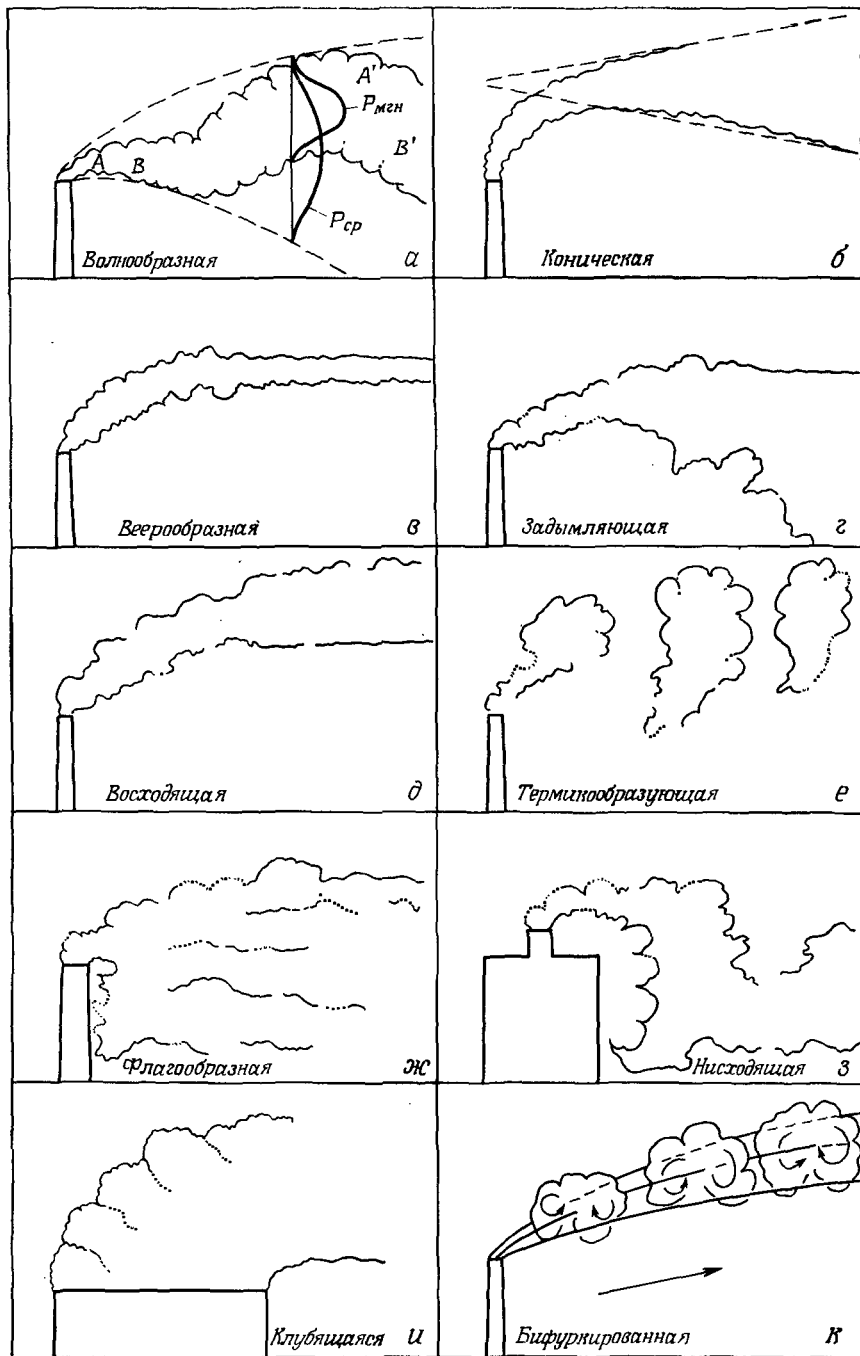
В результате наблюдений легко установить, что существует несколько форм дымовых струй. Целым рядом авторов был предложен следующий перечень различных форм, основанный на внешнем виде дымовых струй (рис. 10.7.1):

*Волнообразная,*

имеющая крупные регулярные изгибы; рассеяние происходит за счет крупномасштабных вихрей, превосходящих ширину струи.

*Коническая,*

имеющая непрерывно расширяющуюся зону смешения; рассеяние ее происходит за счет вихрей, размер которых значительно меньше ширины струи.



- Веерообразная* — рассеяние по горизонтали больше, чем по вертикали; шлейф достигает равновесной высоты в устойчиво стратифицированном воздушном потоке вскоре после истечения.
- Задымляющая* — рассеяние происходит только вниз; дымовой шлейф при этом остается под инверсионным слоем.
- Восходящая* — рассеяние происходит только вверх; высоты трубы достаточно, чтобы выходящий из нее поток оказался над инверсионным слоем.
- Термикообразующая* — выходящий поток разбивается на отдельные массы, так что теплый воздух из трубы либо образует собственные термики, либо вливается в уже существующие естественные.
- Имеются и другие разновидности, такие, как:
- Флагообразная (провисшая)* — выходящий поток увлекается вихрями к подветренной стороне трубы.
- Нисходящая* — выходящий поток время от времени увлекается к подветренной стороне здания, на котором расположена труба. Это — обычное явление для жилых домов.
- Клубящаяся* — регулярное формирование похожих на цветную капусту клубов дыма у наветренной стороны выходного отверстия трубы с периодичностью 1—5 клубов в секунду.

Рис. 10.7.1. Разновидности дымовых струй.

- а* — волнообразная. Длина волны велика по сравнению с шириной «мгновенной» (т. е. рассмотренной в фиксированный момент времени) струи; профиль концентрации «мгновенной» струи имеет больший максимум, чем профиль осредненных по времени концентраций для огибающего контура.
- б* — коническая. Типичный случай всплывающей струи, растущей вследствие перемешивания под действием малой турбулентности.
- в* — веерообразная. При взгляде со стороны видно, как всплывающая струя быстро достигает равновесной высоты в устойчиво стратифицированной среде. Часто «блуждает» в горизонтальной плоскости, если ветер слаб и изменчив (рис. 10.7.2).
- г* — задымляющая. Эта разновидность характерна для струи, застывающей в хорошо смешанном слое ниже устойчивого слоя. Если веерообразная струя распространяется вниз вследствие термической конвекции, обусловленной солнечным излучением, говорят, что земля задымлена.
- д* — восходящая. В этом случае струя поднимается за счет собственной плавучести выше устойчивого слоя, который ограничивает ее диффузией по направлению вниз.
- е* — термикообразующая. Когда термическая конвекция активна, струя расщепляется на отдельные клубы обособленными термиками, чья плавучесть превалирует над плавучестью струи.
- ж* — флагообразная. Струя втягивается в турбулентный след трубы и на расстоянии нескольких диаметров опускается на подветренную сторону трубы.
- з* — нисходящая. В этом случае струя втягивается в вихревую зону с подветренной стороны здания, на котором стоит труба.
- и* — клубящаяся. Периодические турбулентные флюктуации возникают у наветренной части выходного отверстия трубы.
- к* — бифуркированная. Всплывающая струя, изобразившая здесь в перспективе, имеет такое же поперечное сечение, как двумерный термик. Конические струи обычно бифуркированы.

*Бифуркированная*— благодаря прорыву атмосферного воздуха в ядро струи дымовая струя раздваивается, становясь в поперечном сечении похожей на цилиндрический (двумерный) термик.

Теперь рассмотрим подробнее эти разновидности.

Крупные завихрения, которые заставляют в сущности узкую струю блуждать внутри изогнутого конуса, могут либо отрываться от больших зданий или обрывов, либо порождаться термической конвекцией, обусловленной солнечным теплом<sup>1)</sup>. При построении формулы для расчета рассеяния такой струи считают, что она распределена внутри изогнутого конуса, поверхность которого является огибающей для нее. Частицы струи не перемещаются по волнообразным траекториям, но частица из точки  $A$  движется к точке  $A'$ , а из точки  $B$ — к  $B'$  (рис. 10.7.1);

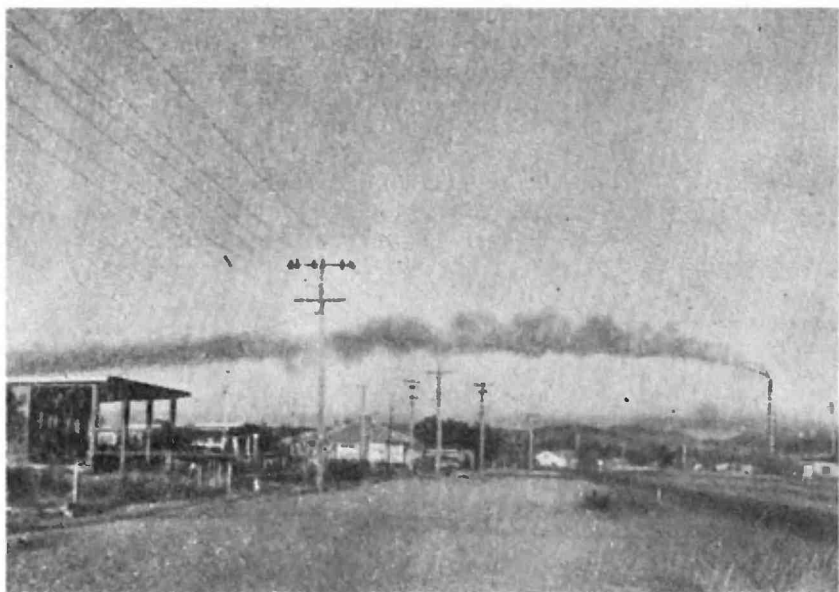


Рис. 10.7.2. Шлейф дыма из трубы горнообогатительной фабрики у горы Айза, Квинсленд, видимый ранним утром.

Перемешивание прекращается, когда струя достигает равновесной высоты. На большом расстоянии дымовой шлейф виден непосредственно над горизонтом. Примерно через 1 ч произошло задымление аэродрома.

<sup>1)</sup> Иногда употребляется термин «инсоляционная конвекция».— *Прим. перев.*



таким образом, изгибы струи движутся вдоль по ветру, тогда как сама струя расширяется существенно медленнее за счет завихрений, малых по сравнению с шириной струи. Вихри промежуточного масштаба отсутствуют, и это понятно, так как мелкие завихрения вызываются либо плавучестью струи, либо шероховатостью подстилающей поверхности, а большие генерируются термиками или отрываются от крупных препятствий.

*Конусообразная струя* обычно *бифуркирована* и поднимается вследствие собственной плавучести. То, что она имеет форму изогнутого конуса, видно только сбоку. Снизу же видно, что она явно бифуркирована (рис. 10.3.1). Действительно, струя, видимая снизу как бифуркированная, поднимается вверх благодаря собственной плавучести, и завихрения, перемешивающие ее с окружающим воздухом, возникают только благодаря плавучести, а не присутствуют в окружающем воздухе.

Если всплывающая струя попадает в сильно стратифицированный воздушный поток, она начинает бифуркировать (и становится конусообразной), но скоро достигает равновесной высоты и далее распространяется горизонтально. Для устойчивой стратификации наиболее характерны слабые ветры, направление которых по горизонтали может меняться, и тогда струя выглядит горизонтально блуждающей. Такое горизонтальное блуждание наблюдается нечасто, так что разновидность струй, называемая *веерообразной* (рис. 10.7.2), встречается редко.

Когда ветер очень слаб, дымовой шлейф поднимается вертикально, как и подобает горячей струе, и растекается в горизонтальном направлении по достижении равновесной высоты (рис. 10.7.3). Вершина шлейфа все время меняет свое положение в некоторых небольших пределах, а так как вблизи очень устойчивого слоя часто отсутствует непрерывность в изменении скоростей ветра по высоте, струя растекается в разные стороны тонким слоем загрязненного воздуха.

Когда загрязненный слой уже сформировался и с утра начинается термическая конвекция, под действием которой дымовые струи приобретают задымляющую форму, почти одновременно в обширном пространстве на уровне земли происходит загрязнение воздуха. По этой причине источник загрязнения обычно нелегко идентифицировать, в особенности если загрязнение аккумуляровалось в темное время суток. Этот механизм был впервые обнаружен Хьюсоном, когда металлургический завод в Трейле (Британская Колумбия) стал источником загрязнения, которое наблюдалось утром на расстоянии около 80 км ниже по долине реки Колумбия, причем в промежуточных пунктах загрязнения воздуха на уровне земли не происходило. Возрастающие уровни загрязненности у земли может произойти совершенно

внезапно, поскольку утренняя конвекция может породить анабатические ветры со стороны долины. Эти ветры распространяются над загрязненным слоем и опускают его в центре долины без всякого разбавления.

Когда струя истекает из трубы выше инверсионного слоя, что часто происходит при наличии холодного слоя воздуха вблизи земли вечером или ночью, турбулентность окружающей среды обычно очень мала. Тогда струя поднимается вверх (под действием собственной плавучести) с бифуркацией, пока не достигнет основания облака или устойчивого слоя. *Восходящая* струя, показанная на схеме рис. 10.7.1, встречается редко, так как она возникает только в такой ситуации, когда вследствие внешней турбулентности распространение струи происходит вверх, но не вниз. Кроме того, турбулентность, более интенсивная, чем та, которая обусловлена плавучестью самой струи, редка над очень устойчивым слоем, так как непосредственно над этим слоем безразличная стратификация встречается редко.

*Термикообразующая* струя возникает, когда при нагревании солнцем поверхности земли образуются термики, которые становятся основным источником завихрений. Струя большой пла-

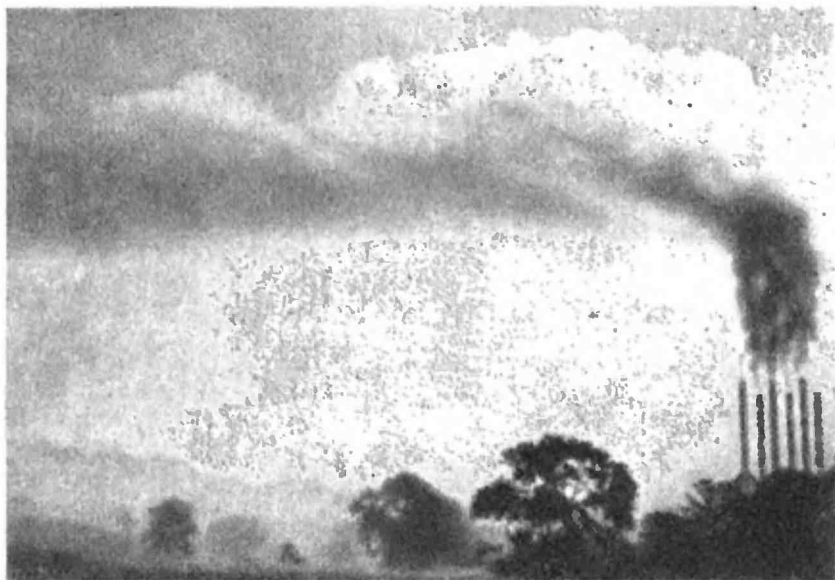


Рис. 10.7.3. Дымовой шлейф от старой теплоэлектростанции в Айронбидже.

Сдвиг потока над неподвижным воздухом долины хорошо прослеживается в верхней части шлейфа. Как и в случае рис. 10.7.2, после этого произошло задымление местности.

вучести сама инициирует возникновение термиков; при этом все загрязняющие вещества, по-видимому, уносятся вверх, тогда как рассеянием вниз можно пренебречь.

*Флагообразная* разновидность встречается преимущественно среди струй малой плавучести при низких скоростях истечения. С подветренной стороны некоторых труб срываются вертикально направленные вихри, и иногда можно наблюдать, как загрязняющие вещества втягиваются внутрь этих вихрей и затем уносятся нисходящим потоком. Это явление играет важную роль на практике только тогда, когда на внешнюю поверхность трубы в течение длительного времени попадает значительное количество дымовых частиц. В случае, изображенном на рис. 10.3.3, была закопчена примерно вся верхняя половина трубы. Некоторые архитектурные решения приводят к возникновению флагообразной струи, но проблема обучения архитекторов тому, как именно следует проектировать трубы, чтобы, не загрязняя земли, воздуха и зданий, отводить дым, сначала привлекать внимание только в течение последних двух десятилетий. В последнее время до понимания необходимости учета таких явлений дошли и архитекторы, так что эта экологическая проблема стала, наконец, проблемой и для них.

*Нисходящей* струи можно избежать, если отнести основание трубы достаточно далеко от здания. Многие трубы действуют так, что выбрасываемые загрязняющие вещества захватываются вблизи выпуска нисходящими завихрениями, возникающими из-за отрыва потока выступающими частями зданий. Более подробно этот вопрос рассмотрен в книге автора *Air Pollution* (глава об отрыве потока). Особым случаем является выброс отработанных газов тепловой электростанцией, где нисходящее движение обусловлено отрицательной плавучестью струи. Старое эмпирическое правило, что труба должна быть в 2,5 раза выше здания, на котором она стоит, не основывается ни на чем, кроме того, что это правило было принято в те времена, когда никаких других рекомендаций не предлагалось. Сэр Дэвид Брант сказал мне, что он придумал это правило на основе некоторых наблюдений за траекториями полетов шаров-зондов над холмом. Из наблюдений как будто следовало, что при высоте полета в 2,5 раза большей, чем высота холма, влияние холма на траекторию полета уже не ощущается. Это наблюдение, конечно, мало относится к делу, не говоря уже о том, что даже его обобщение только на случай газовых потоков над холмом само по себе было бы некорректно. Указанное эмпирическое правило неприменимо к зданиям, имеющим форму башни; в этом случае следует провести эксперимент в аэродинамической трубе. Однако важно заметить, что для выявления всех возможных проблем характеристики турбулентности должны быть

воспроизведены в аэродинамической трубе в широком диапазоне. Все же не стоит слишком серьезно воспринимать проблему моделирования турбулентности при проектировании труб, поскольку многообразие форм завихрений, включая холодную нисходящую струю, столь велико, что все их просто невозможно смоделировать. Важно проэкспериментировать с различными модельными препятствиями (в том числе движущимися) в потоке аэродинамической трубы, чтобы определить, что может случиться, если построить натуральный объект.

*Клубящаяся* струя — явление практически маловажное, и его причины не изучались, хотя предположения на этот счет и делались. *Бифуркированная* струя рассматривалась также в гл. 8; она образуется, когда вектор количества движения в выходящем потоке направлен вверх.

## 10.8. Отбор проб загрязняющих веществ

Без использования некоторых измерительных приборов трудно определить такие связанные с погодой физические параметры, как скорость и направление ветра или температура и влажность воздуха, поскольку значения этих параметров меняются в широких пределах. Объективно же определения любых величин (связанных с загрязнением) попросту не существует, так как, с одной стороны, объем отобранного воздуха и длительность отбора пробы конечны, а, с другой стороны, если взяты небольшие (по объему и времени отбора) пробы, то в каждом частном случае бесполезно выяснять детали изменения тех или иных величин при переходе от одной небольшой пробы к другой. Поэтому большая часть определений устанавливает способ, которым будут отбираться пробы. Как отмечалось в гл. 7, не существует способа определения, который не зависел бы, и часто существенно, от объема отобранного воздуха.

Диапазон изменения концентраций загрязняющих веществ обычно больше, чем диапазон соответствующих расстояний или времен. Это объясняется тем, что вблизи источников концентрация загрязняющих веществ может увеличиться на несколько порядков. К тому же и в естественной, и в искусственной средах существуют стоки ряда разновидностей загрязняющих веществ.

Поэтому целесообразно определить *фоновый уровень загрязнения*, порождаемый отдаленными источниками и не меняющийся от точки к точке, поскольку можно считать, что загрязняющие вещества хорошо перемешаны в воздухе всюду, за исключением окрестностей стоков (например, когда воздух проходит над лесом или изгородью, то концентрация  $\text{SO}_2$  в ряде

случаев убывает в 2—3 раза). Кроме того, возникает локальное загрязнение воздуха за счет источников, близко расположенных к измерительному прибору. Такое загрязнение может происходить неравномерно (порывами). Например, загрязнение воздуха под действием волнообразного дымового шлейфа может отсутствовать в один момент времени и достигать максимума 30 с спустя. Таким образом, концентрация, усредненная за много периодов, будет давать профиль, подобный  $P_{\text{ср}}$  на рис. 10.7.1, а, тогда как полученный за несколько секунд профиль концентраций будет похож на  $P_{\text{мгн}}$  на том же рисунке.

Поэтому на практике время осреднения (если оно выбирается из каких-либо соотношений, использующих значение концентраций, вычисленных по формуле рассеяния) должно быть в несколько раз больше времени переноса порции загрязняющих веществ от источника до точки наблюдения. Следует отметить, что концентрация в порывах вполне может превышать среднюю в 10 раз, а длительность порывов определяется расстоянием от источника. В случае видимой струи природа этих изменений концентрации может быть обнаружена визуально. С другой стороны, среднее значение за сутки, месяц или год легко может оказаться близким к 0,2, 0,05 или 0,01 от среднего значения, полученного за час или за три минуты, на которое могут оказать большое значение факторы, локальные в пространстве и времени. Отношение концентраций для различных периодов осреднения может меняться от случая к случаю. Это делает затруднительным введение максимальной нормы выброса загрязняющих веществ по конкретному источнику. Здравый смысл приводит иногда к совершенно неверному предположению, что существует уровень, до которого загрязняющие вещества могут выбрасываться безо всякого вреда, а вред начинается, когда этот уровень превышает. Найти такой уровень, конечно, нельзя: в любом случае его величина будет непрерывно меняться под влиянием различных факторов. Если не использовать большого количества проб, то измерения действительного уровня загрязнения окажутся ненадежными. С другой стороны, полученный при большом количестве проб объем информации окажется гнетуще обширным, если его не обрабатывать на ЭВМ, а как раз на этом (т. е. на машинной обработке) кончается осмысленный подход к задаче. Непосредственные, живые наблюдения с небольшим количеством приборов, визуальные наблюдения случаев загрязнения и поведения струй, разумное применение простых принципов естественной аэродинамики не могут быть заменены ничем.

Если бы здесь было указано конкретное время отбора проб, то именно это и было бы воспринято как рекомендация; на самом же деле я хочу дать такую рекомендацию: если не можете

предложить конкретного времени отбора проб в определенной ситуации, то не надо вообще советовать ничего по данному вопросу.

### 10.9. Рассеяние естественных загрязняющих веществ

Существует много естественных загрязняющих веществ, образованных пожарами и пылью, которые переносятся на большие расстояния. Подобно фоновым загрязнениям, они вскоре равномерно перемешиваются в определенной части атмосферы, но это происходит не всегда. Дым лесных пожаров или дым при обработке сельскохозяйственных угодий обычно образуется в такое время года, когда существуют термические конвективные токи от поверхности земли. Если дым образуется утром, он хорошо перемешивается в конвективном слое ниже основания облака. Если же он образуется вечером, то может подняться к поверхности конвективного слоя и находиться там всю ночь, поскольку слои внизу устойчиво стратифицированы; тогда на следующее утро он вызовет задымление во всем нижнем слое.

Воздух выше основания облаков стратифицирован устойчиво, за исключением случаев, когда он насыщен, и загрязняющие вещества переносятся только башнями кучевых облаков. Когда облако испаряется (что происходит обычно за время около 30 мин), остается башня более высокой влажности и повышенной загрязненности. Обычно примерно за час она растягивается в тонкий слой (см. рис. 11.5.7), в котором трудно признать продукт взаимодействия кучевого облака и термической конвекции. Башни дыма можно легко увидеть сразу после того, как испарились кучевые облака, если воздух ниже основания облаков загрязнен сильнее, чем воздух наверху.

## ОБЛАКА И ОСАДКИ

### 11.1. Основные принципы

Прежде всего полезно сформулировать некоторые упрощения, которых мы будем придерживаться при описании наблюдаемых сложных процессов. Эти упрощения целесообразно использовать, так как и о более важных факторах мы знаем очень мало. Можно хорошо разбираться в термодинамике конденсации и иметь точные уравнения движения, но высокая точность уравнения не имеет смысла, если неточны используемые в них результаты измерений. Поэтому при решении практических задач некоторые второстепенные механизмы можно исключить из рассмотрения.

#### 11.1.1. Конденсация

В атмосфере всегда имеется достаточное количество частиц, которые играют роль ядер конденсации. Действительное число и химическая природа частиц сказываются на возникновении капель разного размера при охлаждении воздуха ниже точки росы, но число частиц всегда достаточно велико, чтобы облако было видимым. Хотя в некоторых случаях, когда относительная влажность лежит между 70 и 100 %, гигроскопические частицы вырастают достаточно большими для того, чтобы уменьшить видимость в облаке, они не влияют на движение воздушных масс, пока не пойдет дождь или не возникнет туман. Любой, даже самый большой из возможных, уровень перенасыщения в атмосфере все же слишком мал, чтобы его можно было измерить; измерения или наблюдения не обнаруживают влияния перенасыщения на плавучесть, за исключением моментов, следующих непосредственно за оледенением (разд. 11.1.7, 11.2.6 и 11.6.4).

#### 11.1.2. Радиация

Облака, как и снег на земле, излучают как черные тела. Если облако слишком толстое, чтобы быть прозрачным, то его верхняя поверхность излучает в пространство в таком интервале длинноволнового диапазона, в котором энергия не поглощается верхними слоями атмосферы. Водяной пар поглощает излучение

весьма сложным образом: в то время как для некоторых длин волн энергия почти полностью поглощается в двухметровом слое, в других случаях поглощения практически не происходит. Следовательно, облака заметно выхолаживают воздух на своей верхней поверхности и отдают тепло в пространство приблизительно с той же скоростью, что и подстилающая поверхность в ясную ночь, когда появляется роса или изморозь.

С другой стороны, облака, как и снег, нагреваются солнцем очень мало. Почти вся радиация в диапазоне видимого света и в соседних диапазонах волн отражается и рассеивается водяными каплями. Облака поглощают больше солнечной радиации, чем чистый воздух; такое поглощение осуществляется не каплями, а паром в облаке. Так как солнечные лучи при прохождении через облако многократно рассеиваются, их путь оказывается очень большим. Падающее солнечное излучение отражается в пространство или попадает в конечном счете на землю. Количество отражений, которое претерпевает луч, прежде чем покинет облако, меняется от одного-двух в тонком облаке до тысяч в толстом. Количество тепла, поглощенного облаком, не равно нулю, но оно много меньше скрытой теплоты конденсации, высвобождающейся или поглощающейся при восходящих и нисходящих токах, масштаб которых мал по сравнению с теми, которые так или иначе приводят облака в движение.

В сторону Земли облако излучает в длинноволновом диапазоне. Таким образом, благодаря тому, что температура облаков очень близка к температуре подстилающей поверхности (по сравнению с температурой космического пространства, которая фактически равна абсолютному нулю), наличие даже тонких облаков ведет к тому, что на Землю возвращается большая часть ее длинноволновой радиации. Следовательно, облака очень сильно уменьшают области возникновения заморозков и тумана по ночам. Кроме того, они также заметно уменьшают и потоки излучения, поступающего из космоса, и количество облаков — единственный (кроме снежного покрова) существенный фактор, уменьшающий количество солнечной энергии, поглощаемой Землей. В то же время облака уменьшают количество уходящего в пространство излучения, так как их температура ниже температуры поверхности Земли, а энергия излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры.

### 11.1.3. Образование облаков

Кроме тех случаев, когда водяной пар поступает из источников с высокой температурой (таких как гейзеры, выхлопы самолетных двигателей и промышленные выбросы), основным механизмом образования облачности является адиабатическое вы-



холаживание поднимающегося воздуха или близость холодной поверхности, вызывающей образование тумана. Форма облаков может меняться в зависимости от движений, которые отчасти обусловлены радиационным выхолаживанием в облаке и возникающим в результате силами плавучести. Облака, образованные перемешиванием двух не насыщеных воздушных масс с различными температурами, являются вторичными в том плане, что в возникновении движения скрытая теплота конденсации особой роли не играет. Таким образом, вихревые циркуляции иногда могут привести к образованию облаков путем такого перемешивания, а перемешивание холодного воздуха вблизи земли с теплым воздухом, находящимся над ней и еще не успевшим остыть под действием поверхности земли, вызывает появление тумана. Высвобожденная при конденсации таких облаков скрытая теплота пренебрежимо мала по сравнению с довольно медленной потерей тепла за счет радиации. Если принять во внимание неполноту наших знаний о других, более важных механизмах, конденсация не столь уж и важна для прогноза или даже просто объяснения образования облаков.

#### 11.1.4. Дождь

Образование дождя в большой степени зависит от природы частиц, на которых происходит конденсация (ядер конденсации). Небольшое количество крупных гигроскопических частиц диаметром 100 мкм и больше, находящихся между множеством мелких частиц, часто вызывает дождь в результате столкновения частиц разных размеров, имеющих разные скорости падения (см. разд. 2.10). Если спектр размеров частиц невелик (все частицы приблизительно одного размера), то процесс соударений протекает значительно медленнее, особенно если диаметр частиц меньше 20 мкм (разд. 11.6.4).

#### 11.1.5. Электрические эффекты

Несмотря на то что молния, сопровождаемая громом, выглядит очень эффектно, количество энергии, заключенной в ней, весьма невелико по сравнению с энергией движения в шторме. Гроза с градом, но без молний в энергетическом смысле не отличается от грозы с молниями в пределах, доступных измерениям, и, хотя грозы с молниями обычно захватывают более обширные территории, это происходит не из-за наличия молний. Электрические силы сами являются следствием соударения частиц и температурных градиентов внутри ледяных кристаллов; они не вызывают каких-либо эффектов, сравнимых с эффектами, порождаемыми силами плавучести. Электрическая энергия в этом случае представляет собой просто побочный продукт

сил плавучести и полей, возникающих при гравитационной сепарации ледяных кристаллов и градин. Маленькие кристаллики увлекаются восходящим потоком, приобретая положительный заряд от больших градин, падающих много быстрее. (Градины теплее ледяных кристаллов, так как на поверхности градин собираются переохлажденные капли, которые, переходя в твердую фазу, отдают градинам свою скрытую теплоту таяния.) Ледяные кристаллы отскакивают от градин при соударении с ними, а температурные градиенты вызывают разделение зарядов.

Более старые части ледяного облака содержат очень мало незамерзших частиц, так что температурные градиенты в них невелики. Разделение на заряды происходит в основном в более молодых облаках, где существуют более интенсивные восходящие токи и содержится большее количество переохлажденной воды. В масштабе атмосферных движений в молодых ячейках облачности интенсивная генерация кинетической энергии за счет сил плавучести полностью преобладает над генерацией энергии электрическими силами. Обычно считается, что при разряде молнии происходят внезапные перемещения электрических полей большой напряженности, и благодаря электростатическим силам выпадает дождь или град, находившийся до этого момента во взвешенном состоянии. В действительности именно благодаря тому, что градины уже падают, и происходит разделение зарядов, и естественно было бы ожидать, что градины достигнут земли вскоре после удара молнии, особенно в случае молодой облачной ячейки.

### 11.1.6. Температура капельных облаков

Можно считать, что температура ледяных кристаллов и водяных капель очень близка к температуре воздуха, сквозь который они падают. Практически важным исключением являются градины: в момент слияния с переохлажденными частицами внутри облака они теплее окружающего воздуха, но достигнуть земли они могут гораздо более холодными, чем воздух, в котором они падают, что обусловлено их высокой скоростью падения.

Аналогично, крупные капли дождя могут быть холоднее окружающего воздуха, но происходит это главным образом потому, что при падении в воздухе они принимают температуру смоченного термометра (разд. 11.2.5).

### 11.1.7. Оледенение и переохлаждение

Когда воздух охладится ниже точки росы, конденсация происходит или на поверхности, или в виде облака. При дальнейшем охлаждении частицы, не замерзая при  $0^{\circ}\text{C}$ , могут оста-

ваться переохлажденными и при температуре  $-40^{\circ}\text{C}$ . Ниже этой температуры происходит спонтанное замерзание (если только в воздухе нет концентрированных растворов сульфатов или хлоридов).

Время, в течение которого частицы остаются незамерзшими при температурах от 0 до  $-40^{\circ}\text{C}$ , зависит от размера частиц и от температуры окружающего воздуха. Облако, состоящее из мелких частиц (меньше 5 мкм в диаметре), при  $-30^{\circ}\text{C}$  может оставаться незамерзшим в течение многих часов, тогда как дождевые капли в кучевых облаках могут замерзнуть за несколько секунд при  $-10^{\circ}\text{C}$ . Следовательно, кучевые облака оледеневают при более высоких температурах, чем тонкослойные. Образование дождя ускоряется сильными восходящими токами и быстрой конденсацией в жидкую фазу. Это особенно ярко проявляется при наличии некоторого количества крупных частиц, так как частицы при этом сталкиваются и сливаются одна с другой гораздо чаще.

Вероятность образования первичных кристаллов резко повышается как при увеличении размеров капель, так и при понижении температуры. На практике при температурах ниже  $-40^{\circ}\text{C}$  оледенение столь интенсивно, что его можно считать мгновенным даже для очень мелких частиц.

### 11.1.8. Скрытое тепло

Количество теплоты, высвобождающееся при конденсации, слабо зависит от изменения температуры. Оно столь велико, что является определяющим фактором в облачной динамике. Скрытая теплота у воды выше, чем у большинства других атмосферных примесей; конденсации всего 5—10 % водяного пара достаточно, чтобы нагреть воздух на  $1^{\circ}\text{C}$ .

Скрытое тепло, выделяющееся при оледенении жидкой фазы, в 6 раз меньше, чем при конденсации, и поэтому с энергетической точки зрения играет второстепенную роль. Главное и без сомнения наиболее важное влияние оледенения заключается в замедлении испарения, которое, таким образом, препятствует потерям скрытой теплоты конденсации.

## 11.2. Тефиграмма

Для того чтобы графически представить состояние атмосферы по данным аэрологического зондирования, требуются две координаты. В тефиграмме роль координат играют температура  $T$  и энтропия  $\phi$ . Так как энтропия пропорциональна логарифму потенциальной температуры  $\theta$ , то по вертикали в логарифмическом масштабе откладывается величина  $\theta$ . По горизонтали



как они отражают вертикальные перемещения частиц без конденсации. Так, на рис. 11.2.1 линия АВ представляет собой результат зондирования в нейтральной атмосфере. АС соответствует устойчиво стратифицированному слою атмосферы, в котором потенциальная температура растет кверху, т. е. в направлении возрастания высоты и убывания давления. При аэрологическом зондировании аппаратура регистрирует давление и температуру, и эти две величины используются в качестве координат для изображения результатов зондирования на диаграмме.

Некоторые метеорологические организации используют очень похожие диаграммы в координатах  $T$  и  $\lg p$ . Эта развернутая под углом система координат наложена на тегиграмму и выглядит подобно последней, с единственной разницей, что изобары на ней прямые, а сухие адиабаты несколько искривлены.

Частица воздуха, расположенная в окрестности АС и перемещающаяся адиабатически вниз от  $E$  к  $E'$ , была бы теплее, чем ее новое окружение на высоте  $H$ , поэтому на нее действовала бы сила, возвращающая ее к  $E$ . Если бы частица перемещалась адиабатически наверх к  $E''$ , она была бы холоднее, чем ее новое окружение, и на нее также действовала бы сила, возвращающая ее в первоначальное положение. Следовательно, воздушный слой АС устойчив.

### 11.2.3. Отношение смеси для влаги; уровень конденсации

Это отношение определяется как число граммов пара в 1 кг сухого воздуха. Для практических целей можно считать, что оно равно одной тысячной от отношения парциального давления водяного пара к общему давлению. Характеристики влажности приведены на диаграмме для насыщенного воздуха в виде линий, показывающих *отношение смеси для состояния насыщения*. Эти линии наклонены влево от вертикали (рис. 11.2.2). Частица воздуха, температура и давление которой представлены на рис. 11.2.2 точкой А, может иметь влажность, скажем, 3 г/кг. Если бы она поднималась адиабатически до точки С, которая расположена на линии 3 г/кг, частица превратилась бы в насыщенную. Если бы отношение смеси при насыщении в точке А было равно 5 г/кг, то *относительная влажность воздуха* в точке А была бы  $\frac{3}{5}$ , или 60 %. Если частица поднимается до точки С и ее относительная влажность при этом достигает 100 %, то высота С называется *уровнем конденсации* для этой частицы.

### 11.2.4. Влажная адиабата

Если частица воздуха от точки С на рис. 11.2.2 будет подниматься вверх до изобары  $C'$ , то некоторая часть пара

сконденсируется в жидкость. Следовательно, вместо того, чтобы адиабатически охладиться и попасть в точку  $C'$ , она нагреется за счет выделения скрытой теплоты конденсации и попадет в точку  $S$ , где должно сконденсироваться значительно меньше жидкости.

Линия  $CS$  является частью *влажной адиабаты*, проходящей через  $C$ . Она вычислена в предположении, что сконденсировавшаяся часть жидкости сразу же удаляется. (Это предположение

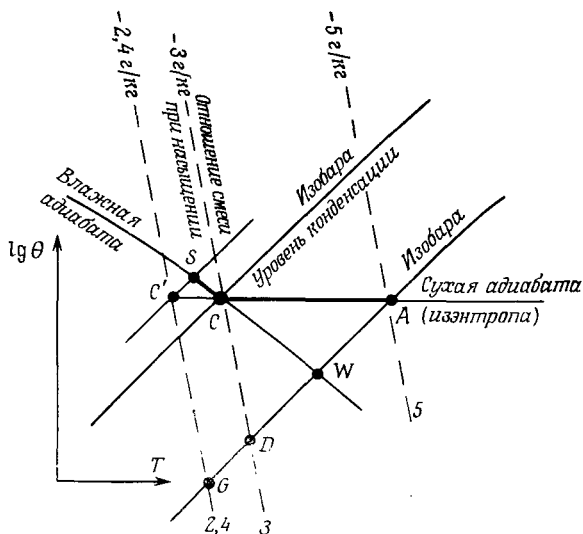


Рис. 11.2.2. Терфиграма, на которой линии постоянных значений отношения смеси при насыщении наклонены влево.

Если частица воздуха поднимается от точки  $A$  адиабатически и становится насыщенной в точке  $C$ , то ее отношение смеси равно  $3$  г/кг. Высота или давление в точке  $C$  называется уровнем конденсации. Если частица поднимается выше, она следует вдоль влажной адиабаты до точки  $S$ . При давлении, соответствующем точке  $A$ , воздух, чей уровень конденсации находится в  $C$ , имеет температуру смоченного термометра в точке  $W$  и точку росы в  $D$ .

сделано потому, что количество влаги в частице зависит от уровня, на котором частица впервые превратилась в насыщенную.) Впрочем, используемое предположение не вносит больших ошибок. Если жидкая фаза остается в воздухе, то воздух при подъеме выхолаживается медленнее, так как он несет с собой жидкость, которая должна охлаждаться вместе с ним. Точнее говоря, если воздух опускается по влажной адиабате, то вода, чтобы испариться, должна иметь ту же температуру, что и воздух. На рисунке линия отношения смеси при насыщении, проходящая через точку  $S$ , равна  $2,7$  г/кг, и при подъеме от  $C$  к  $S$  должно сконденсироваться  $0,3$  г жидкой фазы.

### 11.2.5. Теорема Норманда: температура смоченного термометра и точка росы

Если провести через точку  $A$  изобару, а через точку  $C$  (соответствующую уровню конденсации) — влажную адиабату, то эти линии пересекутся в точке  $W$ . Точка  $W$  представляет собой температуру, до которой воздух охладился бы, если бы вода в нем испарилась при влажноадиабатическом переходе от точки  $C$  до уровня давления в точке  $A$  (вместо сухоадиабатического перехода от точки  $C$  до температуры в точке  $A$ ). Влажная частица воздуха охлаждается из-за испарения, а как только температура смоченного термометра станет постоянной, можно считать, что все тепло для испарения получается из воздуха; единственная разница заключается в том, что в случае влажной частицы вода испаряется при постоянной температуре смоченного термометра, а не при переменной температуре вдоль  $CW$ . Тем не менее эта разница невелика, и для практических целей температура в точке  $W$  может считаться температурой смоченного термометра. Ошибки возникают из-за того, что корпус термометра проводит тепло от влажного конца к сухому: тем не менее теоретически считается, что весь термометр заключен во влажную оболочку. Ошибки минимизируются лучше всего, если увеличить скорость испарения, усилив вентиляцию влажного конца. Это приведет к увеличению общих потерь тепла и изоляции остальной части стеклянного корпуса термометра.

Линия постоянного отношения смеси, проходящая через точку  $C$ , пересекает изобару, проходящую через точку  $A$ , в точке  $D$ . Точка  $D$  является *точкой росы*: температура в ней равна той температуре, до которой должен быть охлажден воздух при постоянном давлении, чтобы стать насыщенным. В *теореме Норманда* утверждается, что сухая адиабата пересекает влажную адиабату и линию отношения смеси, проходящую через точку росы, в точке уровня конденсации.

Если воздух охлажден до  $G$  (рис. 11.2.2), то он может содержать не более чем 2,4 г/кг водяного пара. Следовательно, 0,6 г пара должны быть сконденсированы либо в виде росы на холодной поверхности, либо, если выхолаживание вызвано потерями за счет излучения (главным образом на водяном паре, содержащемся в нем), в виде тумана. В последнем случае некоторая часть воздуха охлаждается до температуры значительно ниже точки росы, и роса выпадает даже при слабом ветре. Если утром воздух перемешивается, то выхолаживание распространяется на атмосферный слой существенной толщины, и в результате перемешивания воздушных объемов с различными температурами образуется туман (разд. 11.3).

### 11.2.6. Точка замерзания; уровень испарения льда

Давление водяного пара над льдом меньше, чем его давление над водой при той же температуре. Это означает, что кри-

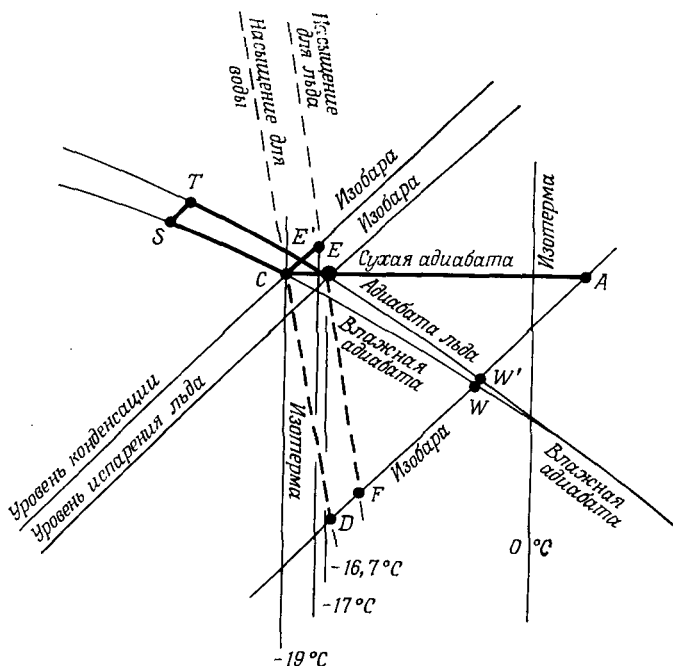


Рис. 11.2.3. Адиабатические линии насыщения для воды и льда, пересекающиеся на изотерме  $0^\circ\text{C}$  для частицы, имеющей температуру ниже  $0^\circ\text{C}$ .

Если частица начала свое движение в точке  $A$ , а ее уровнем конденсации является  $C$ , то соответствующая ей температура смоченного термометра (переохлажденная) и температура точки росы находятся в точках  $W$  и  $D$  соответственно. Но если частица покрыта льдом, то точка  $W'$  является температурой смоченного термометра, а точкой замерзания, при которой начинается замерзание на охлажденной поверхности, является точка  $F$ . Строго говоря, точка  $F$  должна быть определена при температуре начала испарения изморози с поверхности, которая начинает нагреваться, так как иногда первый слой льда на чистой поверхности может появиться при температуре ниже  $F$ . Если сконденсированная вода остается переохлажденной, то частица может находиться на влажной адиабате  $CS$ , но если частица замерзла, то она перемещается по направлению к линии насыщения для льда, проходящей через  $E$ , которая пересекается с линией насыщения для воды, проходящей через точку  $C$ , на изотерме  $0^\circ\text{C}$ . Так как в чистом воздухе, охлажденном за счет подъема, конденсации до льда не происходит, то изобара, проходящая через точку  $C$ , является уровнем испарения льда.

вая отношения смеси при насыщении над льдом отличается от соответствующей кривой над водой на величину, которая возрастает с падением температуры ниже  $0^\circ\text{C}$ . Если воздух охлаждается изобарически от точки  $A$ , то точка замерзания  $F$  будет достигнута раньше, чем точка росы  $D$  (рис. 11.2.3). Если воз-



дух охлаждается за счет подъема вдоль сухой адиабаты, то конденсация не будет иметь места до тех пор, пока не будет достигнут уровень конденсации в точке  $C$ .

Если до достижения точки  $S$  сконденсировалось конечное количество воды, которая потом замерзла, то сначала высвобождается скрытая теплота таяния, а затем продолжается сублимация водяного пара на кристаллах льда. Это вызывает дальнейшее нагревание, которое продолжается до тех пор, пока воздух не достигает состояния, соответствующего точке  $T$ , которая на линии влажной адиабаты представляет собой точку насыщения над льдом (с тем же самым суммарным содержанием воды, что и в точке  $C$ , но в виде льда вместо жидкой фазы).

Если теперь воздух опускается от точки  $T$ , оставаясь насыщенным для льда, то ледяные кристаллы будут продолжать испаряться, и весь лед испарится при достижении точки  $E$ . Точка  $E$ , в которой адиабата для льда, проходящая через точку  $T$ , пересекается с сухой адиабатой, проходящей через точку  $A$ , лежит на линии насыщения, проходящей через точку  $F$ . Линия отношения смеси при насыщении для воды, проходящая через  $C$  и  $D$ , сливается с линией отношения смеси при насыщении для льда, проходящей через  $E$  и  $F$ , на нулевой изотерме ( $0^\circ\text{C}$ ). Подобным же образом влажная адиабата, проходящая через точку  $C$  (и  $S$ ), сливается с адиабатой для льда, проходящей через точку  $E$  (и  $T$ ), на изотерме  $0^\circ\text{C}$ . Если влага в частице воздуха замерзает при давлении, существующем в точке  $A$ , то температура этой частицы будет равна температуре в точке  $W'$ , являющейся пересечением изобары, проходящей через точку  $A$ , и адиабаты для льда, проходящей через точку  $E$ .

Точка  $E$  находится на уровне конденсации для льда, так как при падении давления ледяные кристаллы из пара не образуются. Но если, скажем, в точке  $T$ , замерзшее облако все же присутствует, то оно при опускании не испарится до тех пор, пока не достигнет точки  $E$ . Точка  $E$  поэтому называется *точкой испарения для льда*.

Разность между ледяной и водной адиабатами и линиями отношения смеси при насыщении может быть просто представлена с помощью разности между точкой замерзания и точкой росы для одного и того же давления при различных значениях точки росы. Это отражено в табл. 11.2.1, в которой  $T_f$  и  $T_d$

Таблица 11.2.1

$T_d$ °C	0	-1,4	-9	-14	-19,4	-24,5	-32,2	-40,4
$T_f - T_d$ , °C	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5

обозначают точку замерзания и точку росы соответственно. Следовательно, если точка росы равна  $-19^\circ\text{C}$ , а точка замерзания

равна  $-17^{\circ}\text{C}$ , то воздух, в котором водяной пар сконденсировался при температуре  $-19^{\circ}\text{C}$ , а затем замерз, испарится лишь при опускании на 200 м ниже уровня конденсации. В этом случае изобара, проходящая через точку  $C$ , пересечет линию насыщения для льда в точке  $E'$ , где температура на  $2^{\circ}\text{C}$  выше. Следовательно, точка  $E$  расположена на 230 м ниже точки  $C$  и имеет на  $2,3^{\circ}\text{C}$  более высокую температуру. Итак, ниже изотермы  $-19^{\circ}\text{C}$  имеется слой воздуха толщиной 230 м, в котором могут сосуществовать как ледяные частицы, кристаллы которых могут расти, так и водяные капли, которые могут испаряться.

### 11.2.7. Виртуальная температура

Водяной пар имеет плотность, составляющую 0,622 от плотности воздуха при тех же давлении и температуре. Следовательно, если в воздухе содержится 1 % водяного пара, т. е. воздух имеет отношение смеси, равное 10 г/кг, то его плотность составляет 99,622 % от плотности сухого воздуха. При температуре  $\sim 0^{\circ}\text{C}$  частица воздуха, содержащая на 1 г/кг больше водяного пара, чем остальной воздух, и имеющая такую же плотность, должна быть на 0,0388 % (т. е. на  $0,1^{\circ}\text{C}$ ) холоднее. Грубо говоря, разница в содержании влаги 1 г/кг эквивалентна разнице температур  $0,1^{\circ}\text{C}$ .

*Виртуальной температурой* воздуха называется температура сухого воздуха с теми же самыми давлением и плотностью. Для метеорологии эта разница пренебрежимо мала, но она может быть важна для определения показателя преломления, на который влияют и температура, и влажность (Скорер, 1964). Следовательно, если влажность неоднородна из-за неравномерного испарения в облаках, то даже при однородной плотности будет происходить рассеяние радиоволн и отражение световых лучей, что можно наблюдать в мощные телескопы. Со времени первых радиолокационных наблюдений причиной такого распределения показателя преломления обычно считают турбулентность. Однако скорости, необходимые для возникновения флуктуаций давления, вызывающих такое преломление в воздухе однородного состава, должны быть столь велики, что кажутся невероятными. Объяснение этого явления неравномерным распределением влажности более разумно. В связи с этим указанный эффект назван «замороженной турбулентностью», так как такое название указывает тип происходящего движения.

### 11.2.8. Консервативные свойства воздуха

Если частица воздуха не перемещивается с другими частицами и не теряет тепло за счет излучения, то ее потенциальная температура остается постоянной. Когда происходит конденса-

ция, частица воздуха перемещается вдоль влажной адиабаты. Если в облаке влага конденсируется и часть жидкой фазы выпадает в виде осадков, а само облако оказывается ниже точки, где все оно испаряется, то его характеристикой остается та же влажная адиабата. Если при опускании облака влага, попадающая в него извне, испаряется в нем, то температура смоченного термометра в облаке остается неизменной и точно такой же, как если бы такое испарение происходило при неизменном давлении. Следовательно, только изменение теплопроводности, перемешивание или радиация могут изменить влажную адиабату, вдоль которой перемещается частица. Эта линия определяется температурой, при которой частица пересекает изобару 1000 мбар, давая при этом температуру смоченного термометра частицы при 1000 мбар. Это консервативное свойство называется *потенциальной температурой смоченного термометра* для воздуха.

Полная тефиграмма приведена на внутренней стороне обложки этой книги; она может быть использована при анализе различных случаев конденсации и вертикальных течений в атмосфере.

### 11.3. Физика конденсационного следа за самолетом

Когда перемешиваются два объема ненасыщенного воздуха, то в результате устанавливается температура, средневзвешенная между исходными температурами, в соответствии с пропорцией, которая существовала между этими объемами первоначально. Выбросы авиационных двигателей медленно перемешиваются с постепенно увеличивающимся объемом окружающего воздуха, пока смесь не достигнет уровня равновесия, при котором не остается различия в плотностях. В отсутствие жидкой фазы такой уровень всегда найдется. Однако если некоторое количество влаги присутствует в виде капель, потери тепла на их испарение вызывают различия в плотностях, что в свою очередь приводит к дальнейшему перемешиванию. Следовательно, облачная влага всегда находится в состоянии перемешивания и испарения в тех зонах облака, где она вступает в контакт с ненасыщенным воздухом, находящимся на том же уровне.

Влажность воздуха в условиях насыщения для водяного пара и льда при различных значениях давления может быть представлена как функция температуры. На рис. 11.3.1—11.3.3 приведены характеристики влажности при насыщении для давлений 550, 400 и 250 мбар. Выхлопные газы авиационных двигателей очень горячи и имеют очень большую влажность; точка,

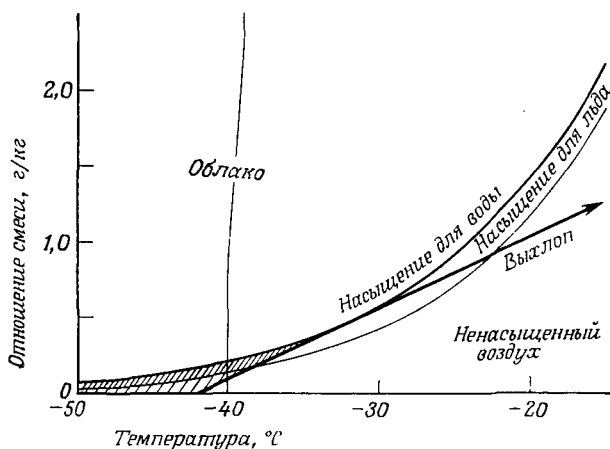


Рис. 11.3.1. Кривые насыщения для воды и льда при давлении 550 мбар, соответствующем высоте примерно 5600 м.

Типичные выбросы самолетов лежат за пределами диаграммы.

Если точка, характеризующая состояние окружающего воздуха, находится в заштрихованной области, смесь будет насыщаться в некоторой точке по мере разбавления выброса за счет перемешивания, в случае если точка лежит выше кривой насыщения для льда. Если точка, характеризующая окружающий воздух, лежит в дважды заштрихованной области и облако, образованное при перемешивании, приводящем к перенасыщению, замерзает, то оно не будет испаряться, сколько бы смесь ни разбавлялась окружающим воздухом, поскольку воздух лежит выше кривой насыщения для льда (уровня сублимации льда).

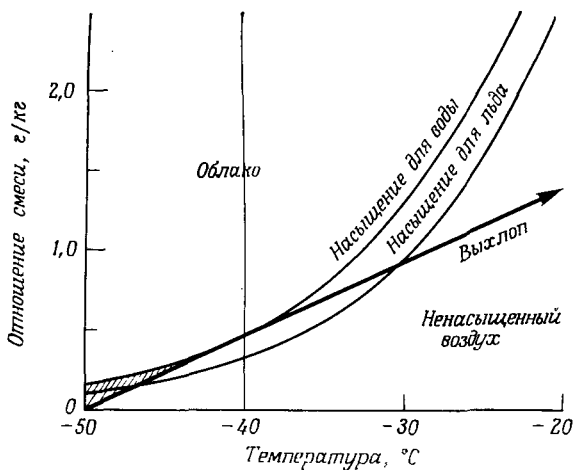


Рис. 11.3.2. То же, что и на рис. 11.3.1, но для давления 400 мбар, соответствующего высоте 7200 м.

характеризующая их на диаграмме, определяется лишь приблизительно направлением касательной к кривой насыщения для воды. Если окружающий воздух представлен точкой в заштрихованной области слева от точки касания между этой касательной и кривой насыщения для воды, то на некоторой стадии смешения точка, представляющая смесь выхлопа с окружающим воздухом, будет находиться выше кривой насыщения; это означает, что будет образовываться облако. Если точка, характеризующая

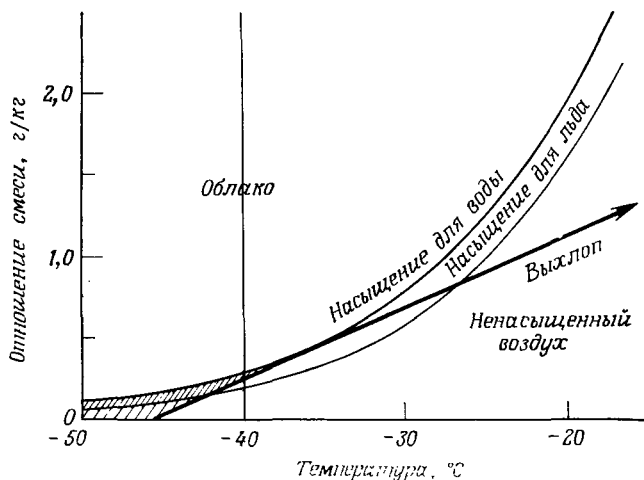


Рис. 11.3.3. То же, что и на рис. 11.3.1, но для давления 250 мбар, соответствующего высоте 10 400 м.

окружающий воздух, лежит ниже кривой насыщения для льда в полузаштрихованной области, то облако быстро испарится. Если она лежит между кривыми насыщения для льда и воды в полностью заштрихованной области и если облако замерзло, то оно будет сохраняться долго. Облако наверняка замерзнет, если его температура будет ниже  $-40^{\circ}\text{C}$ ; в других случаях оно может замерзнуть или не замерзнуть в зависимости от природы ядер конденсации. Обычно облако состоит из очень большого числа чрезвычайно маленьких (менее 1 мкм в диаметре) частиц и не замерзает, так как перемешивание происходит слишком быстро для того, чтобы оно успело замерзнуть.

Воздух на высотах, соответствующих давлениям 400—550 мбар, имеет температуру, как правило, выше  $-40^{\circ}\text{C}$ , и конденсационный след за самолетом не виден. Но выше изобары  $\sim 350$  мбар (т. е. при более низком давлении) температура ниже  $-40^{\circ}\text{C}$  наблюдается весьма часто. Конденсационный след,

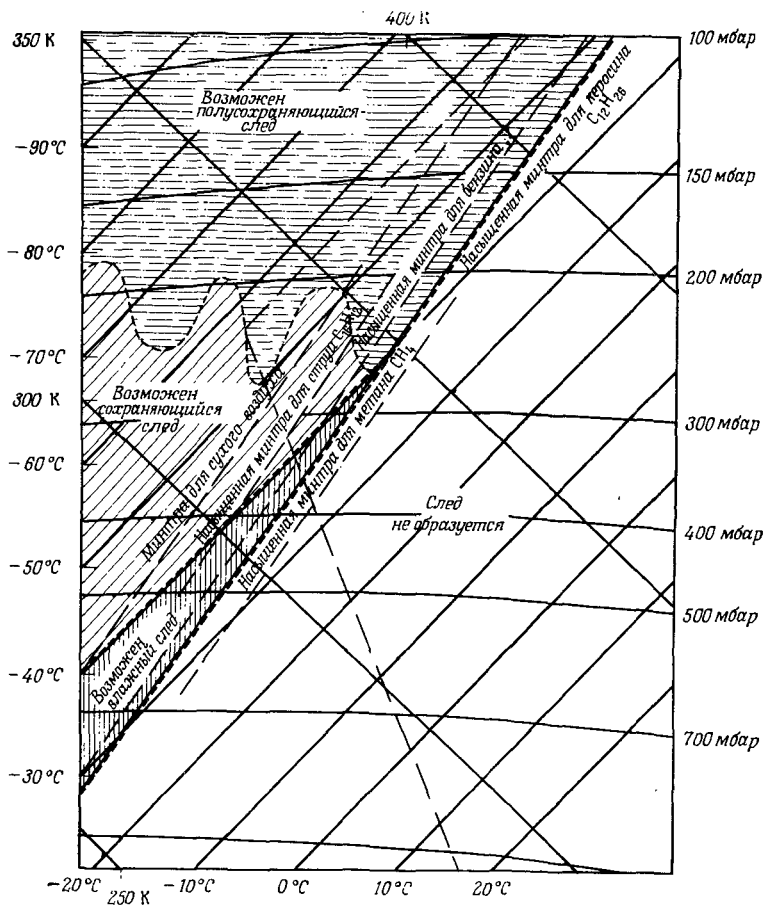


Рис. 11.3.4. Тегфиграма, представляющая свойства самолетных следов.

Сухие адиабаты — диагонали, размеченные в градусах К. Изотермы помечены слева и снизу рисунка в °С. Диаграмма показывает свойства следов в соответствии с положением точки, характеризующей окружающий воздух и вид топлива. Минтра — разделительная кривая, ниже которой след не образуется. Она находится на минимальной высоте для метана, содержание водорода в котором среди рассматриваемых видов топлива максимально. Область, в которой возможен след при тиничном для самолета топливе — керосине, заштрихована. Предельные линии, ниже которых след не образуется, показаны для насыщенного и для сухого воздуха. При температуре выше -40 °С возможен незамерзающий след. Положение тропопаузы, выше которой влажность много меньше, показано волнистой границей. Ниже тропопаузы возможен сохраняющийся след, поскольку она может находиться выше уровня испарения льда. Выше тропопаузы воздух обычно слишком сух для того, чтобы след сохранялся. Штриховой линией представлена стандартная атмосфера ICAO. Результаты зондирования реальной атмосферы почти везде над землей лежат, но-видному, в пределах полосы  $\pm 10^\circ\text{C}$  от этой линии. Отсюда можно видеть, что сохраняющиеся следы наиболее вероятны в полосе  $\sim 250\text{--}300$  мбар. Рисунки 11.3.1—11.3.4 взяты из работы Скорера и Давенпорта (1970).

таким образом, формируется при условии, что окружающий воздух имеет характеристики, соответствующие области между кривой насыщения для воды и касательной к ней, и сохраняется, если указанные характеристики лежат выше кривой насыщения для льда. Это показано на рис. 11.3.4, на котором тегиграмма повернута так, чтобы изобары имели вид приблизительно горизонтальных прямых. Если окружающий воздух имеет характеристики, соответствующие нижней правой незаштрихованной части диаграммы, то след не образуется. Если они расположены в заштрихованной области, то след, возможно, появится. Но это произойдет наверняка только в том случае, когда воздух холоднее, чем линия «сухой» минтры (рис. 11.3.4). Положение этой линии зависит от процентного содержания водорода в топливе, и поэтому приведено несколько кривых для различных видов топлива. В качестве границы заштрихованной области выбрана линия, относящаяся к самолетным следам, возникающим при сгорании керосина. Топливо  $C_{16}H_{32}$  рассматривается из соображений военного характера: при использовании этого топлива имеется наибольшая возможность избежать образования видимого следа. Нижняя часть заштрихованной области помечена на рисунке надписью «возможен влажный след». Она является частью большей области, где «возможен след», и характеризуется температурой выше  $-40^{\circ}C$ .

Волнистой линией отмечена область, в которой на средних широтах наиболее вероятно тропопауза. Эта область находится приблизительно между изобарами 200 и 300 мбар. Выше тропопаузы воздух обычно слишком сух, чтобы в нем образовывался след, и поэтому на рисунке след в этой области называется «полусохраняющимся». Под тропопаузой воздух часто находится в состоянии насыщения льдом, так что там может образовываться «сохраняющийся след».

На рисунке показана также стандартная атмосфера ИСАО (Международной организации гражданской авиации). Для нее тропопаузе соответствует точка, находящаяся на уровне 235 мбар при температуре  $-57^{\circ}C$ . От уровня 360 мбар до поверхности земли линия стандартной атмосферы находится ниже линии минтры, проведенной через точку, общую для этих двух линий, на уровне 360 мбар. На практике маловероятно, чтобы след возник много ниже этой разделительной линии, так как реальная атмосфера отличается от стандартной обычно не более чем на  $20^{\circ}C$ .

## 11.4. Динамика конденсационного следа от самолета

Видимый след начинается примерно в 30 м от самолета. На рис. 11.4.1 приведены функции тока воздуха, сопровождающего вихри следа (см. разд. 9.10). В центре рисунка виден клуб,

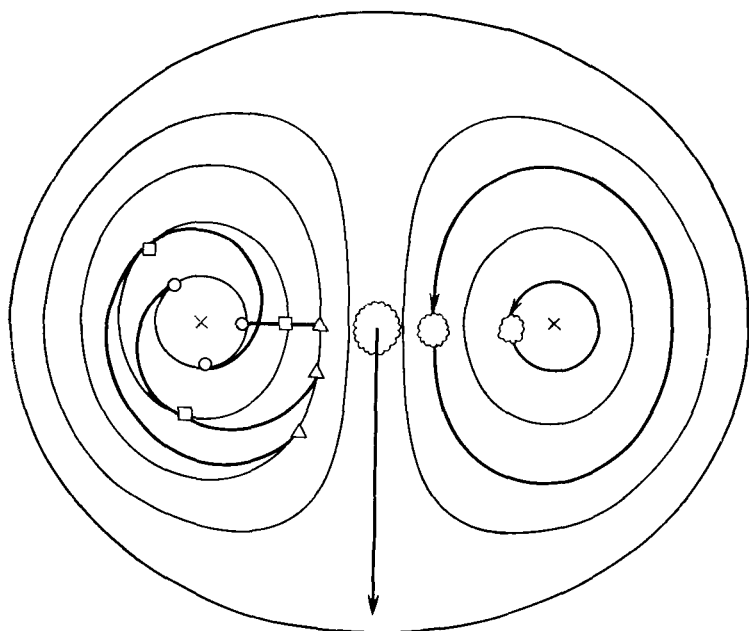


Рис. 11.4.1. Линии тока внутри сопровождающего объема для пары вихрей, которая приближенно описывает поле скоростей в поперечном сечении самолетного следа конденсации в начальный момент времени.

Центры вихрей помечены крестиком. В правой половине рисунка показаны следы выхлопов от двух правых моторов, а в центре — след выхлопа центрального мотора. Слева показаны последовательные синхронные положения трех частиц, первоначально находящихся на горизонтальной линии, а также последовательные положения линии, соединяющей эти частицы,

показывающий поперечное сечение следа от сопла одномоторного самолета. Справа имеются два клуба, образовавшиеся в следе от правых двигателей четырехмоторного самолета. В левой части рисунка показаны три последовательных положения трех частиц, первоначально находившихся в следе на одной горизонтальной линии. За время, пока внешняя из трех частиц делает более одного оборота вокруг вихря, две внутренние делают две трети и одну восьмую оборота соответственно. Следовательно, следы от двух внутренних двигателей четырехмотор-



ного самолета окажутся ниже внешних следов. Так как постоянно существуют диффузия и сдвиг ветра, то показанные на рисунке следы могут быть различимы по отдельности не более 20 с. Так как следы внешних двигателей с обеих сторон зачастую подтягиваются непосредственно к центру вихря, где давление ниже (возможно, более чем на 50 мбар), то они сохраняются дольше. Приблизительно через 30 с полета самолета след часто имеет вид двух облачных трубок, в которых поток, по-видимому,

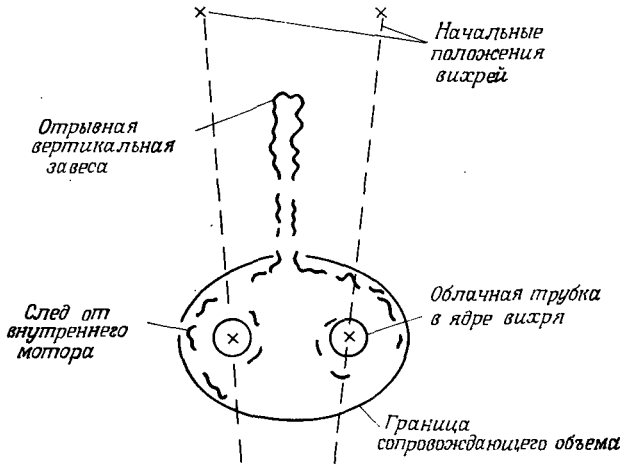


Рис. 11.4.2. Форма облака от четырехмоторного самолета через 30 с после пролета самолета.

Трехмоторный самолет дал бы более четко очерченную облачную завесу с острым верхним краем, поскольку конденсационный след от центрального мотора быстрее втягивается в верхнюю часть сопровождающего воздуха, чем след от внутреннего бокового мотора у четырехмоторного самолета.

не является турбулентным. Большая часть облака от внутренних двигателей (количественная характеристика зависит от места расположения двигателя) оказывается на периферии сопровождающего потока и отрывается выше верхней точки торможения (см. рис. 9.10.3). Именно эта часть образует вертикальную завесу из облаков, распространяющуюся до уровня первого отрыва (рис. 11.4.2).

Пара вихрей имеет неустойчивую конфигурацию, так как она испытывает ускорение, направленное вниз, и любая часть, чуть опередившая другую, будет выглядеть как искривление следа вниз или внутрь (рис. 11.4.3). Если имеется след от центрального двигателя, то он образует клубы, выступающие вниз (рис. 11.4.4). Однако если в центр вихрей попадают только два следа, то они искривляются по направлению вниз и быстро

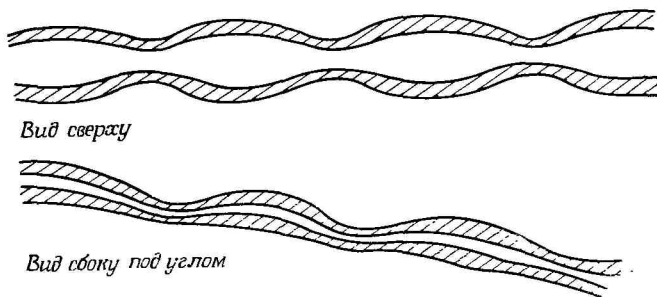


Рис. 11.4.3. Виды трубчатых следов, находящихся в ядрах вихрей (точка наблюдения для вида сбоку несколько приподнята).

Пережатые участки следа опустятся ниже.

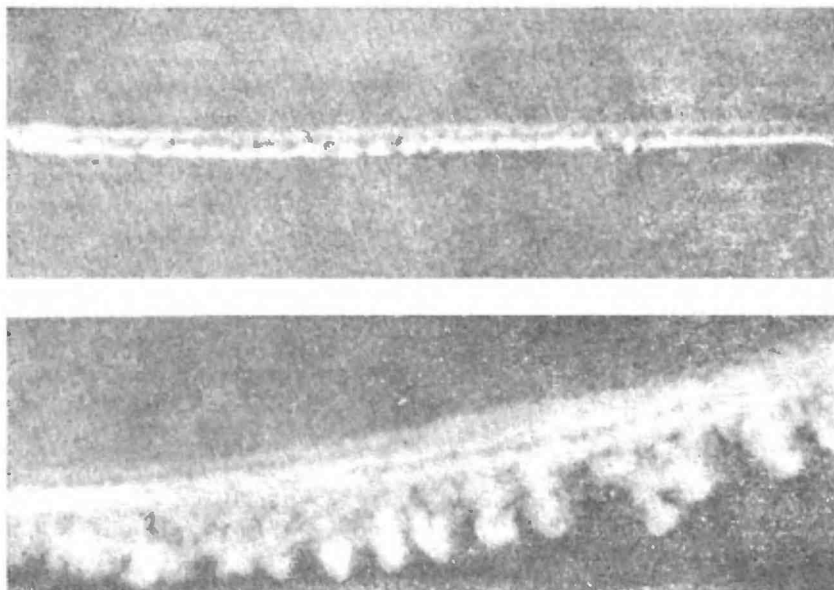


Рис. 11.4.4. Конденсационные следы от трехмоторного (вверху) и четырехмоторного (внизу) самолетов.

На верхнем снимке видна облачная завеса в основном от центрального мотора; облачные трубки в вихревых ядрах более плотные из-за более низкого давления. Трубки начинают сворачиваться в петли. На нижнем снимке показан снизу след от четырехмоторного самолета на повороте. В движении выброса присутствует боковая составляющая, благодаря чему форму следа можно рассмотреть снизу. Клубы появились в изогнутых нижних частях следа, там, где вихри разрушились, размешав трубчатые облака (рис. 11.4.3).

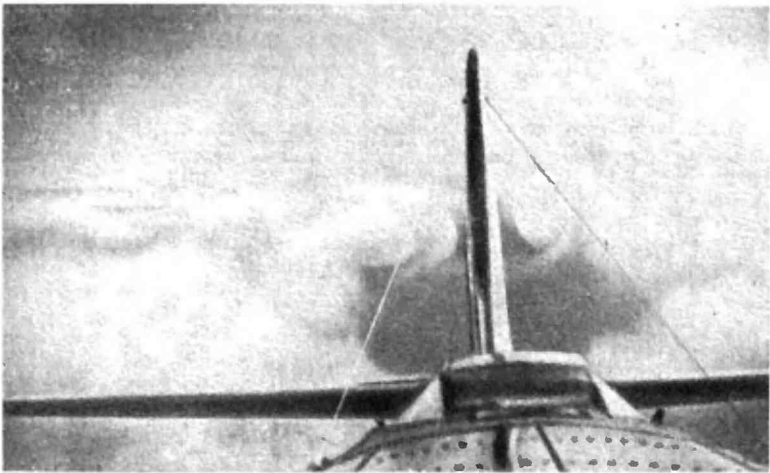


Рис. 11.4.5. Снимок турбулентного следа, сделанный с самолета при полете непосредственно над облачным слоем (фотография В. Дж. Планка).

становятся неустойчивыми, так как перемешиваемый воздух вовлекается от внешней границы сопровождающего потока вниз к центру следа, как описано в разд. 9.10.

Если самолет летит выше облачного слоя, то поток от него образует в этом слое безоблачный шлейф (рис. 11.4.5), а если клубы следа достигают основания облачного слоя, то в слое образуется ряд просветов (рис. 11.4.6).

Расположение просветов и конфигурация следа, наблюдаемые в случае, когда имеются две облачные трубки (рис. 11.4.7), очевидно, связано с их толщиной, но эта связь не очень регулярна и не определяется одной длиной волны. Очевидно, что если два соседних клуба расположены на расстоянии, меньшем, чем четыре ширины следа, то между ними не сможет образоваться еще один, а если расстояние между клубами в  $\sim 12$  раз больше ширины следа, то места оказывается достаточно для образования еще одного возмущения. Там, где существует неустойчивость, вихри противоположного направления гасят друг друга, а остающиеся вихри объединяются. Подобные вихри иногда видны в конденсационных следах. На рис. 11.4.7 показана эволюция следов дыма, выпускаемого с концов крыльев самолета типа «Комета» на высоте  $\sim 3$  км. Атмосфера была устойчиво стратифицирована. Разрушение вихрей наблюдается приблизительно через минуту, как этого можно было бы ожидать на основании подъема верхней точки торможения в сопровождающем потоке, когда часть внешнего потока вовлекается

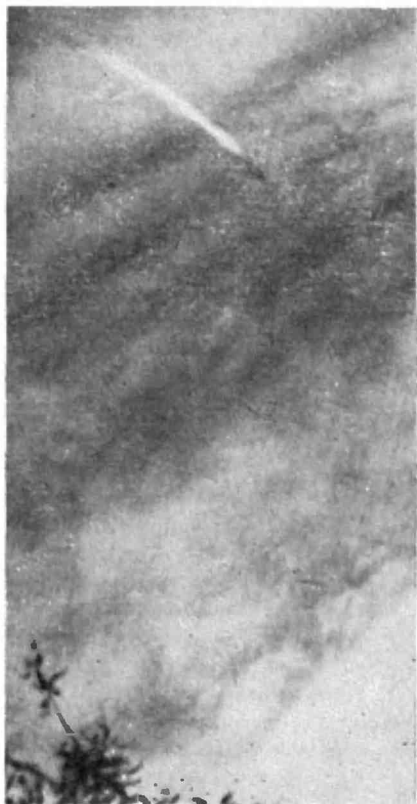


Рис. 11.4.6. Конденсационные следы самолета.

Верхний снимок показывает расплывающийся след, который появляется, когда самолет делает разворот непосредственно в верхушке облака или над ней. В облаке происходит оледенение, и конденсационный след его интенсифицирует. Нижний снимок, сделанный через 4 мин, показывает просветы в более тонкой части того же самого облака за счет клубов конденсационного следа.



сверху в центр следа. Если имеет место неустойчивость, то вращение быстро затухает, давление в центре растет, облачные трубки исчезают и происходит быстрое перемешивание. Показанный на рис. 11.4.7 шлейф быстро рассеивается. Там, где вихри разрушаются, они гасят друг друга, объединяя свои рыхлые края, так как вихревые линии не могут заканчиваться в потоке. Пример различных видов следов приведен на рис. 11.4.8.

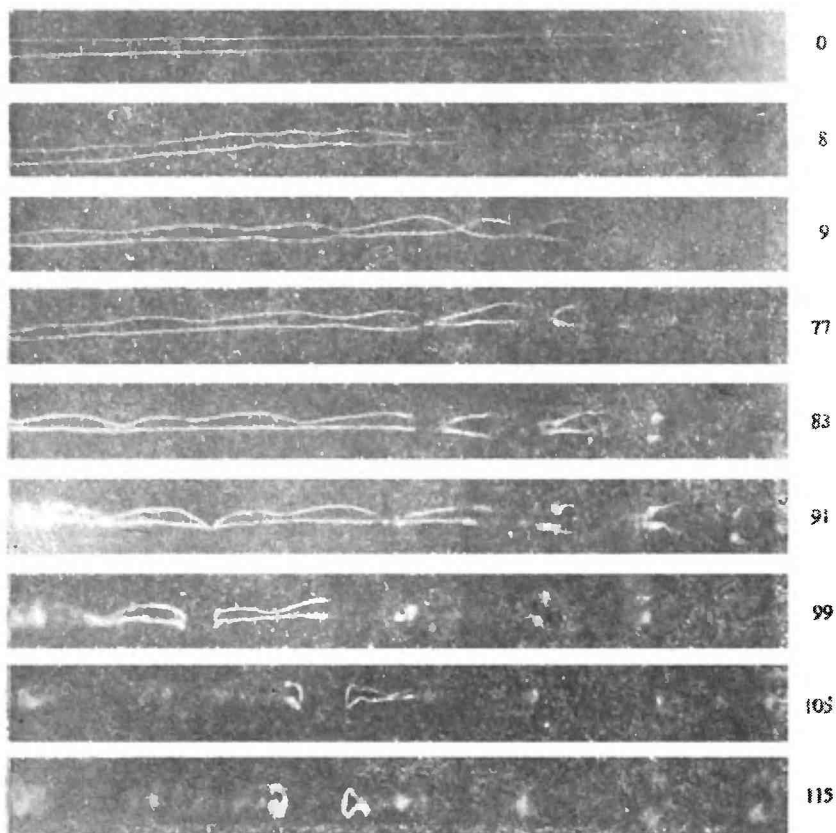


Рис. 11.4.7. Следы дыма, выущенного с концов крыльев самолета типа «Комета», летящего на высоте 3000 м.

Сфотографированы снизу в моменты времени, указанные справа от снимков (в секундах). Стрелки показывают одну и те же точки следа (для верхних снимков вторая точка находится за левым краем снимка).

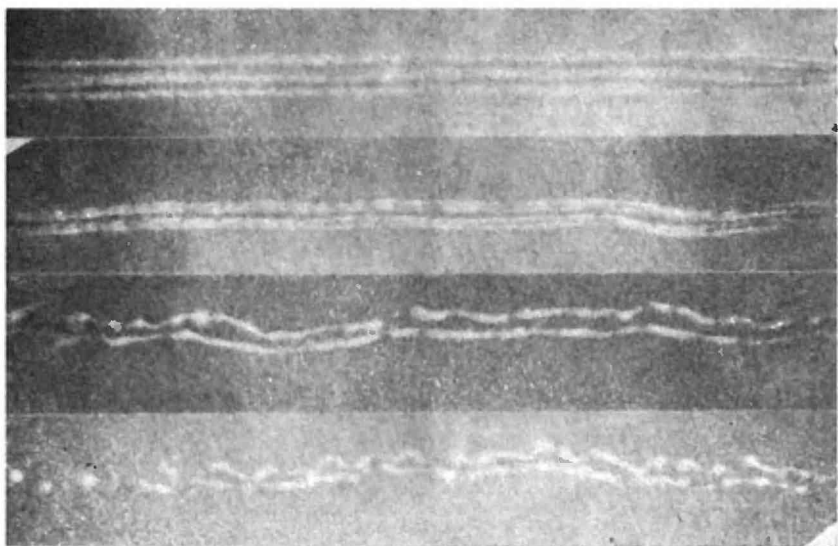


Рис. 11.4.8. Четыре последовательных снимка конденсационного следа от четырехмоторного самолета.

На первом снимке, сделанном под углом  $30^\circ$ , можно видеть, что нисходящий поток, который поворачивает след внутреннего мотора относительно следа внешнего мотора, порождает различие во внешнем виде двух пар следов. На остальных трех фотоснимках видны только следы от внешних моторов, окружающие вихревые ядра. На четвертом фотоснимке ближний (верхний) след выглядит более деформированным, чем дальний, из-за того, что фотоснимок сделан снизу.

## 11.5. Динамика кучевых облаков

Конвекция переносит частицы воздуха до уровня конденсации, выше которого теплота, освобожденная при конденсации, становится основным источником плавучести. Хотя дождь и выпадает на землю, большая часть конвективных облаков испаряется, перемешиваясь с окружающим воздухом, в котором они поднимались. Таким образом, потери тепла на испарение также являются важным свойством процесса. Как только возрастает роль влаги, простота математического описания ситуации исчезает, и попытки многих авторов воскресить радости медового месяца с теорией частично турбулентного потока оказываются тщетными. В проблеме есть нечто неуловимое, чего ни карты, ни ЭВМ (как и ничто другое) не могут отразить лучше, чем сами облака. Система действительно очень сложна и непрерывно реагирует на все, что происходит и в непосредственной близости, и за много тысяч километров от нее. Она является частью того, что метеорология по своей простоте называет «общей

циркуляцией», имея в виду картину, которая может изучаться только с помощью всей мировой метеорологической службы и крупнейших вычислительных центров. Эта проблема все еще остается неразрешимой, неразрешимой в том смысле, что пока еще нельзя сделать ничего достаточно полезного для человека в поле, — в поле, которое дает хлеб. Тем не менее рассмотрим просто кучевые облака, чтобы попытаться понять, каким образом они переносят массу в атмосфере, создавая прекрасное разнообразие погодных условий, в которых человек может возделывать различные культуры, которые являются элементами его цивилизации.

### 11.5.1. Эрозия термиков

Пример зондирования атмосферы приведен на рис. 11.5.1 в виде линии QLR на тефиграмме. Предположим, что теплый источник образовал теплую частицу воздуха в точке *A*, что температура в ней немного выше средней температуры на земле в точке *Q* и что она поднимается до уровня конденсации *C* вдоль сухой адиабаты, а затем к точке *D* вплоть до уровня середины кучевой облачности по влажной адиабате. В течение всего подъема частица остается теплее окружающего воздуха. В конечном итоге она всплывает в облаке и перемешивается с окружающим воздухом в точке *R*, воздух в которой насыщен и, по нашему предположению, имеет отношение смеси, равное 1 г/кг. Результаты перемешивания можно определить, если представить себе, что частица и окружающий воздух перенесены на уровень конденсации таким образом, что частица опять попадет в точку *C*, а окружающий воздух — в точку *S* вдоль сухой адиабаты, проходящей через точку *R*.

Если смешение произошло, то полученная смесь будет характеризоваться точкой *M*, средней для прямой *SC*, и отношение смеси будет средним между 9 и 1, а именно 5 г/кг. Если теперь вернуть смесь на соответствующий ей уровень, то она переместится по сухой адиабате до точки *N* вдоль линии насыщения для отношения смеси в 5 г/кг, а затем по влажной адиабате — до точки *P*. Таким образом обнаруживается, что смесь на 2°C холоднее окружающего воздуха, который характеризует точка *R*, тогда как окружающий воздух в точке *L* был бы на 1°C холоднее. Если теперь эта частица будет перемещаться до точки равновесия, она достигнет точки *L*, где будет иметь ту же температуру, что и окружение.

Следовательно, этот пример (а таких примеров с помощью тефиграммы можно привести много) показывает, что частицы на вершине кучевых облаков много холоднее окружающего воздуха, особенно если они сухие (в нашем примере окружающий

воздух имеет относительную влажность, равную 20 %). Оседание, которое возникает в результате этого процесса, легко мо-

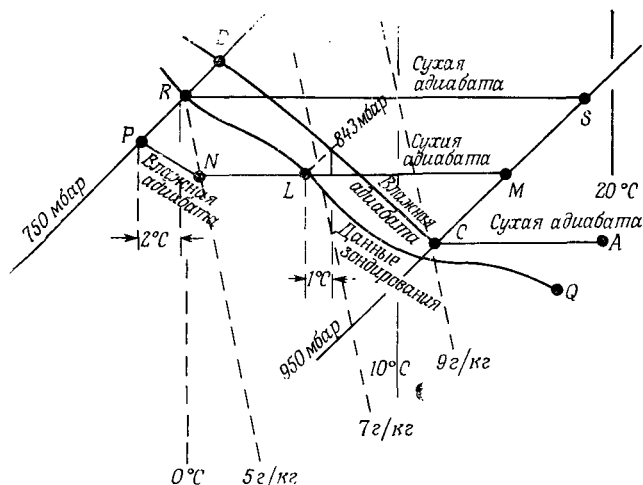


Рис. 11.5.1. Кривая зондирования на тегиграмме.

Окружающий воздух представлен кривой зондирования QLR. Теплая частица воздуха, поднимающегося без заметного перемешивания от точки A, должна была бы следовать вдоль ACD, если бы она стала насыщенной в точке D. Если она перемешивается в равных пропорциях с окружением в точке R (окружение имеет влажность 20 %), то смесь имеет характеристики точки P (M является средней точкой CS). Для частицы в точке P равновесный уровень находится в точке L (подробности см. в тексте).

жет наблюдать внимательный исследователь облаков, а для планировщиков этот процесс является общеизвестным.

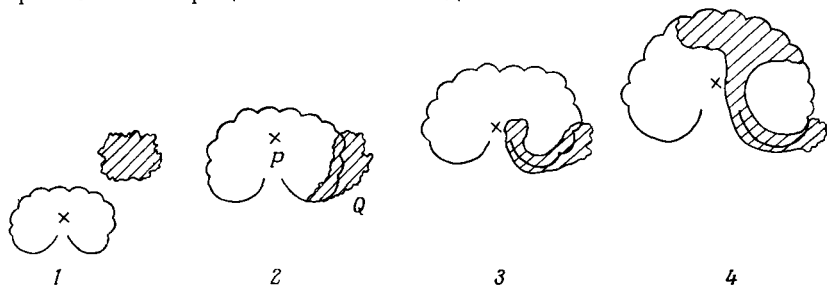


Рис. 11.5.2. Последовательные положения поднимающегося термика, в который вовлекается окружающий воздух.

Объем окружающего воздуха зафиксирован. После положения 4 этот объем воздуха должен расширяться во все стороны.

В свою очередь, чтобы облако могло подняться в сухой атмосфере высоко, оно должно быть достаточно большим для того, чтобы частицы могли подниматься вплоть до его границы, не



испаряясь; это наиболее вероятно, если подъем происходит вдоль пути, уже увлажненного предыдущим термиком.

С целью иллюстрации интенсивности перемешивания на рис. 11.5.2 показана последовательная эволюция некоторого объема окружающего воздуха (на рисунке заштрихована), который вовлекается в термик. После положения 4, показанного на рисунке, вовлеченный воздух будет циркулировать относительно оси термика; таким образом, воздух будет полностью перемешан за то время, пока термик поднимается на высоту, равную полутора своим диаметрам. Если в облако вовлечен внешний

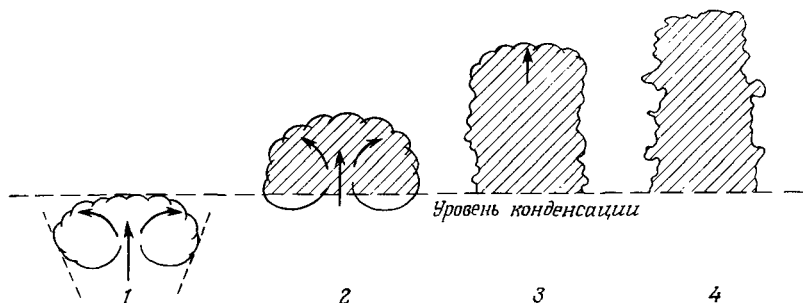


Рис. 11.5.3. Последовательные положения термика, поднимающегося выше уровня конденсации.

После того, как термик примет последнее положение, приведенное на рисунке, башня быстро испарится и опустится вниз.

сухой воздух, то, очевидно, термик не сможет подняться высоко, пока все облако не испарится. На рис. 11.5.3 эволюция облачной башни показана в виде последовательности ее состояний. Четко очерченная вершина, характерная для растущего кучевого облака, находится там, где к поверхности поднимается свежий насыщенный воздух. Благодаря большой скорости подъема количество влаги оказывается достаточным для образования капель в ядрах конденсации. Вследствие этого облако становится довольно плотным и имеет прозрачность порядка метра и меньше, что и является причиной его четких очертаний. После состояния 4 остатки башни занимают свой уровень равновесия в устойчиво стратифицированном окружении и постепенно испаряются, совершая небольшие движения, возникающие за счет выхолаживания при испарении, до тех пор, пока облако, наконец, не исчезнет. После этого останется увлажненная башня чистого воздуха.

Если термик растет при наличии сдвига ветра (рис. 11.5.4), то его ось наклонена в направлении, противоположном наклону остальной части облачной башни. Механизм эрозии можно легко

продемонстрировать в лаборатории с помощью эксперимента, в котором модель термика опускается в стратифицированной массе воды. На рис. 11.5.5 в верхней части резервуара масса жидкости не стратифицирована, и термик ведет себя так же, как и на рис. 8.2.1. Как только термик достигает стратифицированного слоя, он оставляет за собой след, состоящий из разбавленного вещества самого термика, причем каждая частица приходит в состояние покоя на уровне, соответствующем ее плотности. На последнем снимке показан термик, который перестал расти, достигнув стратифицированного слоя, и слегка расплылся

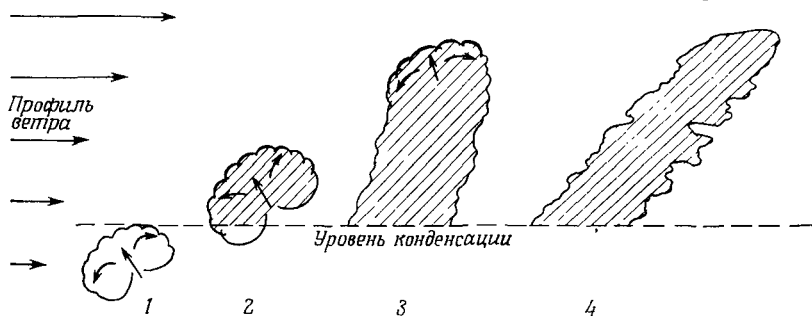


Рис. 11.5.4. Последовательные положения облачной башни, поднимающейся при ветре со сдвигом.

Хотя башня наклонена в направлении сдвига, ось термика во время его подъема наклонена в противоположном направлении.

выше этого уровня. Облачность, подобная описанной башне, характерна для зоны пассатов и других океанических областей (см. снимок на рис. 11.5.6, а также работу Малкуса и Скорера, 1955).

Когда влажные башни воздуха находятся в течение нескольких часов в потоке со сдвигом ветра, их вершина может сместиться на расстояние в сотни миль от основания. В результате такой деформации башня превращается в ряд тонких слоев воздуха с высокой влажностью, перемежающихся прослойками с меньшей влажностью (рис. 11.5.7). Когда эти слои становятся видимыми в волнистых облаках, образуются «пачки пластин», показанные на рис. 11.5.8. Если облака поднимаются довольно медленно в потоке со сдвигом ветра, то происходит новый рост облаков с наветренной стороны, так как термики обычно поднимаются последовательно из перемещающегося источника (рис. 9.8.5). Когда воздух в термиках сильно разбавлен окружающим воздухом и перемещается на некотором уровне примерно со скоростью ветра, то испарение и опускание, происходящие на этом уровне, создают нисходящий поток в подветренной части термика (рис. 11.5.9).

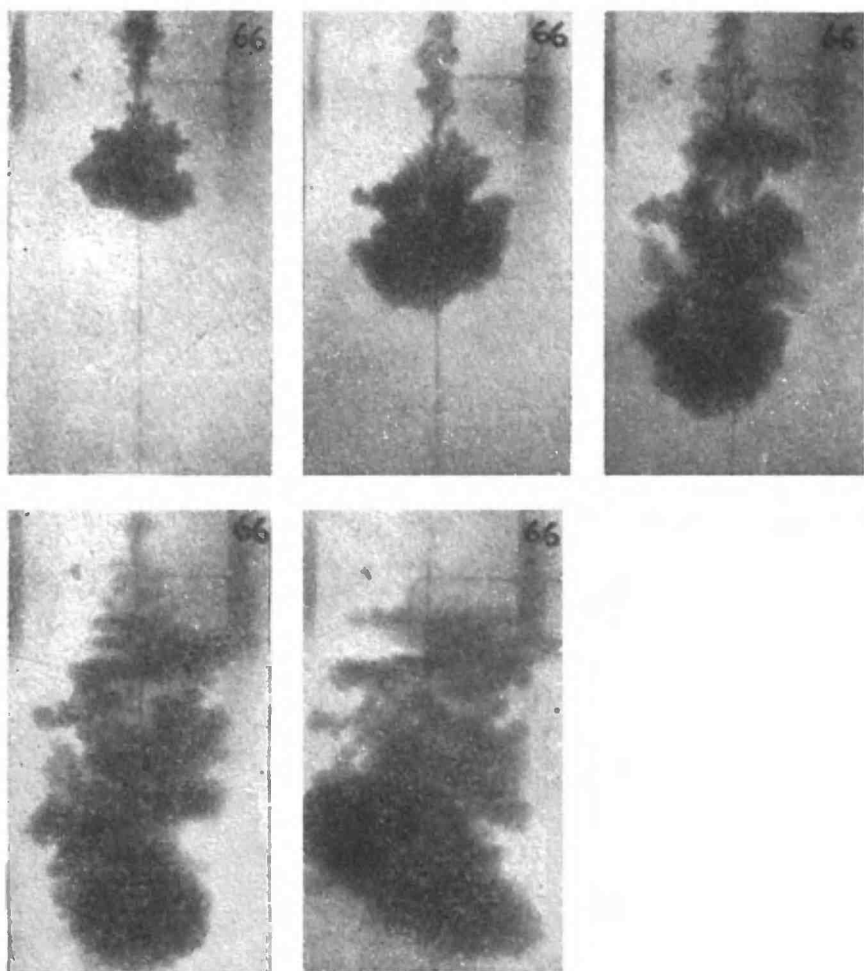


Рис. 11.5.5. Модель облачной башни, поднимающейся в стратифицированном окружении.

Термик образуется из подкрашенной соленой воды, вводимой в верхнюю часть резервуара, жидкость в котором стратифицирована за счет роста концентрации соли в направлении ко дну резервуара. Башня разрушающегося вещества остается сзади, каждая часть — на своем равновесном уровне в стратифицированной среде. Фронт башни прошел несколько дальше своего конечного положения равновесия.



Рис. 11.5.6. Облака пассатной зоны башнеобразного типа, наклоненные по сдвигу ветра.

Ветер дует с направления восток-северо-восток и убывает по величине с высотой над облачным основанием. Часто эти облака образуют коридоры (фотография Дж. С. Малкуса).

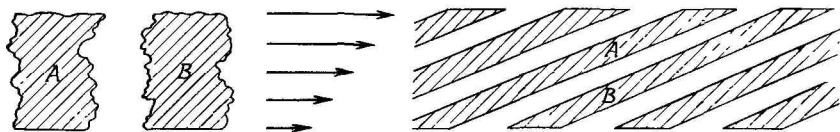


Рис. 11.5.7. Преобразование башни увлажненного воздуха, оказавшейся в слое со сдвигом ветра, по прошествии нескольких часов в форму слоев попеременно высокой и низкой влажности.

Со штормом через несколько дней его существования получается нечто подобное, т. е. на больших участках неба создаются тонкие прослойки увлажненного воздуха.

### 11.5.2. Облака и инверсия; шапки; охлаждение и нагревание

Когда термик приближается к инверсии, он растекается на ее нижней границе, хотя временно может приподнять ее за счет имеющегося у него направленного вверх количества движения. Он может, кроме того, образовать влажный слой под инверсией, который может принять форму облака. На рис. 11.5.10 показано, как термик смещает влажный слой вверх, выше уровня его конденсации. При этом образуется облако с шапкой, кото-



Рис. 11.5.8. Расслоение волнистого облака по влажности, связанное со сдвигом ветра (Скалистые горы в Боулдер, шт. Колорадо).

Этот тип волнистых облаков часто называют «пачкой пластин», особенно для изолированного облака (фотография Дж. П. Лоджа).

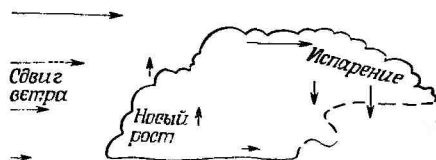


Рис. 11.5.9. Рост кучевого облака при сдвиге ветра.

Рост облака происходит из движущихся медленнее слоев с наветренной стороны. Испарение и оседание происходят с подветренной стороны облака.

рая впоследствии иногда может преодолеть инверсию. Если термик представляет собой конвективное облако, а инверсия расположена достаточно высоко над его уровнем конденсации, то над вершиной облака может возникнуть шапка, которая иногда может проникнуть сквозь инверсию. Шапки обычно появляются на небольшое время и затем опускаются обратно на свой первоначальный уровень. Иногда термик, образовавший шапкообразное облако, сам не виден, если шапка находится на уровне конденсации для приземного слоя воздуха.

Менее очевидно, что конвективные облака могут создавать инверсию. Заметим, что у основания кучевой облачности существ-

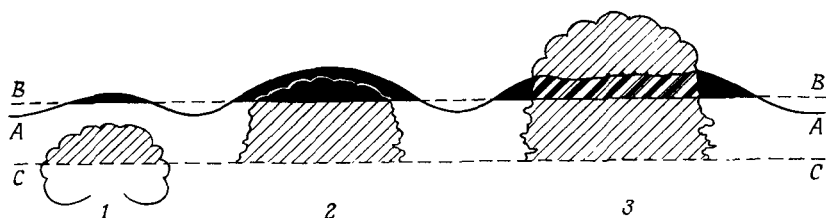


Рис. 11.5.10. Последовательные положения шапкообразных и кучевых облаков (термиком), растущих под ними.

Если термик проникает сквозь шапкообразное облако, то последнее сжимается и вскоре испаряется в нисходящем потоке вне кучевых облаков. Уровни *C* и *B* являются уровнями конденсации для кучевых и шапкообразных облаков соответственно. Термик может быть невидим, если *B* и *C* совпадут. Точка *A* является положением, до которого термик искривляет устойчивый слой.

вуют потоки тепла и плавучести, направленные вверх. Когда облако достигает самого высокого уровня подъема, на его верхушке происходит испарение, и этот процесс может вызвать выхолаживание, если окружающий воздух достаточно сух. На некоторой высоте в таком облаке имеется уровень, где поток тепла воздуха, обладающего плавучестью, в точности равен отрицательному потоку скрытого тепла движущихся наверх жидких водяных капель. Несколько выше находится уровень, на котором основную роль играет эффект охлаждения. Мы говорим о «среднем» облаке, так как время существования каждого облака составляет 10—45 мин. При этом одни облака растут дольше, а другие в результате испарения быстро исчезают. На рис. 11.5.11 представлена тефиграмма зондирования атмосферы. Поднимаясь, термик перемешивается с окружающим воздухом и благодаря этому приобретает некоторый профиль температуры, лежащий между влажной адиабатой, проведенной из уровня конденсации (который характеризовал бы облако в отсутствие перемешивания), и профилем температуры окружающего воздуха. Вследствие охлаждения при испарении на уровне

$M$  перемешанный воздух приобретает температуру, равную температуре окружающей среды.

В результате охлаждения некоторые термики поднимаются выше уровня  $M$ , а затем опускаются ниже этого уровня. Другие достигают уровня  $M$  с меньшим перемешиванием и имеют температуру выше средней, а следовательно, больше жидкой влаги. Все термики проскакивают свой уровень равновесия и перемешиваются с воздухом, лежащим выше этого уровня, тем самым выхолаживая его и заставляя опускаться. Однако опуститься

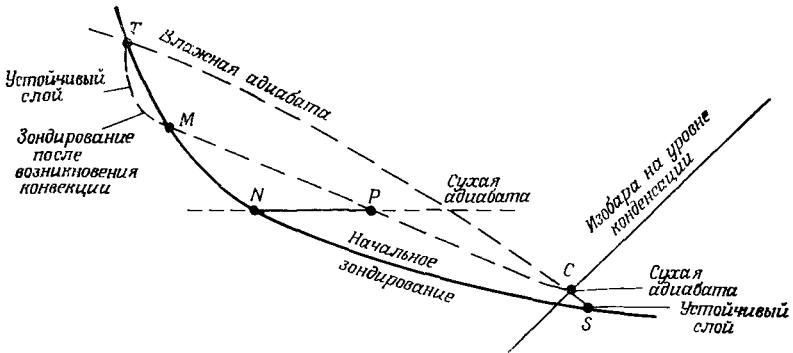


Рис. 11.5.11. Изменение конвекцией начальной тефиграммы зондирования атмосферы.

Пачальное зондирование SNMT изменяется конвекцией снизу до SPMT. С является точкой конденсации для термика, движущегося снизу. Устойчивые слои образуются между S и C и между M и T в результате конвекции.

ниже точки  $M$  они не могут. Термики, поднимающиеся выше точки  $M$ , вызывают выхолаживание воздуха, и ни один термик не может подняться выше точки  $T$ , в которой влажная адиабата, проведенная из точки  $C$ , пересекает температурную кривую зондирования, кроме тех случаев, когда термики преодолевают весь подъем не перемешавшись. Так как перемешивание всегда имеет место, точка  $T$  является хорошей оценкой высоты подъема термиков. Между  $T$  и  $M$  окружающий воздух медленно охлаждается. Ниже точки  $M$  воздух нагревается благодаря оседанию, необходимому для компенсации восходящего движения в термике. Это происходит до тех пор, пока термик не прекратит движения сквозь окружающую среду. Таким образом, после некоторого времени существования конвекции результат зондирования приблизится к штриховой линии. Поэтому ниже точки  $T$  образуется инверсия, и нагревание за счет оседания представлено опусканием воздуха от точки  $N$  вдоль сухой адиабаты до точки  $P$ .

Ниже уровня конденсации стратификация воздуха близка к нейтральной, и он может медленно нагреваться, как описано

в конце разд. 9.4. Воздух непосредственно над основанием облака устойчиво стратифицирован; воздух, оседающий сквозь уровень конденсации для компенсации восходящего потока в термике, образует слой, называемый *подоблачной инверсией*. Подоблачная инверсия занимает слой СS.

Подоблачная инверсия усиливается, если на том же уровне происходит оседание вследствие крупномасштабного движения воздуха. С другой стороны, если имеется крупномасштабная горизонтальная конвергенция (как, например, над сушей, когда дует бриз), то подъем воздушной массы выхолаживает весь воздух над основанием облака. Это происходит благодаря устойчивой стратификации, которая делает возможным существование конвекции, даже если температура на поверхности не растет.

Следовательно, существование конвективной облачности может свидетельствовать как о наличии горизонтальной конвергенции, так и о росте температуры подстилающей поверхности. Аналогично, потепление часто связано как с оседанием, так и с нагреванием за счет термик. Этот вопрос подробно рассматривается Фрезером (1968).

В случае прорыва холодного воздуха с севера вся воздушная масса быстро нагревается за счет оседания. Следовательно, облака, находящиеся на высоте 8—9 км над уровнем моря к западу от Шотландии, могут достигнуть берегов Португалии уже на высоте всего 3 или 4 км (хотя море здесь и теплее), а Канарских островов — в виде слоя слоисто-кучевых облаков ниже интенсивной инверсии на высоте 1 км. Затем они пересекут Атлантический океан с пассатом, достигнут экватора и медленно потекут над более теплым морем. С ростом температуры океана конвекция проникает все выше и выше, а конвективные облака непрерывно испаряются в окружающее пространство, в котором происходит оседание, и становятся суше над инверсией, через которую проникает все больше и больше термик. Постепенно инверсия поднимается выше за счет проникновения все еще теплых облаков, и к тому времени, когда воздушные массы оказываются над Карибским морем, высота инверсии достигает уже 3 км. Все это время воздух под инверсией, который участвует в перемешивании, приходит с запада.

Что произойдет дальше, зависит от времени года. Осенью море очень теплое, и облака начинают проникать в инверсию; в результате возникают ливни, которые быстро приводят к образованию тайфунов (см. разд. 4.9 и 11.10). Время от времени возникают ливни, охватывающие большие площади. Воздушная масса, первоначально состоявшая из тонкого слоя холодного воздуха, над которым располагался слой теплого сухого воздуха, войдя в зону пассатов, трансформируется в слой влажного



теплого воздуха. Эта масса поворачивает на север и образует теплый сектор во фронтальной зоне циклонов средних широт. Таков периодический и сезонно изменяющийся механизм общей циркуляции атмосферы над землей. Трудно переоценить важность циклонов при определении того, велики ли оседание и общая конвергенция в областях, где могут находиться конвективные облака; без этого не может быть объяснено поведение конвективных облаков в любой части атмосферы.

Поднимаясь сквозь устойчиво стратифицированное окружение, конвективные облака нагревают не только тот воздух, с которым они перемешиваются, но и весь находящийся между ними воздух, который оседает для компенсации их подъема. Следовательно, воздух над узкой полосой моря может нагреваться за счет оседания, компенсирующего конвекцию над сушей, что препятствует образованию над сушей подоблачной инверсии. Благодаря паличию скрытой теплоты конденсации у всех конвективных облаков, воздух над сушей в дневное время в среднем теплее, чем над морем. При этом каждое облако во время своего подъема создаст возмущение, которое вызывает опускание окружающего воздуха. Радиус области, в которой возникает такое движение воздуха, со временем растет, подобно тому, как понижение уровня поверхности воды следует за уходящей лодкой, создающей поверхностную волну. Все волновые возмущения из области, где образуются кучевые облака, накладываются друг на друга, что вызывает оседания в соседних областях, где нет роста конвекции. Волны перемещаются со скоростью, которая характерна для подветренных волн, но может быть и несколько выше (до 110 км/ч).

Вечером, когда конвективные облака испаряются, воздушная масса, содержащая их, охлаждается, но (если днем выпал дождь) в меньшей степени, чем успела нагреться за день. Это охлаждение порождает расходящиеся волны, которые вызывают подъем воздуха над областью (например, над водой), где днем не было кучевых облаков (Скорер, 1955). Так, над морем, окруженным сушей, вечером могут образовываться облака. Однако эти облака имеют башнеобразную форму и ведут свое происхождение не от термик, рожденных над теплым морем. Эти облака также никак не связаны с прибрежным бризом.

Кучевые облака образуются в воздухе, в котором существует конвергенция, а за счет конденсации возникают восходящие течения. Если у кривой зондирования атмосферы большой наклон, чем у влажной адиабаты, то из облака могут спонтанно расти термики. Такие кучевые облака бывают башнеобразными или хлопьевидными (барашкообразными); иногда они очень быстро испаряются из-за сухости окружающего воздуха (рис. 11.5.12). Пассатные облака часто имеют башнеобразную форму. Однако



Рис. 11.5.12. Башисобразные облака, выросшие из токих облаков, образованных конвергенцией и медленным подъемом.

Когда эти облака очень быстро испаряются, их называют хлопьевидными.

они порождены не термиками, поднимающимися из подоблачного слоя, а приобрели почти всю свою плавучесть за счет конденсации.

Благодаря спутниковой фотографии в последние годы установлено, что облака появляются над узкими морями, такими, как восточная часть Средиземного моря, и присоединяются к конвективной облачности над окружающей сушей. Например, утренний туман движется через море от берега иногда со скоростью свыше 50 км/ч. Ветер и сдвиг ветра совместно со стратификацией изменяют путь, которым движутся волны. (Например, из теории, приведенной в гл. 5, следует, что волны легче перемещаются против сдвига ветра, чем с ним.)

## 11.6. Динамика выпадения осадков

Не будем здесь концентрировать свое внимание на деталях механизмов, благодаря которым большое количество облачных частиц (образовавшихся вследствие конденсации пара) объединяется в небольшое число крупных частиц. Размеры последних

варьируются в широких пределах: от частиц, которые падают со скоростью порядка 1 м/с, до градин величиной с грейпфрут, скорость которых даже несколько превышает самую большую из когда-либо замеренных в градовых штормах величину 30—35 м/с.

С пачала 60-х годов термин «выпадение осадков» часто относили и к радиоактивным осадкам, так как в это время было проведено большое число ядерных взрывов в атмосфере. Но даже тогда его использовали не для обозначения радиоактивных осколков, выпадающих вблизи от эпицентра взрыва, а имели в виду гораздо меньшую сумарную массу очень мелких частиц, переносимых в стратосферу искусственными термиками, образующимися в результате выделения ядерной энергии. Эти частицы не выпадали на землю, так как они были слишком малы, чтобы иметь скорость падения, сравнимую со скоростью вертикальных движений воздуха. Почти все они из стратосферы вертикальными движениями переносились в тропосферу. Оттуда эти частицы, как правило, весьма скоро попадали на землю с дождем; поэтому их выпадение носило, так сказать, «паразитический» характер. Тем не менее они выводились из атмосферы быстрее, чем этого можно было ожидать на основании неверных представлений о вертикальных движениях в стратосфере и предположения, что реальная скорость оседания радиоактивных частиц является наиболее важным фактором их движения.

Здесь мы будем использовать термин «выпадение осадков» для обозначения дождя, снега и т. п., т. е. для водяных частиц, которые имеют такую скорость падения, что влияют на атмосферные движения или внешний вид облаков. Так, при выпадении атмосферных осадков большое количество тепла выделяется вследствие конденсации в жидкую, а возможно, и в твердую фазы. Осадки могут вызвать нисходящий поток, увеличивая вес воздуха, через который пролетают, и выхолаживая этот воздух за счет испарения в него; они могут менять также внешний вид облаков.

### 11.6.1. Фронтальные осадки

Чтобы промоделировать влияние веса частиц, можно проделать простой эксперимент с облачком воздушных пузырьков в воде. Падающие капли создают нисходящий поток. Их вес и их конечная скорость складываются с соответствующими характеристиками воздушного потока. На фронте нисходящего потока частицы скапливаются; там они попадают в медленно движущийся воздух. Это движение скорее похоже на термик или на образующуюся свободную струю с нисходящими потоками, распространяющиеся по бокам от фронта. На рис. 11.6.1

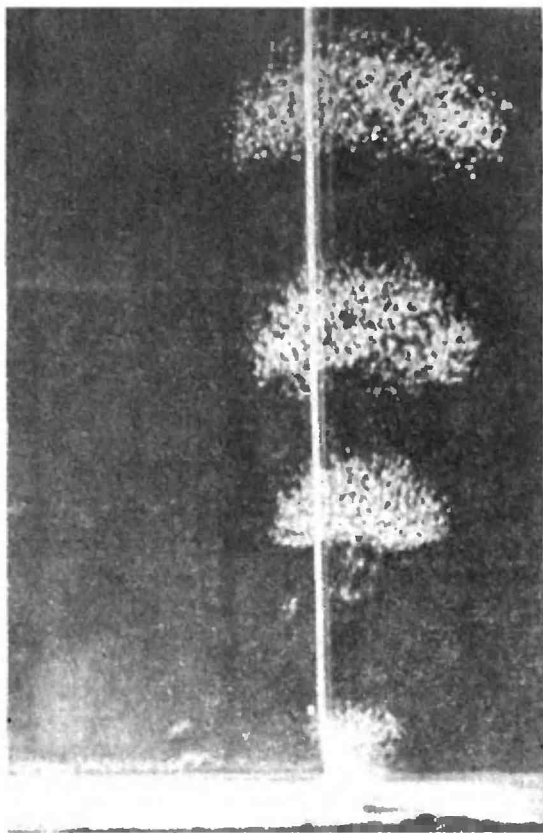


Рис. 11.6.1. Последовательные положения облака воздушных пузырьков, выпускаемых из маленьких отверстий.

показаны четыре последовательных положения облака воздушных пузырьков в воде. В первом положении они только появились из маленьких отверстий в дне резервуара, во втором — появились и всплывают последние пузырьки воздуха. В четвертом положении достигнуто более или менее устойчивое состояние, при котором пузырьки занимают тороидальный объем (около оси их совсем мало), что похоже скорее на термик. На рис. 11.6.2 показано, как облако пузырьков поднимается из слоя замутненной («облачной») воды в чистую воду; оно увлекает с собой замутненную воду, которая перемещается со скоростью подъема отдельных частиц. На этой стадии скорость подъема облака пузырьков в  $2 \div 3$  раза больше скорости подъема отдельных частиц.

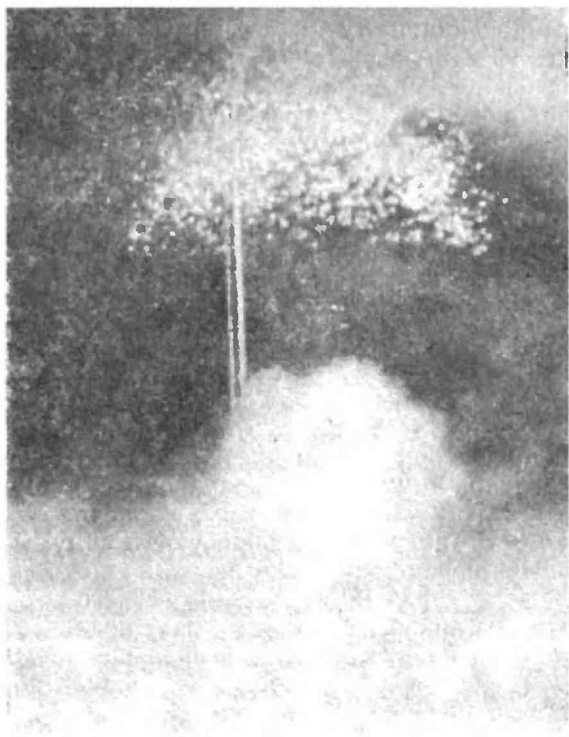


Рис. 11.6.2. Захват жидкости, находящейся за облаком воздушных пузырьков, поднимающихся из замутненной части воды в резервуаре.

Облако вызывает в воде движение, похожее на движение, создаваемое термиком, но отдельные частицы за облаком поднимаются в воде со скоростью, в 2-3 раза меньшей скорости подъема облака.

При большой интенсивности осадков, скажем 5 см/ч, которая обычно поддерживается только несколько минут даже в очень сильных ливнях, при скорости падения частиц  $\sim 12$  м/с (из которых 8 м/с — относительная скорость падения капель, а 4 м/с — скорость движения нисходящего потока), в кубическом метре воздуха находится только около 1 г воды, что эквивалентно выхолаживанию воздуха приблизительно на  $0,3^\circ\text{C}$ . На основании этих данных можно представить себе ситуацию, при которой содержание воды в воздухе может быть эквивалентно охлаждению на  $1^\circ\text{C}$ . Эта величина такого же порядка, как и содержание воды в плотном облаке. С другой стороны, в интенсивном облаке на одном уровне существует разность температур  $\sim 2 \div 3^\circ\text{C}$ ; поэтому, возможно, влажная адиабата для

поднимающейся частицы отличается от температуры, полученной при зондировании, на ту же величину.

Важным эффектом выпадения дождя, особенно когда он состоит из не очень больших капель, является выхолаживание воздуха под облаком за счет испарения капель до температуры влажного термометра. Это выхолаживание растет от нуля в основании облака до  $4^{\circ}\text{C}$  на 1 км выше, если воздух под облаком имеет одинаковое отношение смеси. При меньшей влажности выхолаживание может доходить до  $10^{\circ}\text{C}$ , и, следовательно, испарение может оказывать значительно более сильное влияние, чем вес движущихся капель. К тому же нисходящий поток холодного воздуха будет вытекать вдоль подстилающей поверхности из зоны дождя и тем самым будет продолжать осушать воздух в зоне дождя.

Такие потоки из зоны шторма имеют много общего с фронтами морского бриза (см. разд. 9.9). Их можно наблюдать с помощью радиолокатора благодаря разрыву в температуре, а иногда благодаря тому, что в восходящем потоке перед фронтом парят птицы, так как в теплом воздухе перед ним находится много насекомых. Такие потоки образуют и самумы, в которых холодный воздух перемешивается с песком вследствие интенсивной конвекции над горячей пустыней и сильного ветра. С другой стороны, поток из ливня над морем может подавить конвекцию, достигшую уровня конденсации, за несколько минут. Таким образом, сразу после испарения ливневых облаков вокруг их последнего местоположения может образоваться область ясного неба.

### 11.6.2. Неопределенности фена

Обычно считается, что воздух с подветренной стороны горы теплее, чем с наветренной, благодаря скрытому теплу, высвобождаемому при выпадении дождя в горах. Однако это не всегда верно. Представим себе, что высота горной цепи достигает поверхности 700 мбар ( $\sim 3000$  м над уровнем моря); основание облаков с наветренной стороны (в точке  $A'$ ) находится на уровне поверхности 900 мбар ( $\sim 1000$  м), а с подветренной стороны — на уровне поверхности 700 мбар [т. е. на максимальной для данной ситуации высоте (рис. 11.6.3)]. Из тегиграммы (рис. 11.6.4) видно, что если температура в точке  $A'$  с наветренной стороны равна  $10^{\circ}\text{C}$ , то (считая, что подъем в точку  $F$  на поверхности 700 мбар происходил влажноадиабатически, а спуск в точку  $B'$  на поверхности 900 мбар — сухоадиабатически) воздух на подветренной стороне будет иметь температуру  $18,5^{\circ}\text{C}$ . Следовательно, происходит нагрев на  $\sim 8,5^{\circ}\text{C}$ . Такое повышение температуры легче объяснить с помощью механизма блокиро-

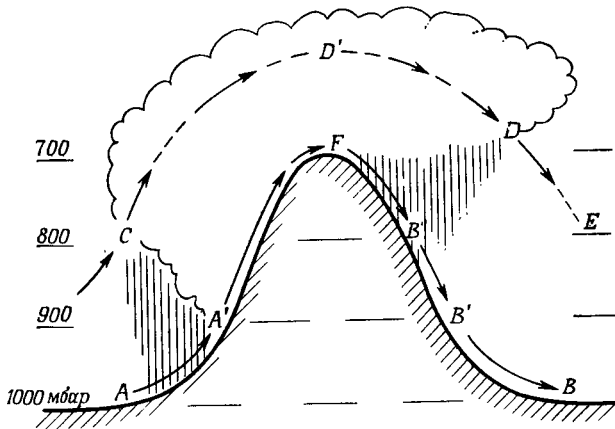


Рис. 11.6.3. Возможный механизм охлаждения воздуха, перетекающего через горный хребет, на котором лежит облако с дождем.

Воздух в точке  $B'$  (тефиграмма на рис. 11.6.4) получается на  $8,5^\circ\text{C}$  теплее, чем в точке  $A'$ , если основание облака расположено на высотах 900 и 700 мбар с наветренной и подветренной сторон соответственно. Если испарение происходит ниже облака, то дождь изменяет полученный выше результат. Другие варианты описаны в тексте.

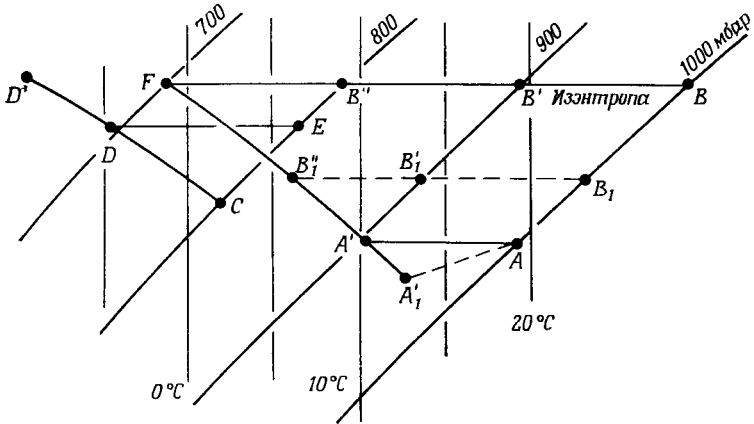


Рис. 11.6.4. Тefиграмма, представляющая возможные изменения в температуре воздуха, перетекающего через горный хребет (рис. 11.6.3).

вания, рассмотренного в разд. 5.18.7 и представленного на рис. 5.18.12. Это объяснение лучше подходит к ситуации, так как нагрев воздуха часто наблюдают в отсутствие облаков на вершине. Очень важную роль может играть турбулентное перемешивание, описанное в разд. 9.8.6, когда в результате такого перемешивания верхняя половина устойчиво стратифицирован-

ного слоя нагревается, а вертикальный профиль температуры по всей толщине слоя становится равным сухоадиабатическому.

При объяснении рассматриваемого явления влиянием дождя также необходимо быть осторожным. Прежде чем воздух поднимется через основание облака с наветренной стороны между точками  $A$  и  $A'$ , может вынестись дождь, который охладит этот воздух и опустит основание облаков до точки  $A'_1$ . (Индекс  $1$  означает, что в течение некоторого времени дождь испарялся в воздух.) Если не имеется соответствующего роста интенсивности дождя, выпавшего вблизи поверхности горы с наветренной стороны, то основание облака с подветренной стороны будет понижаться и частицы будут возвращаться в первоначальное состояние через точки  $B''_1$  и  $B'_1$ . В этом случае повышение температуры по отношению к температуре в точке  $A$  составляет приблизительно половину того, что было вычислено раньше. Аналогично, дождь, проходящий через воздух с подветренной стороны, способствует переносу воздуха вниз по влажной адиабате от точки  $F$  с тем же результатом. Далее, когда вершина горы тонет в облаке и воздух стекает по ней, основание облака на подветренной стороне вблизи поверхности горы обычно находится ниже (в точке  $B''$ , например, а не в точке  $D$ ). Это показывает, что на самой нижней линии тока в воздухе содержится меньше воды для дождя, чем на самой высшей, которая проходит через верхнюю точку облака.

Столб воздуха  $AC$  не является неустойчивым и обычно бывает стратифицирован слабо устойчиво. В этом случае точка  $C$  обладает большей энтропией, чем точка  $A$ , и находится выше линии  $AA'$  на тсфиграмме (рис. 11.6.4). Перемещение воздуха вдоль кривой  $CD'DE$  представлено на тсфиграмме. Из нее можно видеть, что если точка  $D$  не лежит выше линии  $BF$ , то точке  $E$  соответствует более холодная изэнтропа, чем точке  $B$ , и столб воздуха  $BE$  будет неустойчиво стратифицирован. Этого обычно не наблюдается, из чего следует, что при своем перемещении над горами основание облака должно скорее оставаться на линии тока  $CE$ , чем подниматься вдоль линии тока  $AB$ , если столб воздуха  $AC$  не стратифицирован очень устойчиво. Если по данным наблюдений высота основания облаков все же удовлетворяет этим условиям, то, по-видимому, это происходит из-за того, что воздух, находящийся ниже вершины горы, не перетекает над ней. Кроме того, из-за блокирования воздуха над вершиной может происходить опускание по подветренной стороне и испарение находящихся там облаков. Это испарение не связано с дождем в горах. Далее, волновая теория показывает, что облака не обязательно исчезают на подветренной стороне горы (см. рис. 5.16.3), и теплые ветры без дождя —



Фен и чинук — оказываются типичным явлением в горах. Чинук в своей ранней стадии пачнается от земли недалеко от подветренной стороны горы. Представляется возможным, что (так как он опускается с верхних уровней за счет блокирования нижних) волна с подветренной стороны имеет большую амплитуду, и в ней существует вихрь, несущий холодный воздух, все еще не переместившийся от подножия горы. В таких случаях в конце зимы земля с подветренной стороны горы может быть все еще не покрыта снегом.

Таким образом, для объяснения данного явления обычно рассматривают облака, обволакивающие вершину горы, а выпадение дождя учитывают только на наветренном склоне. Такое объяснение оказывается поверхностным. Оно может быть правильным случайно, а более общей причиной нагревания является блокирование. По-видимому, наиболее эффективный пример нагревания дают горные ветры Наталя. Воздух, поступающий в Дурбан со стороны гор, иногда имеет такую потенциальную температуру, которая указывает на то, что он спустился с высоты, большей, чем высота вершин гор (высота гор 3600 м, расстояние до них — примерно 250 км). Высокая приземная температура в этом случае, вероятно, частично объясняется перемешиванием устойчиво стратифицированной воздушной массы.

### 11.6.3. Динамика вымеобразных облаков

Если облачные термики распространяются в устойчивом слое, то на нижней поверхности (т. е. на основании) этих облаков с наковальной влажностью имеет разрыв. Эта поверхность опускается (возможно, за счет подъема последующих термиков или благодаря неровностям подстилающей поверхности, над которой движется воздух) в пространство между инверсией и основанием облака. Тогда воздух над основанием облака будет оседать вдоль влажной адиабаты и охлаждаться быстрее, чем воздух в нижележащих слоях, который оседает по сухой адиабате. При опускании основания на 100 м разность в температурах достигает  $1/2^{\circ}\text{C}$  в соответствии с характеристиками сухой и влажной адиабат для большей части тефиграмм. Если до оседания воздушных масс вертикальный градиент температуры выше и ниже облачного основания влажноадиабатический (что вполне естественно), то слой воздушной массы, равный по толщине глубине оседания, может быть вовлечен в возникающую неустойчивость. Основание облака при этом сморщивается (рис. 11.6.5 и 11.6.6). Дополнительные иллюстрации по этому вопросу имеются в работе Скорера (1958).

Верхняя поверхность облачных термиков имеет вид, типичный для кучевых облаков, и четкие очертания, связанные с большим

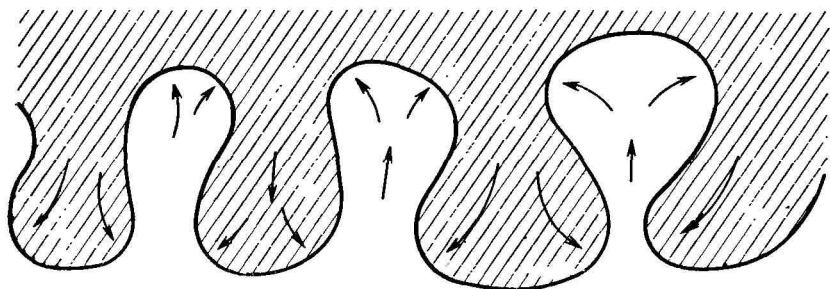


Рис. 11.6.5. Возникновение неустойчивости движения в основании облака с наковальной вследствие оседания (рис. 11.6.6).

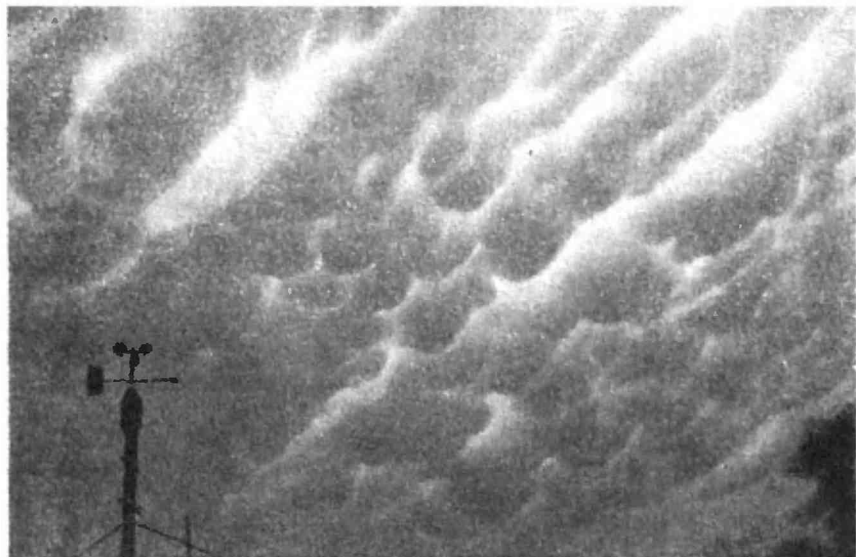


Рис. 11.6.6. Облако с вымеобразным основанием, образовавшимся вследствие оседания.

Это облако первоначально образовалось в результате распространения большого кучевого облака в устойчивом слое. Кучево-дождевое облако с наковальной типично и эффектно само по себе, но то, что мы видим на снимке, возникает, когда меньшие кучевые облака распространяются из его верхушки.

Когда материнское облако растет, а наковальня утолщается, основание наковальни опускается, и вследствие оседания создается неустойчивая стратификация. В результате образуются вымеобразные облака. Неустойчивость может быть усилена осадками, которые охлаждаются ниже вымеобразных облаков и увеличивают там нисходящий поток. Иногда нижняя граница вымеобразных облаков является двойной, причем нижняя представляет собой границу осадков, а верхняя — границу облака. На данном снимке материнское облако находится за левым нижним углом (фотография М. Колдовского).



Рис. 11.6.7. Вымеобразные облака в основании ледяного следа, который сформировался в результате оледенения облака-башни.

Плоские вершины облаков расположены вблизи уровня конденсации первоначального облака. Вода в облаке испаряется, но ледяные выпадения из него увеличиваются вплоть до уровня испарения льда. Затем ледяные частицы выпадают в воздух, не насыщенный для льда, а сдвиг ветра вытягивает их шлейфы влево. После этого испарение охлаждает воздух, вызывая нисходящее движение.

количеством ядер конденсации в сильном восходящем потоке. В противоположность этому основания нисходящих термиков, или вымеобразных облаков, выражены менее отчетливо. Это происходит потому, что при нисходящем движении меньшие капли испаряются быстрее и видимость быстро возрастает до нескольких метров. Когда солнце освещает основание облаков, вымеобразные облака ярко сверкают, но когда солнце светит на верхушку слоя, то просветы показывают, что облака очень тонкие.

Когда идет снег, имеющий гораздо меньшую скорость падения, чем дождь, очертания оснований облаков, из которых он выпадает, видны очень отчетливо. Снег не только увлекает воздух вниз, но и выхолаживает его, и эти эффекты вызывают появление вымеобразных облаков, например при снегопаде во время прохождения теплого фронта. У многих кучевых облаков с наковальнями образуются похожие вымеобразные нижние части, которые отличаются от уже упоминавшихся вымеобразных облаков, порожденных слоисто-кучевыми облаками, тем, что образуются при выпадении ледяных кристаллов в ненасыщенный воздух, который за счет этого охлаждается.

Обычно вымеобразное облако представляет собой след осадков из высоких башнеобразных облаков, которые, замсрзая (разд. 11.6.4), образуют плотные следы. Если воздух, в котором падают кристаллы, перенасыщен для льда, то кристаллы растут, и это происходит непосредственно под башнеобразными облаками, где у основания воздух насыщен для воды. Если имеется небольшой сдвиг ветра с высотой, то следы уносятся в одном

направлении, а затем, когда они достигают ненасыщенного слоя, благодаря испарению начинают возникать выеобразные облака (рис. 11.6.7).

#### 11.6.4. Град

Бержерон и Финдайзен предложили модель, объясняющую, каким образом в облаках с переохлажденными каплями образуются выпадающие ледяные кристаллы. Этот механизм хорошо иллюстрируется рассмотренными в предыдущем разделе осадками из облачного слоя. Если все частицы заморожены (например, при температуре ниже  $-40^{\circ}\text{C}$ ), то они будут оставаться маленькими. Перистые облака, образовавшиеся таким образом, проявляют слабую тенденцию к осадкам, возможно, связанную с небольшим ростом замороженных частиц в перенасыщенном воздухе. К другим крайним случаям относятся хлопьевидные и башнеобразные облака (рис. 11.5.12), которые быстро испаряются, так как окружающий воздух очень сух и оказывается слишком теплым (например, в диапазоне температур от  $-5$  до  $-20^{\circ}\text{C}$ ) для интенсивного оледенения. При промежуточных температурах (от  $-25$  до  $-35^{\circ}\text{C}$ ) могут иметь место различные степени частичного оледенения, когда вследствие достаточно быстрого роста выпадает некоторое количество ледяных частиц. Остальные частицы испаряются благодаря наличию льда в их окрестности (на вершине облака) или в атмосфере ненасыщенного воздуха (на краях облаков).

Более наглядный пример дает поведение слоя перенасыщенного облака, когда оледенение инициируется в одной или двух точках, а температура слишком высока (скажем,  $-20^{\circ}\text{C}$ ) для спонтанного оледенения существующих мелких частиц. Оледенение может начаться с какого-либо кристалла, выпавшего из ледяного облака с более высокого уровня или образовавшегося при пролетании самолета. В этом случае некоторые находящиеся по соседству капли могут замерзнуть, а в следе за самолетом могут образоваться рассеянные замерзшие частицы. Иногда оледенение вызывают искусственно, распыляя в облачном слое частицы сухого льда или йодистого серебра. Твердый  $\text{CO}_2$  сублимирует при температуре  $-72^{\circ}\text{C}$ , так что его частицы в течение некоторого первоначального периода времени имеют температуру ниже  $-40^{\circ}\text{C}$ . Частицы вначале замерзают снаружи, а затем, замерзая изнутри и соответственно расширяясь, распадаются, вследствие чего оледенение распространяется. Замерзание приводит также к выделению скрытого тепла и тем самым способствует перемешиванию, которое рассеивает замерзшие частицы в окружающем неоледевшем облаке. В результате область оледенения растет и образуется окно осадков, показанное



Рис. 11.6.8. Окно осадков в слое облаков, состоящих из переохлажденных капель, вызванное местным оледенением.

Пока кристаллы льда находятся в облаке, где воздух насыщен парами воды, они растут и поэтому выпадают, но обычно в более сухом воздухе внизу они испаряются (фотография Самуэльсона).

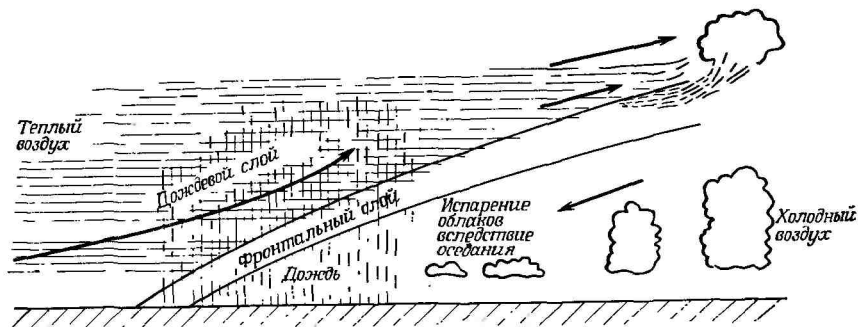


Рис. 11.6.9. Сечение приближающегося теплого фронта.

Облака дождевого слоя и полосы перистых облаков, часто с полосами осадков, ориентированными по сдвигу потока. Ниже фронтальной зоны из-за оседания облака испаряются.

на рис. 11.6.8. Общее количество осадков в таких случаях невелико, так как они выпадают из тонкого слоя; тем не менее наглядной картиной этого явления часто злоупотребляют в дискуссиях, используя как аргумент в пользу программ по управлению выпадением осадков. Такие искусственно вызванные осадки обычно испаряются, не достигнув земли.

Перистые облака, которые могут быть видны вблизи струйного течения перед перемещающимся теплым фронтом (рис. 11.6.9), образуют параллельные полосы очень большой длины благодаря большой горизонтальной и вертикальной протяженности области пересыщенного воздуха в этом случае. Характеристики развития шторма в это время можно наблюдать на небе непосредственно. Ориентацию фронта можно определить по длинным полосам слоистых облаков, быстро перемещающихся в продольном направлении благодаря термическому ветру. Воздух на высоких уровнях движется вверх и наружу из области шторма; на нижних уровнях он движется вниз и внутрь

Рис. 11.6.10. Приближающийся циклон.

В вершине системы — валки перистых облаков, движущихся в продольном направлении с северо-запада в струйном течении. Прямая циркуляция (см. разд. 4.8) становится видимой благодаря полосам осадков, направленным внутрь циклона к тепловому воздуху. Волнистые облака в среднем слое появились, вероятно, из-за возрастания скорости ветра с высотой. Дымовые шлейфы указывают на то, что ветер в нижнем слое дует с юго-востока, см. рис. 4.8.3 (фотография Ладлема).



области шторма, уменьшая тем самым величину облачности в нижнем и среднем ярусах и увеличивая количество перистых облаков. Полосы выпадения осадков лежат поперек полос облаков, что указывает на прямую циркуляцию; в противном случае можно ожидать, что фронт менее активен, и ветер с дождем утихнут. Эту картину описал Бьюси; рис. 11.6.10 иллюстрирует эту ситуацию.

## 11.7. Разнообразные облачные формы

Для более полного рассмотрения этого вопроса читатель может обратиться к книге автора *Clouds of the World*. Здесь мы сосредоточим свое внимание в первую очередь на нескольких механизмах, которые в зависимости от обстоятельств могут вызвать образование громадного количества различных облачных форм.

*Облака плохой погоды* являются разорванными облаками: в дождливую погоду они лежат ниже среднего положения основания облаков. Они образуются при подъеме термика в атмосфере, в которую испаряется дождевая вода и вода с влажной земли. Уровень конденсации в атмосфере при этом понижается.

*Туман при испарении* образуется, когда холодный воздух проходит над теплой водой; он часто виден осенью над теплыми промышленными стоками. Это те же облака пара, какие возникают в ванной комнате; они образуются перемешиванием насыщенного воздуха над водной поверхностью с более холодным воздухом, находящимся выше, как и в самолетном следе.

Облачному слою несвойственно оставаться бесформенным в течение очень долгого времени. Верхняя часть слоя теряет тепло вследствие непрерывного излучения в пространство (если над ним нет другого слоя, излучающего вниз в соответствии со своей температурой). Следовательно, конвекция с верхней поверхности вниз происходит непрерывно, и слои облака и тумана имеют ячеистую структуру в безветренных условиях. Это особенно ярко проявляется для тумана над морем, который нельзя просто объяснить влиянием холодного моря. Туман над морем в действительности все время им греется, даже в областях с низкой температурой воды. Во многих случаях туман вначале образуется над сушей и сносится на море, где возникает устойчивое состояние с восходящим потоком тепла. В тумане над сушей реже наблюдается ячеистая структура, так как земля часто выхолаживается ночью до низкой температуры, прежде чем появляется туман. Хотя ячейки могут быть видны в структуре этих

тонких слоев облаков, циркуляцию в ячейках обнаружить трудно, так как она очень слаба.

Намного быстрее образуются волнистые облака, которые делают видимыми движения, описанные в гл. 6, не оказывая на эти движения существенного влияния. Силы плавучести, возникающие благодаря конденсации, слишком малы, чтобы повлиять на это движение, которое уже имеет большую завихренность, а излучение длится чересчур долго, чтобы возникли заметные температурные аномалии. Очертания облаков в валах зависят от их положения в системе движения. Различные возможности иллюстрирует рис. 11.7.1. Не все эти формы наблюдаются одно-



Рис. 11.7.1. Различные формы облаков, которые могут появиться при движении валов (зачерненные области).

Последовательное развитие валов показано в направлении слева направо. Большая часть разнородностей имеет характер, типичный для волн, т. е. отдельные параллельные элементы размещены регулярно по отношению друг к другу. Однако следующие движения валов могут образовать отдельные перекрывающиеся структуры, поскольку ориентация последующих движений может отличаться от предыдущей (рис. 11.7.2).

временно, и, так как система постоянно развивается, многие формы неустойчивы. Если, как обычно бывает, валы образуются в волне (см. разд. 6.3), развитие конвективного перемешивания может быть остановлено, когда воздух проходит гребень волны, и возникает завихренность другого знака. Таким образом, разнообразные облачные завихрения, возникающие на ранних стадиях развития волнового движения, могут сохраняться, не переходя в более поздние стадии (рис. 11.7.2).

Так как облака отражают перераспределение влажности, они могут оставаться устойчивой системой, если существует испарение за счет оседания, как это обычно происходит с подветренной стороны волны. Таким образом, срывные завихрения или ячейки появятся уже сформированными на наветренной стороне облака на следующей волне.

Устойчивая система может сохраняться очень долго и появиться на следующий день, когда облака на фронте перестроились. Очень часто облачный слой при первом появлении на теплом фронте имеет ячеистую структуру, причем ячейки имеют размеры много большие, чем можно было бы ожидать при данной толщине слоя. Это означает, что данное вертикальное рас-





Рис. 11.7.2. Наложение валов различной ориентации и длины в облачном слое с тонкими кучевыми облаками, возникшими вследствие статической неустойчивости, вызванной потерями тепла на излучение или подъемом слоя.

пределение влажности обусловлено конвекцией, имевшей место за много часов до этого.

Волнистая облачность может состоять из сглаженных чечевицеобразных облаков, возникших, когда резкая верхушка хорошо перемешанного слоя, который был верхней границей конвекции, в некоторых местах поднимается выше своего уровня конденсации. Основание облака в этом случае бывает горизонтальным, в то время как валы образуются иногда на его верхней поверхности.

С другой стороны, валы могут быть видны снизу просто благодаря нескольким просветам в волновой ложбине облачного слоя. Если слой образовался за счет распространения облачной вершины в инверсию, основание может быть точно определено разрывом влажности и, следовательно, может иметь волновую форму.

Волны часто оказывают одинаковое влияние как на поднимающийся, так и на оседающий слой. Таким образом, башнеобразные облака могут возникать вследствие волновых движений и распространяться по линии вдоль потока от точки, в которой происходит конденсация. С другой стороны, при меньшей неустойчивости облако может приобрести ячеистую структуру, которая размывается в подветренной части вала и снова появляется в наветренной части следующего вала.

Волны могут существовать вплоть до очень больших высот, на которых температура может быть ниже  $-40^{\circ}\text{C}$  и капли замерзают почти немедленно. Если воздух остается выше уровня испарения для льда, перистые облака могут растягиваться на много километров в направлении ветра; это *орографические перистые облака*. Такие облака имеют много общего со шлейфами от ледяных облаков с наковальнями при конвекции над островом в океане или над изолированной горой в сухой местности. Источник термиков известен, но часто ветер внизу небольшой, а на уровне перистых облаков он может быть сильным и непрерывно уносит прочь вновь образующиеся облака с наковальнями.

## 11.8. Свободно развивающиеся штормы

Воздушная масса, в которой может пачаться ливень, часто вблизи земли содержит теплый влажный воздух, а выше — значительно более сухой. Изолированные термики, растущие в сухом слое, быстро испаряются. Крупных облаков с длительностью существования, достаточно большой, чтобы возник дождь, не образуется, особенно если имеется сдвиг ветра. Сдвиг ветра благодаря испарению облаков превращает увлажненные башни воздуха в тонкие слои (рис. 11.5.7), в которых испарение подни-

мающихся облачных термиком несколько уменьшается (Ладлэм, 1966).

Вследствие оледенения сильно уменьшается испарение, которое, возможно, является более важным фактором, чем выделение скрытого тепла в количестве 80 кал/г. Прежде чем произойдет испарение, оледенение по механизму Бержерона—Финдайзена вызывает начало выпадения осадков, поэтому последующее выделение скрытой теплоты конденсации произойдет, когда осадки выпадут в виде жидкости. Дальнейшее, очень упрощенное описание основывается на работе Ладлэма (1963), цити-

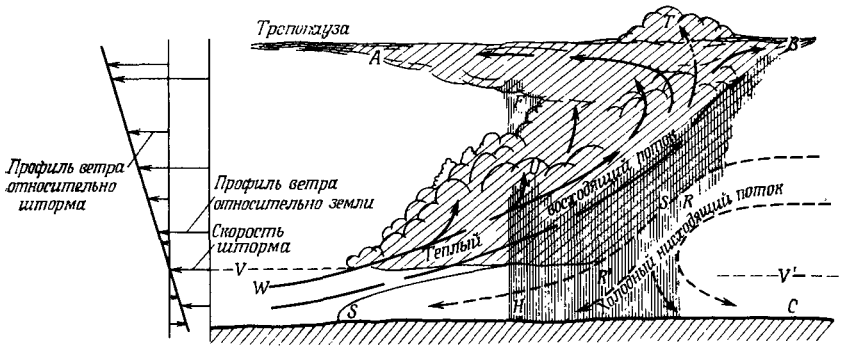


Рис. 11.8.1. Сечение перемещающегося ливневого облака, показывающее свойства, существенные для самораспространения.

Ливневое облако смещает более влажный воздух вперед от себя, а ковер более холодного воздуха, находящийся за ним, увлажняет дождем.  $S$  — фронт приближающегося холодного воздуха, который воспринимается при своем появлении как внезапный шквал. В некоторых случаях он может распространяться далеко впереди шторма.

рованной ранее Ньютоном (1966) и другими авторами. Предполагается, что существует простая двумерная система потоков, которая может вызывать ливень (рис. 11.8.1). При ливне происходит перенос теплого воздуха вверх и выделяется скрытая теплота конденсации. В то же время сдвиг ветра с высотой вызывает наклон облака вперед, и дождь  $R$ , выходя из внутренних слоев облака, попадает в сухой воздух под основанием облака и выхолаживает его. Это выхолаживание много существеннее, чем испарение облака, так как дождь  $R'$  продолжает проходить через воздух, пока не достигнет земли. Так как он выпадает с уровня более сильного ветра, то нисходящий поток быстро распространяется вдоль земли, вытесняя теплый влажный воздух вверх, в облако, что поддерживает процесс (рис. 11.8.1).

На самом высоком уровне, который может находиться непосредственно под тропопаузой, поднимающийся влажный воздух

приобретает скорость своего окружения и образует перемещающуюся вперед большое облако с наковальной *A*. Некоторая часть этого воздуха, поднимающаяся очень быстро (*T*), может рас-

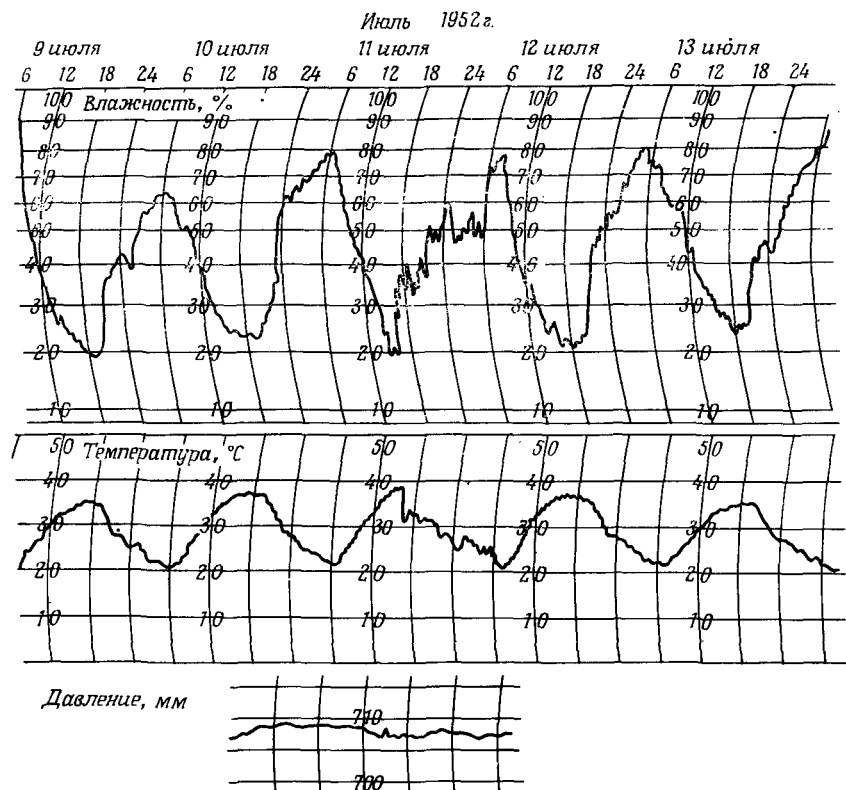


Рис. 11.8.2. Кривые влажности, температуры и давления для Мадрида, показывающие внезапное появление холодного воздуха из зоны шторма в 16 ч 11 июля 1952 г.

В предыдущие и последующие два дня ливней в этом районе не было, так что характеристики воздушной массы оставались неизменными.

пространяться также в противоположную сторону под тропопаузой, а башни *T* проникают на несколько сот метров в стратосферу. Лед, который выпадает из верхней выступающей вперед части облака *F*, может вызвать град *H* в сильном восходящем потоке *U*.

Холодный воздух *S* распространяется над землей и может оказаться далеко впереди шторма, вызывая появление там новых облачных башен, так что система будет развиваться скачками. В общем случае система не является двумерной и существ-



Рис. 11.8.3. Шторм с наковальней, вытянутой преимущественно назад, и новым выростом (на правой стороне снимка).



Рис. 11.8.4. Приближающаяся (слева) гроза (фотография Бетси Вудворд).

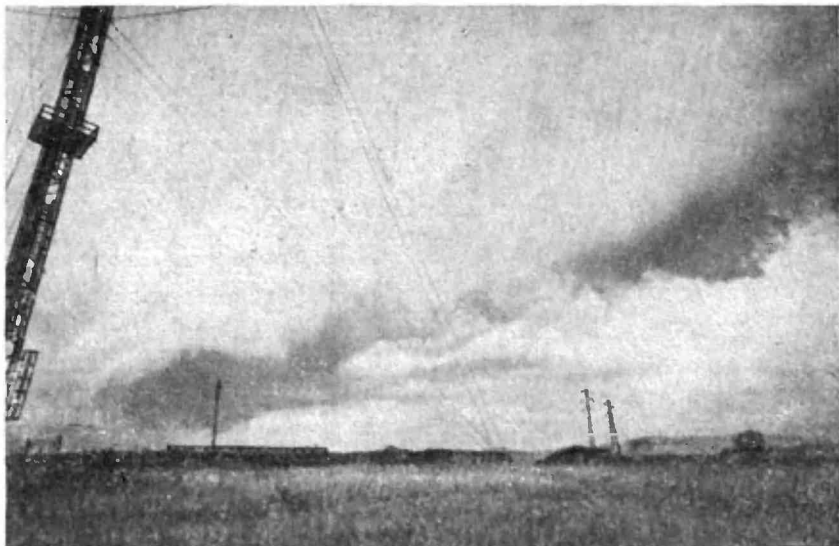
вует много сложностей за счет местных особенностей, таких, как топография. Пример характеристик холодного потока перед штормом показан на рис. 11.8.2 (Скорер, 1953). Графики отражают падение температуры, рост влажности и неожиданное повышение давления.

Теплый воздух  $W$  впереди штормового фронта может распространяться непосредственно у подоблачной инверсии  $V$ ; после того, как шторм пройдет, он может оставить нижнюю инверсию  $V'$ , располагающуюся над воздухом, который был перенесен вниз за счет охлаждения и разостлан под штормом как ковер.

Изменения ветра вблизи подстилающей поверхности могут быть весьма разнообразными. Теплый воздух может либо перемещаться, либо не перемещаться в направлении шторма. Холодный воздух может появляться или не появляться как шквал, и если фронт имеет выдвинутые вперед зоны (рис. 9.9.2), то скорость шквала будет очень заметно меняться вдоль фронта по величине и направлению. Это распространенная ситуация. Появление шквала перед дождем обычно сопровождается шумовыми и прочими эффектами: хлопают двери и окна, на веревках развевается белье, гремят листы сорванного железа, подни-

Рис. 11.8.5. Облако в шквальном фронте приближающейся грозы.

Видно неровное основание облака на границе теплого и холодного воздуха. Выше находится облако с наковальной (снимок М. Колдовского).



маются опавшие листья и пыль и т. д. Во время дождя на небе обычно много облаков плохой погоды. Над шквалом можно видеть планирующих птиц, которые сопротивляются спуску в холодный турбулентный воздух и предпочитают подъем вверх. На рис. 11.8.3—11.8.5 приведены примеры таких штормов.

Математическое описание штормовой ситуации сделать просто. Для этого параметры нужно выбрать таким образом, чтобы можно было воспроизвести динамику системы. Для всех сложных систем движения, включающих в себя несколько механизмов, которые нелегко разделить, это представляет очевидные трудности. Форма движения никогда не определяется расчетами; они обычно предназначены для того, чтобы подтвердить то, что мы уже знаем. При изучении описанных явлений не было получено никаких новых законов физики или динамики, а лишь только их новые комбинации или усложнения.

## 11.9. Роль облаков во фронтальных циклонах

Многочисленные расчеты циклонов на ЭВМ показывают, что их фронты могут быть определены без участия конденсации и выделения скрытой теплоты. С другой стороны, исходная точка, а именно устойчиво стратифицированная атмосфера с горизонтальными температурными градиентами, не может возникнуть без облаков. Вертикальный профиль температуры под основанием облаков большую часть времени является сухоадиабатическим, кроме тонких слоев вблизи земли. Выше основания облаков воздух всегда устойчиво стратифицирован, кроме самого облака, и конвекция поддерживает эту ситуацию. В результате подъем фронтальных поверхностей может привести к концентрации во фронтальную облачную систему, которая далеко не распространяется, что и должно быть в устойчиво стратифицированной воздушной массе. Это значит, что прямая циркуляция, порождающая дождь и ветер, сосредоточена в основном вблизи фронтов и сохраняется много дольше, чем в случае, если бы такого сосредоточения не происходило, поскольку общие характеристики контрастных воздушных масс остаются неизменными. Прогнозисты, использующие ЭВМ, обычно распространяют влияние фронтов на широкую зону, так как разрывы не могут быть описаны грубой сеткой точек. Фронты как бы вставляются на соответствующие им места в пространстве, а затем прогнозисты, используя знание свойств фронта, изобретают детали погоды, которые должны следовать из вычислений перемещений фронтов и их общего развития.

Если бы земля не имела облачности, длительность существования циклонов была бы много короче.

## 11.10. Тропические циклоны, торнадо и водяные смерчи

Благодаря своим малым размерам и большой интенсивности тропические циклоны являются одними из самых сложных объектов для моделирования на ЭВМ. Имеется очень мало данных зондирования над тропическими океанами, которые давали бы возможность прогнозистам точно предсказать, где именно благодаря конвекции выпадет дождь, и возникнет ли он из двух-трех больших штормов или из нескольких маленьких. Критерием, по-видимому, может служить то, что для больших штормов вероятность возникновения увеличится, если имеется возможность их поддерживать. Кроме того, для компенсации поднимающегося воздуха, нагревающего остальную воздушную массу, где-то должно происходить оседание. Иная ситуация реализуется, когда возникает вращающаяся система.

Когда в обширной области над морем формируется вращающаяся масса воздуха, имеющая более или менее равномерное распределение температуры, скажем, около  $28^{\circ}\text{C}$ , падение давления в центре ее может превышать 60 мбар. Воздух, перемещающийся к центру, может быть охлажден на  $5^{\circ}\text{C}$  или еще сильнее вследствие адиабатического расширения и поэтому нагревается за счет соприкосновения с морем, которое, таким образом, благодаря вращению воздуха становится источником плавучести, а также источником скрытой теплоты, так как вода испаряется с его поверхности. Из тефиграммы можно видеть, что рост температуры при 950 мбар и  $25^{\circ}\text{C}$  на  $5^{\circ}\text{C}$  увеличивает влажность в условиях насыщения на 7 г/кг; когда воздух поднимается влажноадиабатически до высоты 500 мбар, он конденсируется в количестве  $\sim 15$  г/кг. Таким образом, при температурах  $\sim 25\div 30^{\circ}\text{C}$  происходит выделение большого количества теплоты от конденсации, и турбулентные потоки воздуха вблизи морской поверхности, наряду с сильным ветром и обильными брызгами, способствуют увеличению испарения с поверхности моря. Интенсивность дождя вблизи конвективных облаков вокруг глаза бури может иметь порядок 12 см/ч или приблизительно 3 м/сут.

Чтобы давление в центре было на 50 мбар ниже, чем в окружающем воздухе, необходимо нагреть воздух при давлении  $\sim 500$  мбар на 10 % его абсолютной температуры, т. е. приблизительно на  $30^{\circ}\text{C}$ . Это, очевидно, не может быть обеспечено описанным выше механизмом нагрева от моря, который позволяет получить не более одной шестой указанного роста температуры. Далее, если бы частица воздуха перемещалась вдоль горизонтального градиента давления с уменьшением на 50 мбар, не замедляясь, она могла бы приобрести скорость порядка 100 м/с



( $\Delta p = \frac{1}{2} \rho q^2$ , и так как  $50 \cdot 10^3$  дин/см<sup>2</sup> =  $\frac{1}{2} \cdot 1,3 \cdot 10^3$  г  $\times$   $\times 100$  см<sup>-3</sup>  $q^2$ , то получаем  $q = 1,14 \cdot 10^4$  см/с). Следовательно, воздух, перемещающийся по спирали внутрь, увлекается восходящим потоком и не достигает центра шторма. Вместо этого воздух всасывается сухоадиабатически из стратосферы вниз, и тропопауза достигает поверхности моря. Вследствие опускания сухого воздуха с уровня 300 мбар при температуре  $-50^\circ\text{C}$  до уровня 950 мбар его температура достигает  $-40^\circ\text{C}$ , и воронка заполняется стратосферным воздухом, обладающим малой плотностью, в результате чего в центре шторма создается низкое давление.

С кораблей и самолетов наблюдается много небольших атмосферных вихрей, скорость в которых достигает 30 м/с и выше. Однако продолжительность существования этих вихрей мала, так как они недостаточно велики, чтобы опуститься из стратосферы к подстилающей поверхности и сохранить достаточно низкое давление в центре, чтобы охладить воздух и превратить море в локальный источник тепла. Возникновение тайфуна требует концентрации завихренности на небольшой площади; такое событие является случайным в районе, где неустойчивость может быть ослаблена большим числом рассредоточенных ливневых облаков.

Развитый тайфун не симметричен и содержит больше облаков в квадранте, в направлении которого перемещается. Он движется приблизительно по ветру на высоте  $\sim 3000$  м, т. е. приблизительно на уровне 700 мбар (см. гл. 4). В нем имеются спиральные группы облаков, как видно на снимках, полученных при радиолокационном наблюдении тайфуна в Карибском море (рис. 11.10.1 и 11.10.2). Эти группы облаков разворачиваются с ветром, но не являются линиями тока для тайфуна. Вертикальное сечение тайфуна показано на рис. 11.10.3, на котором облака растянуты по вертикали (вертикальный масштаб увеличен). Далее мы рассмотрим движения, связанные с облаками.

Опускающийся очень сухой стратосферный воздух движется вдоль стены облаков, окружающих глаз бури. Содержание жидкой фазы в облаках стены доходит до  $10$  г/м<sup>3</sup>. Перемешивание этих двух резко различающихся масс воздуха вызывает выхолаживание приблизительно на  $20^\circ\text{C}$ , если вода испарилась на уровне перемешивания. Следовательно, перемешивание создает мощный опускающийся поток со скоростью до  $\sim 30$  м/с, который заполняет нижнюю часть глаза воздухом, гораздо более влажным по сравнению со стратосферным. Иногда внутри глаза наблюдается плотное кольцевое облако на высоте  $\sim 1$  км от поверхности моря.

Благодаря трению о морскую поверхность ветер вблизи поверхности моря уменьшается таким образом, что его скорость

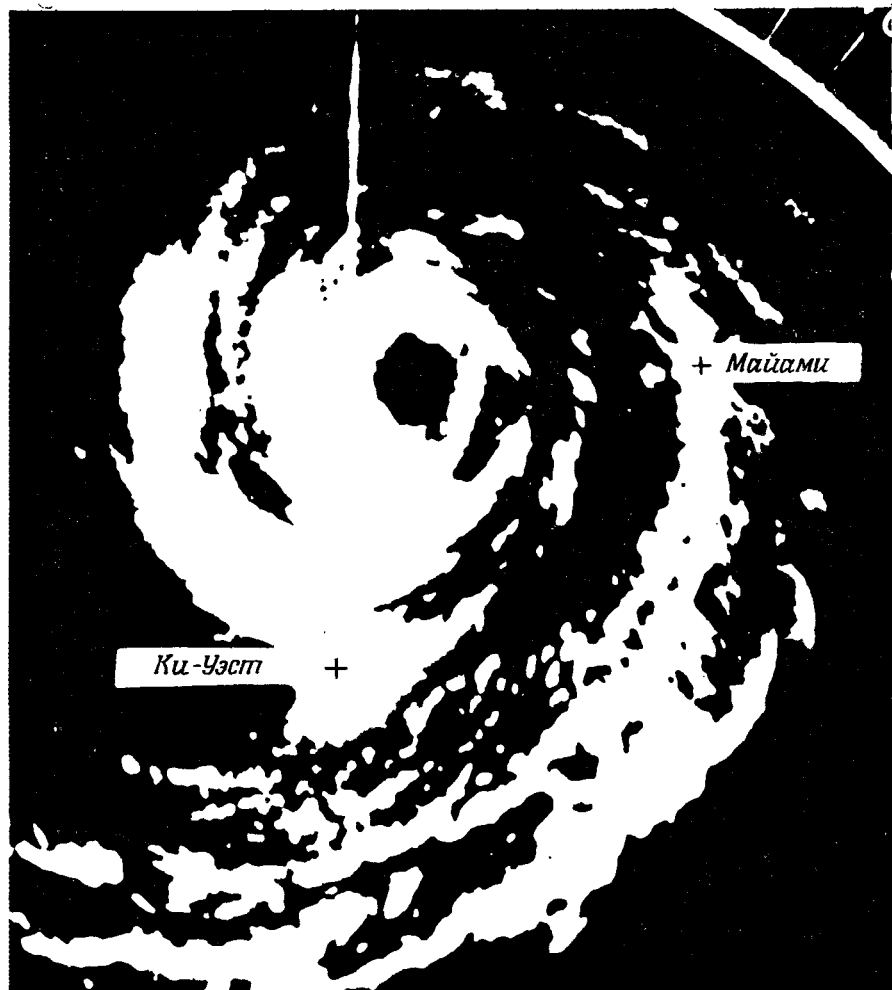
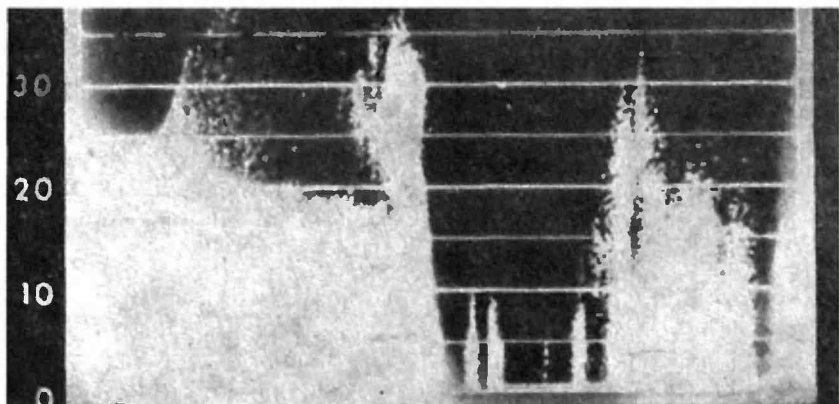


Рис. 11.10.1. Вид сверху урагана Донна, наблюдаемого с радиолокационной станции Ки-Уэст (Флорида).

Снимок следует рассматривать совместно с рис. 11.10.2 и 11.10.3, представляющими сечения облаков. На снимке видны преимущественно кучевые облака, из которых идет дождь. Самые мощные из них окружают глаз бури. Расстояние от Ки-Уэст до Майами составляет 220 км. Вертикальное сечение, показанное на рис. 11.10.2, сделано примерно на 8 ч раньше через глаз бури, когда он имел ширину 30 км. Высоты даются в тысячах футов (1000 фут=305 м).

становится пропорциональной не  $r^{-1}$ , как в вихре без трения, а  $r^{-1/2}$  для типичного тайфуна. В центре глаза наблюдается безветрие. В дополнение к трению у поверхности возникает направленный вверх поток, который в значительной своей части состоит из отстающего воздуха, так что, если он поднимается вверх (обычно вместе с циркулирующей купола перистых облаков), то он начинает вращаться антициклонально со скоростью, меньшей скорости вращения земли. Моряки уже давно используют это свойство для определения местоположения глаза тайфуна, если они находятся на его периферии. Центр шторма перемещается обычно со скоростью 10—15 морских узлов, и большинство судов могут избежать его при хорошей навигации и умении читать небо. В радиусе 300 км от него вертикальная компонента вращения земли на широте  $19^\circ$  (где  $\cos \theta = \pi^{-1}$ ) создаст тангенциальную скорость, равную 13,5 узлам. Тангенциальный ветер со скоростью 19 узлов имеет, следовательно, реальную скорость порядка 32,5 узла. Если скорость относительно земли растет пропорционально  $r^{-1/2}$ , то это дает скорость 60 узлов на расстоянии 30 км по радиусу от глаза бури, что составляет в пространстве приблизительно 61 узел. На расстоянии 300 км скорость в пространстве снижается до 6 узлов, что эквивалентно —7,5 узла относительно земли на этом расстоянии, т. е. приводит к заметному антициклональному вращению. На расстоянии 600 км эта тангенциальная скорость увеличивается до  $-(13,5 \times 2 - 61 \div \frac{600}{30}) \approx -24$  узла.

Рис. 11.10.2.



Вследствие большого трения о поверхность над сушей тайфун ослабевает и тангенциальная скорость вокруг его центра падает. Но более важным является тот факт, что исчезает источник скрытого тепла, уменьшается интенсивность осадков и шторм быстро теряет силу. Наиболее тяжелые последствия от шторма возникают в первые несколько часов после его появления вблизи берега.

Холодный нисходящий поток от конвективных облаков с осадками часто вызывает интенсивный местный восходящий поток. Если поднимающийся воздух имеет вертикальную завихренность, то быстрое образование плавучести в облаке приводит к понижению давления и возникновению конвергенции в основании облака, аналогичных тем же явлениям в термиках. Растя-

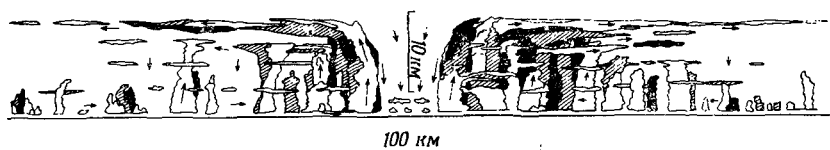


Рис. 11.10.3. Схематическое сечение типичного урагана.

Сечение проведено через глаз бури; линии ливневых облаков такие же, как на рис. 11.10.1. Воздух в течениях, показанном стрелками, дополнительно участвует в круговом движении, описанном в разд. 4.9.

жские вихревые линии интенсифицирует вращение и увеличивает продолжительность существования центра низкого давления. Поэтому в нижележащем слое воздуха возникает конвергенция, и при наличии в этом слое завихренности в нем образуется вихрь, распространяющийся до земли.

Неожиданный рост облачных башен в этих условиях образует облачную воронку, которая постепенно распространяется к земле и, если достигнет ее, сильно увеличивает длительность своего существования. Над морем эти облачные воронки называются *водяными смерчами*. Они часто образуются во время ливней вблизи побережья теплого моря. Многие смерчи существуют всего несколько минут и не достигают поверхности моря. Однако водяной смерч может достичь водной поверхности, даже если ее не достигает основание облачной воронки, которое является приблизительно изобарической поверхностью, причем брызги иногда образуют нечто, похожее на пыльный смерч (см. разд. 9.8.4), поднимающийся с поверхности.

Над сушей благодаря гораздо более разнообразным свойствам поверхности завихренность в нижних слоях больше, чем над морем. Следовательно, когда тайфун проходит над сушей,

он может образовать большее число облачных воронок (называемых над сушей *торнадо*). Этот эффект дополнительно усиливается тем, что воздух в нижней части тайфуна вблизи поверхности много суше, чем над теплым морем. Вследствие этого оседание, когда оно существует, может быть гораздо более интенсивным, чем над морем, благодаря более интенсивному испарению в нем дождевых капель (разд. 11.6.1). Это обеспечивает соответственно больший приток воздуха в облако, образующее воронку. Благодаря этому опускающийся фронт порождает разрыв скорости, который в значительно большей степени, чем над морем, поддерживает существование завихренности.

Торнадо, по-видимому, наиболее интенсивны, когда воздух над основанием облака суше, чем обычно, так как в этом случае число конвективных облаков уменьшается и любое из них, растущее быстрее, будет более интенсивно, если вертикальный градиент температуры над основанием облака круче. Помимо тайфунов, торнадо наиболее интенсивны на вторичном холодном фронте, образованном штормом. При испарении вблизи земли, вследствие нагревания за счет трения при сильном ветре, основании облачной воронки иногда обрывается.

Когда торнадо начинает усиливаться, он быстро захватывает центр шторма благодаря интенсивному росту облаков над ним. Это означает, что начальные торнадо того же шторма перестали расти, а их вершины срезаны, так что вихри наклонились и растянулись. Эта стадия развития торнадо называется *связанной*, так как торнадо вырождается в длинную извилистую облачную трубу.

Дополнительные подробности имеются в книге автора *Clouds of the World*, гл. 14.

### 11.11. Атмосферные приливы

Гравитационное притяжение Солнца и Луны вызывает атмосферные приливы, величина которых в низких широтах составляет  $\sim 10^{-2}$  мбар. Наблюдаются приливы и другой природы, приблизительно в 100 раз большие, с периодом, точно равным 12 солнечным часам, т. е. полусуточные (рис. 11.11.1). Считается, что эти последние приливы имеют термическое происхождение, так как нагревание и охлаждение, связанное с дневным и ночным временем, не является чистой синусоидой с периодом в 24 ч, а имеет отчетливую 12-часовую компоненту. Известно, что атмосфера имеет свой естественный период колебаний около 12 ч для волн, чей гребень проходит вдоль долготы. Следовательно, на вращающейся земле эти волновые гребни остаются фиксированными вдоль долготы и связаны с Солнцем

временем порядка 10 и 22 ч солнечного времени. Этот квазирезонанс демонстрировали Викс и Вилкс (1947), которые предположили, что резонанс был настолько резок, что усилил солнечный гравитационный прилив (но не лунный, который имеет приблизительно на 50 мин больший период). Столь большое (100-кратное) усиление вряд ли возможно вследствие изменений ветра и высоты тропопаузы по широте, долготе и времени. Эти изменения вызывают изменения в скорости распространения приливных волн. Нелегко оценить приток энергии при изменении температуры атмосферы, и ряд авторов не считает, что этот

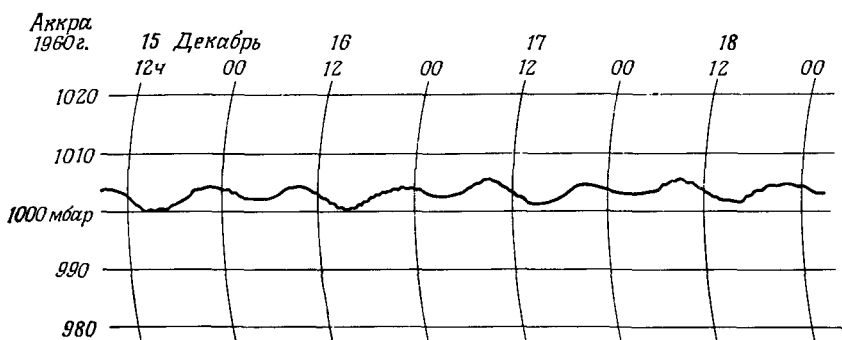


Рис. 11.11.1. Типичная для тропиков барограмма, на которой показаны вариации давления за счет полусуточных атмосферных приливов.

приток достаточно велик для того, чтобы вызвать наблюдаемый прилив без влияния резонанса. Кроме влияния солнечного света и ночных потерь тепла за счет излучения в воздухе вблизи поверхности, имеются большой дневной приток тепла, связанный с суточным производством облаков и дождя, и теплоотвод несколькими часами позже при испарении облаков. Квазирезонанс сглаживается за счет изменений притока изо дня в день, но колебания отражают некоторую зависимость от погоды. Хотя некоторые авторы полагают, что основной причиной приливов является приток тепла в слой озона, находящийся на высоте около 40 км над землей, этот вывод основан на недооценке диссипации и притока тепла от облаков и дождя.

Наиболее интересным аспектом приливов является то, что поле солнечного притяжения должно вызывать ускорение вращения Земли, так как волновой гребень появляется приблизительно на два часа раньше полдня и полуночи. При амплитуде  $\sim 2$  мбар для тропиков, что эквивалентно массе  $\sim 2$  см воды, масса воздуха, перемещаемая воздушными приливами, может быть приблизительно равна массе воды, перемещаемой океани-

ческими приливами. При пересчете на суммарную площадь приливных зон, занимающих  $\sim 0,5\%$  площади океанов, прилив в 2 см возрастает до 10 м. Отразившись от берегов, океанский прилив меняет фазу, и, следовательно, над большой областью происходит замедление вращения Земли в поле гравитационных сил, порождающих этот прилив. Это происходит в основном под влиянием Луны, и в меньшей степени — из-за Солнца.

Следовательно, благодаря квазирезонансу атмосферных приливов замедление вращения Земли за счет океанов компенсируется ускорением приливов в атмосфере, вызванных термическими причинами и солнечным притяжением. Это означает, что влияние Луны, которое увеличивает лунный кинетический момент относительно Земли, приблизительно равно и противоположно по направлению солнечному, которое удлиняет год. Таким образом, кинетическая энергия, получаемая Луной на ее орбите вокруг Земли, порождается не вращением Земли вокруг собственной оси, а вращением Земли вокруг Солнца, и это увеличивает длину года, а не суток. Изменения в скорости вращения так малы, что их невозможно измерить непосредственно, кроме как усреднив за много десятилетий. Более того, поскольку изменения во вращении твердой Земли связаны с изменениями в зональном вращении, для подтверждения или отклонения теории о сохранении продолжительности суток недостаточно получения точных измерений. Климатические изменения могут быть причиной любых наблюдаемых изменений.

## 11.12. Облака и изменения климата

Средняя температура атмосферы определяется общим количеством подводимой и отводимой лучистой энергии. Изменения замедляются за счет большой термической емкости океана. Много написано о росте тепличного эффекта, связанного с ростом содержания углекислого газа в воздухе. Уничтожение лесов и выхлопные газы будут способствовать этому росту, и, по сделанным оценкам, с 1850 года средняя мировая температура выросла на  $0,5^{\circ}\text{C}$ , а при сохранении существующих тенденций промышленного развития к концу текущего столетия она вырастет еще на  $2^{\circ}\text{C}$ .

Несмотря на большие вариации поступающей на Землю солнечной энергии, значительная часть земной поверхности имеет температуру, близкую к  $10^{\circ}\text{C}$ , достаточно подходящую для жизни в течение 3 миллиардов лет. Выяснение того, каким образом Земля избежала много больших изменений в климате по сравнению с теперешними, является более важной проблемой, так как любой эффект, связанный с человеческой деятельностью,

может нарушить механизмы, поддерживающие устойчивость.

Наиболее очевидным и, возможно, наиболее важным фактором является величина облачности. Благодаря ее изменению происходят изменения альбедо Земли (части солнечной энергии, которая отражается Землей обратно в космическое пространство), которым определяется баланс лучистой энергии. Величина облачности меняется от часа к часу и от сезона к сезону. Если бы не было механизма, поддерживающего энергетическое равновесие, температура Земли менялась бы за исторически обозримое время на гораздо большую величину, чем это имеет место в действительности. Общий рост температуры увеличивает количество водяных паров в воздухе и, следовательно, общее количество облаков, в результате чего отражается большее количество солнечного света.

В настоящее время считается, что наиболее важное влияние на климат оказывает прецессия оси Земли с периодом  $\sim 45\,000$  лет. Сейчас Земля находится в наибольшей близости к Солнцу во время зимы в северном полушарии, но когда она окажется на наибольшем удалении от него, зимы в северном полушарии станут более холодными. Это вызовет уменьшение величины облачности над большими массами суши зимой, когда влияние Солнца наименьшее, так как солнечный свет имеет малую интенсивность. Кроме того, увеличится количество снега на суше в северном полушарии, что имеет такое же влияние на климат, как и рост величины облачности.

Сейчас среди многих популярны нелепые и фантастические теории о неумышленном и даже преднамеренном влиянии на климат. Поэтому необходимо еще раз подчеркнуть, что величина облачности играет первостепенную роль в определении средней температуры в различных зонах Земли, которая меняется по сезонам и во много большем масштабе времени.

К сожалению, быстрые изменения и мелкий рисунок деталей облачного покрытия делают очень трудным их наблюдение и измерение глобального влияния даже с существующих спутников. Пройдет еще много лет, прежде чем будут получены данные, которые смогут быть использованы как основание для количественной оценки влияний природы и цивилизации на климат планеты.



## 12.1. Как изучаются явления

Мы живем в эпоху, когда владение той или иной дисциплиной подразумевает столь полные знания, что рядовому человеку очень трудно спорить со специалистом. Если все же спор завязался, то специалист прибегнет к таким аргументам, против которых нечего будет возразить. Однако весьма вероятно, что недостаток воображения помешает ему включить в число рассматриваемых идеи, которые неподготовленному наблюдателю бросаются в глаза. Так, в «Исходе» Х 13 читаем: «И Господь на сию землю восточный ветер, продолжавшийся весь тот день и всю ночь. Настало утро, и восточный ветер нанес саранчу», — и далее в 19-м стихе: «И воздвигнул Господь с противной стороны западный весьма сильный ветер, и он пошел саранчу и бросил ее в Чермное море<sup>1)</sup>: не осталось ни одной саранчи во всей стране Египетской». В то же время вся масса профессиональных биологов долго считала, что саранча летит к определенной цели, и они видели свою задачу в том, чтобы выяснить, какова эта цель. В разд. 12.6 будет показано, что полет саранчи не является целеустремленным и что в ее миграциях на огромные расстояния ее несет ветер, как это и отметил записавший слова Моисея. Тем не менее эта идея встретила решительное сопротивление со стороны биологов, так как она принижала статус саранчи, которая, по их мнению, действовала целеустремленно. Даже сегодня многие биологи непомерно преувеличивают способности птиц к ориентации и склонны искать такие механизмы, как врожденное знание расположения созвездий, которым якобы обладают птицы, или способность чувствовать магнитное поле Земли. Конечно, нет физиологических данных, подтверждающих эти гипотезы, и, казалось бы, здравый смысл требует сначала понять, каким образом вид, который значительную часть жизни проводит в воздухе, реагирует на его движения. В наши дни подготовка ученых, по-видимому, так плоха, что их воображение, кажется, может работать только над концепциями лабораторного характера.

Следует избегать вопросов вроде: «Как птицы определяют направление полета?» — пока мы не будем уверены, что они его действительно определяют. Жизнь птиц выглядит иначе, если

<sup>1)</sup> Так в древности называлось Красное море.— *Прим. ред.*

признать, что они могут совершать сезонные миграции на основании инстинкта, не прибегая к каким-либо формам интеллектуальной деятельности (как, например, в случае нашего дыхания, которое мы можем контролировать, но обычно этого не делаем). Принцип минимума биологической активности, по-видимому, широко используется в природе, так как обеспечивает высокую надежность. Поэтому мы будем исходить из предположения, что летающие организмы руководствуются в полете лишь очень простыми правилами, сводя работу органов чувств к минимуму.

Будем также предполагать, что характер поведения должен способствовать выживанию вида и что простые правила поведения более вероятны, чем сложные, связанные со сложной целью.

Отнюдь не стремясь проявить неуважение к замечательному предприятию под названием «Несси», введем термин «Лох-Несское чудовище» (применяя его по аналогии с терминами «бойкот», «меандр», «кардиган» и др.), которым будем обозначать чудесное существо, способное вызывать множество различных явлений, ошибочно объясняемых одной и той же причиной. Такие объяснения должны быть, по необходимости, еще более чудесными, чем объяснения отдельных явлений. Поэтому «чудовище» должно уметь превращаться в разлагающиеся водоросли, всплывающие на поверхность, моторные лодки, смерчи, косяки рыб и, вероятно, во многое другое. С другой стороны, оно не может быть моторной лодкой, потому что выглядит, как гниющие водоросли; оно не может быть гниющими водорослями, потому что движется, как смерч; и, конечно, оно не может быть каким-либо другим животным, так как иначе его уже давно бы поймали. Таким образом, правомерно назвать Лох-Несским чудовищем неопознанные летающие объекты (НЛО), так как они одновременно похожи и на планеты, и на сигнальные огни самолетов, и на гусей или (для радара) на пятна турбулентности ясного неба, и на разнообразные оптические метеорологические явления (например, кольца вокруг заходящего солнца или луны, образующиеся за счет многократного отражения от почти горизонтальных поверхностей ледяных кристаллов в разреженных облаках), и на миражи, а также сродни другим иллюзиям и преувеличениям. В НЛО ищут единое объяснение ряда не связанных между собой явлений, которые объединены лишь тем, что наблюдаются в то время, когда научная фантастика развивает соответствующие идеи.

Подобные чудесные объяснения часто принимаются всерьез, и широкие слои общества (и, к сожалению, многие ученые) привыкли ждать немедленных ответов. Если я говорю, что навигация птиц посредством магнитного поля противоречит данным экспериментальной физики, то меня немедленно спрашивают:

«А как же тогда они определяют направление?» В огромном окружающем нас мире все так сложно, что лабораторные концепции часто совершенно неприменимы. В то же время длительное пребывание в той или иной среде зачастую делает понимание этого недоступным. С этой точки зрения современные люди, живущие в основном в городах и хорошо защищенные от ненастной погоды даже тогда, когда находятся за городом, хуже всего подготовлены к тому, чтобы даже и за сотни лет понять, что и как происходит в природе. Звезды надежно замаскированы огнями городов, и нам нет нужды что-либо знать о них. Лишь немногие метеорологи, астрономы и натуралисты составляют в этом смысле исключение в современном мире. Создается впечатление, что у большинства биологов, когда они попадают под открытое небо, на глазах остаются лабораторные шоры. То же можно сказать о многих инженерах, физиках и химиках. Вот так и получается, что оператор радарной установки, получивший обычный фотоснимок тающего слоя, который он раньше «видел» лишь на экране радара как «яркую ленту» (в оптическом диапазоне она выглядит совсем иначе), становится свидетелем существования «яркой ленты». (См. Скопер, *Clouds of the World*, 1972, разд. 2.2.1 и 4.3.7, или Скопер и Векслер, *Cloud Studies in Colour*, 1967).

В прошлом многие выдающиеся биологи верили, что на птицу или рыбу действует такая же сила, как на тело, неподвижно закрепленное относительно земли и обтекаемое потоком воздуха или воды (см. Эккуорт, 1955). Это то же самое, что сказать, что дирижабль испытывает избыточное давление только с одной стороны, когда движется под прямым углом к направлению ветра, и именно так изобразил воздух, обтекающий гондолу воздушного шара, режиссер фильма «Вокруг света за 80 дней».

С учетом этих предварительных замечаний должно быть ясно, что в тех случаях, когда механизмы, описываемые в этой главе, дают чисто физическое, т. е. механическое объяснение явлений, связанных с поведением животных, которое прежде «объяснялось» с точки зрения биологии или работы органов чувств, все еще есть место скептицизму.

## 12.2. Тли

Так называют одну из групп мелких растительных насекомых. Летом они живут на зеленых побегах растений колониями, которые состоят из одних только самок, производящих без оплодотворения многочисленное потомство, также состоящее из одних самок. Размножение продолжается, пока есть зелень. В это время, если температура воздуха достаточно высока, взрослые

особи каждое утро покидают колонию. Во второй половине дня улетают насекомые, достаточно подростшие с момента восхода солнца. Их уносят воздушные течения, способные поднять их на несколько километров, в зависимости от того, в какие конвективные потоки они попадают. Вероятность достижения большой высоты возрастает, если тли начинают летать, когда температура поднимается выше некоторой минимальной величины.

Такой механизм позволяет тлям рассеиваться на очень большой территории. Опустившись на уровень земли, они летают туда-сюда, причем их скорость относительно воздуха обычно меньше средней скорости ветра, который поднял их на большую высоту. Наконец, они находят подходящее растение, чтобы основать на нем новую колонию. Вылавливание тлей ловушками, буксируемыми самолетами или воздушными шарами, показало, что их число убывает с высотой по логарифмическому закону, как и должно быть, если справедливо предположение, что их поднимают вверх термоконвекционные потоки. Однако по ночам и ранним утром они концентрируются в некоторых слоях воздуха (Джонсон, 1957; Джонсон и др., 1962). Это, по-видимому, связано с термической инверсией: обычно по мере спуска тли чувствуют, что воздух становится теплее, а в случае инверсии его температура, наоборот, понижается. Считают, что они начинают лететь, как только почувствуют, что под ними находится существенно более холодная масса воздуха и температура быстро убывает на 2°С или более. Точно так же они летают в теплом воздухе у поверхности земли, но перестают работать крыльями и опускаются, если конвективные токи заносят их вверх в существенно более холодные слои.

С наступлением осени начинают появляться самцы, и после спаривания самки откладывают яйца, которые переживают зиму и дают начало новому поколению следующей весной.

Известно, что стрекозы также используют для парения восходящие потоки воздуха, в которых они находят более обильный воздушный планктон, составляющий их пищу (Скорер, 1974). Они парят только над неподвижными объектами, такими, как стены, которые нагреваются солнечными лучами и создают непрерывные восходящие потоки воздуха (Хенкин, 1913).

### 12.3. Ласточки и кукушки

Это два типичных рода перелетных птиц, которых легко узнать по манере полета и издаваемым звукам. Часто можно видеть, как ласточки парят в восходящих потоках теплого воздуха, несущих вверх тлей и других насекомых, которыми эти птицы питаются. Некоторые возражают, говоря, что ласточки

не являются в полном смысле слова парящими птицами, но это не значит, что они не используют восходящие потоки воздуха, в которых они находят свою пищу. В противном случае вряд ли они могли бы находиться в воздухе так долго. Некоторые птицы, например стрижи, могут преодолевать сотни километров, перемещаясь с восходящими потоками холодных фронтов и питаясь насекомыми, поднимающимися с теплым воздухом, вытесняемым вверх наступающей холодной воздушной массой. Их можно видеть также во фронтах морских бризов и оттоках от грозовых районов (Симпсон, 1967; Берсон и Симпсон, 1971; Харнер, 1958).

Так как значительное число ласточек и кукушек не пересекает Британию по пути в другие страны, а прилетает на определенную часть года, то их прилет и отлет легко наблюдаемы, и давно уже замечено, что они сопровождаются попутными ветрами. Поэтому можно предположить, что в основном они мигрируют, двигаясь вместе с ветром.

Известны и другие птицы, летящие большими стаями по ночам и совершающие перелеты на значительные расстояния. Влияние ветра и погоды на них описано Вильямсоном (1969). Открытие, что птицы могут быть причиной сильных отраженных сигналов в безоблачных холодных фронтах, было сделано Харпером (1958) (см. также Харпер, 1957 и 1959).

Результаты этих исследований позволяют сделать вывод, что поведение птиц, вероятно, в значительной мере определяется инстинктивными приемами полета с использованием воздушных потоков, а не целенаправленными действиями, осуществляемыми время от времени для достижения требуемого результата.

## 12.4. Грифы, канюки и другие хищные птицы

Очень интересные наблюдения полета грифов и подобных им птиц выполнил в Индии Хенкин (1913). Он придерживался мнения, что парящие птицы используют — посредством неизвестного механизма — солнечную энергию, а вовсе не восходящие потоки воздуха. Исключением могут быть очевидные случаи, когда воздушное течение при обтекании препятствий, например холма, здания или корабля, направлено вверх. Оглядываясь назад, трудно понять, почему пришлось ждать до 1928 г., когда Вольф Хирт показал, что планер может подняться вверх, попав в течение, созданное термиком. Ведь в наши дни воображение каждого, кто видит парящих птиц, немедленно дополняет картину поднимающейся массой теплого воздуха. Конечно, и во времена Хенкина широко было распространено мнение, что птицы парят в восходящих потоках воздуха. Тот факт, что очевидное не было

восприято как правильное объяснение, наводит на мысль, что научному мышлению может и недоставать остроты. Впрочем, сам Хенкин был химиком.

Многие детали поведения парящих птиц подтверждают мнение, что при термической конвекции образуется множество термиков, которые иногда сложным образом взаимодействуют друг с другом и на ранней стадии развития вблизи земли по форме напоминают развивающиеся свободные струи (см. гл. 9). Весьма краткий обзор наблюдений Хенкина был сделан Скорером (1954) еще когда была общепринятой концепция пузырей и до того, как было вполне понято значение первых экспериментов с термиками. Тем не менее эти заметки могут оказаться полезными для читателей, которых интересует процесс парения птиц.

Наиболее важный вывод, который можно сделать в результате изучения парения, состоит в том, что некоторые птицы, например грифы, обитающие в пустынях, целиком и полностью зависят от способности парить. Подобно канюкам и орлам, они могут жить в гористых местностях, где почти всегда к их услугам имеются восходящие воздушные потоки, текущие вдоль склонов гор. Аналогичным образом, соколы, вороны, воробьи и, конечно, многие птицы, гнездящиеся в прибрежных скалах, используют текущие вверх по склону воздушные потоки, чтобы оставаться в воздухе, не тратя энергии. Хенкин заметил вблизи Агры, что грифы сильно машут крыльями лишь возвращаясь вечером к гнездам, когда термики пропадают. Утром можно было видеть, как они время от времени «пробуют воздух», чтобы выяснить, насколько хорошо развились термики. В большом количестве грифы поднимались в воздух лишь после того, как некоторые из них убеждались, что сложились подходящие условия. Планеристы, видевшие, как грифы «пробуют воздух», высказывали даже предположение, что они обладают способностью «запускать» термики в воздухе, который уже близок к состоянию потери устойчивости. Некоторые крупные парящие птицы улетают на зиму из областей, где термики в это время года нерегулярны; другие в этот период предпочитают не летать.

В Австралии грифов нет, и это, на первый взгляд, кажется удивительным, так как весь этот континент представляет собой в той или иной степени пустыню. Однако здесь случаются продолжительные засухи и нет достаточного климатического разнообразия, чтобы обеспечить надежную базу для существования грифов, когда большую часть континента охватывает засуха. Обитанию грифов здесь мешают два обстоятельства. Во-первых, хищные парящие птицы, питающиеся падалью, не настолько хорошо летают, чтобы пересечь океан и достичь Австралии. По-

этому без вмешательства человека там не может образоваться их колония. К тому же господствующие здесь ветры не способствуют перелету птиц из Азии. Во-вторых, мухи, в большом количестве обитающие в Австралии, могут очень быстро уничтожить любое количество падали. Пережив засушливый период

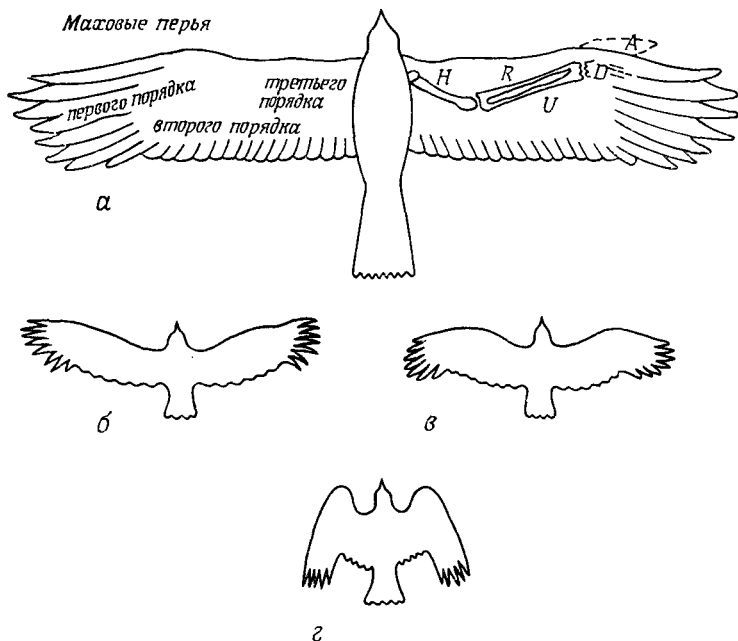


Рис. 12.4.1. Крылья птиц, парящих в термиках или склоновых потоках.

Отношение размаха крыла к хорде мало, а маховые перья первого порядка на концах разделены, что облегчает аэродинамическое управление при малых скоростях, обеспечивает минимальную скорость снижения и малый радиус разворота.

Буквами обозначены кости скелета крыла: *H* — плечевая, *U* — локтевая, *R* — лучевая, *D* — пальцы. Большой палец (крылышко, alula) у некоторых видов заканчивается крупным пером, которое, отодвигаясь, образует щель, препятствующую отрыву потока при малых скоростях полета. Положения крыльев при: а) нормальном парении, б) минимальной скорости снижения, в) большой скорости планирования, г) быстром спуске.

в виде обезвоженных яиц, мухи могут очень быстро — за несколько дней — размножиться, когда создадутся благоприятные условия. Их количество можно было бы уменьшить, переселив сюда грифов. Однако последних пришлось бы искусственно подкармливать в засушливые периоды и поддерживать их численность на высоком уровне, чтобы они могли эффективно уничтожать ресурсы питания мух, когда создаются благоприятные условия для размножения этих насекомых. На постоянных соленых озерах между горными хребтами в центральной части

континента обитают немногочисленные, но устойчивые популяции цапель и бакланов, которые питаются рыбой.

На рис. 12.4.1 показана форма крыльев птиц, в жизни которых главную роль играет парение в восходящих потоках теплого воздуха или в потоках, поднимающихся вдоль склонов в ограниченных пространствах. Такая форма крыла имеет ряд преимуществ. Во-первых, кривизна части крыла, образуемой маховыми перьями второго порядка, увеличивается, когда маховые перья первого порядка полностью расправляются. При этом увеличивается площадь крыла и убывает наиболее экономичная скорость полета, т. е. скорость полета, при которой сопротивление относительно воздуха минимально. Во-вторых, маховые перья первого порядка на концах крыльев раздвигаются и обеспечивают управление пограничным слоем, подобно тому, как это делается на щелевых крыльях планеров или самолетов; у крупных видов той же цели, по-видимому, служит так называемое «крылышко» (*alula*). Все это приводит к снижению скорости, при которой начинается отрыв потока, особенно на внутреннем крыле при парении кругами в относительно тонких термиках с небольшим поперечным сечением или при развороте в ограниченном потоке, текущем вверх по склону горы, когда большой размах крыльев создавал бы неудобства. Сдвинув маховые перья первого порядка вместе и отогнув их назад, птица уменьшает кривизну части крыла, образуемой этими перьями, и может развить гораздо большую воздушную скорость. Это особенно важно при пикировании без потери управляемости или при быстром полете против ветра между термиками, что необходимо для предотвращения сноса по ветру при парении в теплых восходящих потоках воздуха.

Описание наблюдений парящего полета птиц, данное Хенкином, до некоторой степени проигрывает из-за его убежденности, что парение осуществляется вовсе не за счет того, что воздушный поток имеет направленную вверх вертикальную составляющую скорости. Он сам говорит, что не знает, как объяснить парение птиц, и это действительно так, но и в то же время он намеревался опровергнуть ортодоксальное и очень здравое объяснение, принятое в наше время. Феномен парения он превращает в Лох-Несское чудовище. Восходящие воздушные потоки могут быть разными в зависимости от того, какие причины их вызывают. Сводя все их восديو, Ханкин доказывает на примерах, что каждое из предлагаемых объяснений образования восходящих потоков не верно, так как он может указать случаи, в которых они поочередно оказываются неприемлемыми. В некоторых случаях он даже приводит факты, подтверждающие путем наблюдения облаков, что парение обусловлено восходящими потоками воздуха, но не рассматривает их под таким углом зре-



ния. Причина его заблуждения состоит в том, что он в противоположность принятой точке зрения пытается доказать, что восходящие потоки не могут иметь небольшого характерного масштаба.

## 12.5. Альбатросы и динамическое парение

Пока будем пренебрегать скоростью снижения птицы при парении, предполагая, что для компенсации снижения может быть применен тот или иной способ набора высоты, и сосредоточим внимание на способах увеличения скорости полета. Если бы вертикальный профиль скорости ветра имел разрыв, то птица могла бы пересекать его многократно, причем каждый раз в том направлении, при котором ее скорость относительно воздуха возрастает. На рис. 12.5.1 показаны два встречных воздушных потока, разделенных поверхностью тангенциального разрыва. Пересекая эту поверхность в направлениях, показанных жирными стрелками, при наличии разрыва скорости (указан стрелками в левой части рис. 12.5.1), птица увеличивает свою воздушную скорость и может использовать ее приращение для набора высоты. Остается только замкнуть петлю, двигаясь вдоль пунктирных линий, и можно продолжать подъем вдоль поверхности разрыва.

Если теперь вообразим, что схема, показанная на рис. 12.5.1, представляет собой вертикальное сечение двух воздушных потоков, расположенных друг над другом, то, спускаясь по нисходящей части петли, птица будет превращать в кинетическую энергию ровно столько потенциальной энергии, сколько она набрала, двигаясь по восходящей части петли. Следовательно, полет может продолжаться неопределенно долго, если разрыв достаточно сильный. Если заменить разрыв ветровым профилем, показанным в правой части рис. 12.5.1, то при достаточно большом градиенте ветра птица сможет описывать ту же петлю сколь угодно долго без затраты энергии.

Если имеется ветровой градиент  $dv/dz$ , а вертикальная составляющая скорости полета птицы равна  $w$ , то при подъеме по восходящей части петли ее воздушная скорость будет увеличиваться, как  $w dv/dz$ . Поэтому кинетическая энергия будет возрастать со скоростью

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} u^2 = u \frac{\partial u}{\partial t} = u w \frac{dv}{dz}, \quad (12.5.1)$$

тогда как потенциальная энергия накапливается со скоростью  $gw$  и должна вычитаться из кинетической. Птица сможет подняться по восходящей части петли, не теряя воздушной

скорости (аэродинамическим сопротивлением мы здесь пренебрегаем), если

$$g w < u w \frac{dv}{dz}, \quad \text{т. е. если } \frac{dv}{dz} > \frac{g}{u}. \quad (12.5.2)$$

Ясно, что этому условию легче удовлетворить при большей воздушной скорости. На нисходящей части петли потенциальная энергия переходит опять в кинетическую, и потери за счет аэродинамического сопротивления восполняются. Следовательно, нис-

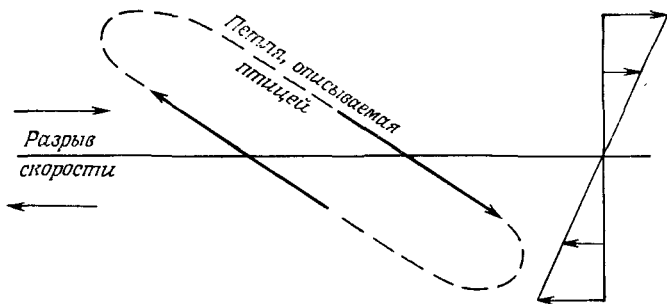


Рис. 12.5.1. Петля, описываемая птицей в воздушном потоке с тангенциальным разрывом скорости.

Описывая петлю, пересекающую плоскость тангенциального разрыва скорости, птица при каждом цикле увеличивает свою скорость относительно воздуха на участках петли, показанных жирными стрелками. Вертикальный профиль скоростей, показанный справа, также обеспечивает полет без затраты энергии.

ходящая часть петли должна быть длиннее, с тем чтобы минимизировать потери энергии на сопротивление при наборе высоты.

Наблюдения показывают, что птицы часто поступают следующим образом: летят в область возрастающей скорости ветра, быстро набирая высоту, затем совершают резкий разворот и направляются вниз, к земной поверхности, резко увеличивая скорость. Обычно эта часть петли используется птицей для поиска пищи на поверхности моря. Затем следуют разворот против ветра, набор высоты и вновь спуск.

Часто птица быстро набирает высоту, перемещаясь из зоны медленно движущегося воздуха на подветренной стороне волны в зону больших скоростей над ее гребнем. Такой маневр особенно выгоден, если у гребня волны происходит отрыв потока. Зона отрыва здесь часто бывает видна благодаря визуализации течения брызгами, срывающимися с гребня волны (рис. 12.5.2). Птицы, следующие за судном, могут использовать образующиеся за ним волны, чтобы продвигаться против ветра вместе с судном. Такой способ полета более выгоден, чем использование

ветровых волн, так как большая скорость относительно воздуха, характерная для волн за судном, облегчает отрыв потока от их острых гребней. Несомненно, что выполняя эти сложные ма-

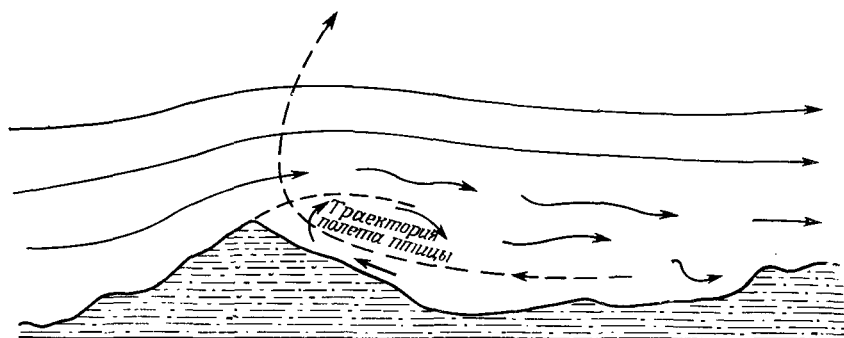


Рис. 12.5.2. Набор высоты путем движения к гребню вдоль подветренной стороны волны.

Птицы используют большой вертикальный градиент горизонтальной составляющей скорости за острым гребнем волны для набора скорости и высоты. Такой способ полета наиболее эффективен, когда волны движутся против ветра, как в случае волн в следе за судном.

невры, требующие большого искусства (так как волны движутся относительно поверхности моря), парящие птицы действуют ин-

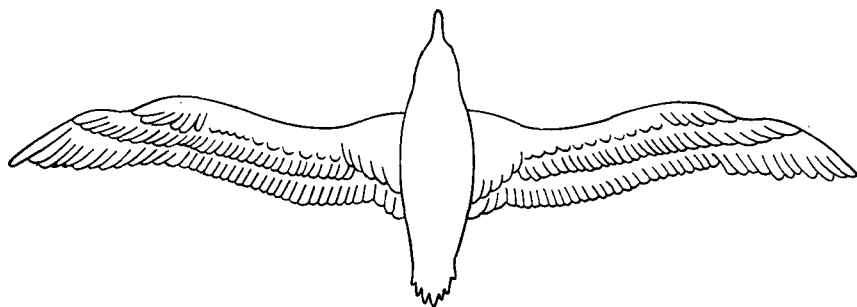


Рис. 12.5.3. Аэродинамический профиль альбатроса.

Крылья альбатроса имеют большое отношение размаха к хорде и форму, приспособленную для полета с большими скоростями при минимальной потере высоты, необходимыми для динамического парения.

стинктивно. Они имеют то преимущество, что могут исправить допущенную ошибку, перейдя на машущий полет или сев на воду. Планеристы вряд ли смогут освоить динамическое парение, так как этому искусству трудно научиться, не совершив множество опасных ошибок.

Если не учитывать локальное ускорение потока над гребнями волн, то необходимый ветровой градиент можно найти из неравенства (12.5.2). Так, если воздушная скорость птицы равна 30 м/с (около 60 узлов), то, поскольку  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>, ветровой градиент должен составлять  $\sim 1/3$  м/с, а таких величин можно ожидать только в нижнем слое воздуха у поверхности моря, имеющем толщину  $\sim 10$  м.

У альбатросов длинные, почти плоские крылья, обеспечивающие минимальное аэродинамическое сопротивление при больших скоростях полета (рис. 12.5.3). Они развивают гораздо большую скорость, чем птицы, использующие термики или парящие в восходящих потоках в горах. Самым крупным птицам трудно махать крыльями вблизи поверхности моря. Кроме того, они не могут взлететь, если нет достаточно сильного ветра, сравнимого по скорости с их оптимальной воздушной скоростью. Гигантский южный альбатрос выводит своих птенцов на отдаленных океанских островах. Чтобы взлететь, он сбегает вниз по наветренному склону. Эти птицы не живут в северном полушарии и вот почему. Как указывалось выше, на невосходящей части замкнутой траектории полета птица при динамическом парении теряет высоту, если не прилагает особых усилий, чтобы продвигаться против ветра. Я наблюдал альбатросов меньших размеров и других подобных птиц во время их долгих путешествий за океанскими лайнерами «Джорджик» и «Фэрстар» при скорости 15—20 узлов ( $\sim 7,5$ —10 м/с) в безветренную погоду и против ветра, но, по-видимому, они не в состоянии угнаться за судами типа «Куин Мэри», идущими со скоростью 29 узлов, иначе как используя восходящий воздушный поток, создаваемый судном. Поэтому птицы, в жизни которых главную роль играет динамическое парение, должны дрейфовать по ветру и, следовательно, совершать кругосветные путешествия, нигде не пересекая сушу. Такая возможность есть только в южном полушарии, где дуют стабильные западные ветры. Крупные альбатросы не могут жить на континентальных побережьях или в тех местах океана, где бывают частые или продолжительные периоды слабых ветров, при которых они не могут парить. В Северном Ледовитом океане западные ветры имеют антициклонические периоды, когда динамическое парение невозможно. Участки суши в водах, окружающих Антарктиду, наиболее крупными из которых являются Новая Зеландия, Южная Африка, оконечность Южной Америки и о-в Южная Георгия, легко можно миновать.

Летучие рыбы, которые пролетают по воздуху до полумили, также могли бы пользоваться динамическим парением, хотя маловероятно, что они это делают, так как их главная цель — оторваться от преследователей, а в этом случае лучше лететь в одном направлении. Однако они могут пользоваться этим при-

емом, летя все время почти под прямым углом к направлению ветра: я видел, как это делают олуши. С другой стороны, существует мнение, что летучие рыбы, находясь в воздухе, опускают хвост в воду и создают тягу, совершая им колебательные движения из стороны в сторону (см. цитированную работу Хенкина).

## 12.6. Пустынная саранча

Пустынная саранча существует в двух фазах — одиночной и стадной. Одиночная саранча обычно не представляет серьезной опасности. Стадная фаза отличается от одиночной и в физиологическом отношении. Одиночная саранча может превращаться в стадную, если ее скученность превышает некоторый предел. Существование одиночной фазы обеспечивает выживание вида в те периоды, когда нет условий для существования стай стадной саранчи. Когда многочисленные стаи саранчи захватывают большую территорию, говорят о нашествии пустынной саранчи.

Бедствие начинается после ливневых дождей над пустынными районами, такими, как Южная Аравия, если перед этим имелось достаточно много особей саранчи. Массовое размножение происходит лишь после дождей в пустыне, что бывает довольно редко. Саранча представляет для нас интерес постольку, поскольку она помогает ответить на вопрос, каким образом вид, который значительную часть жизни проводит в воздухе, может использовать его течения простейшим способом.

Чтобы пошел дождь, воздух должен подниматься вверх, а это значит, что должна иметь место горизонтальная конвергенция. Если особи саранчи летят на одной и той же высоте, но в произвольных направлениях, то при случайных течениях воздуха они будут рассеиваться на большей площади, а при конвергенции — собираться вместе. На холодных фронтах конвергенция может быть очень сильной, так как теплый воздух вытесняется вверх холодным, и саранча в теплой воздушной массе собирается с обширной площади, как будто ее сгребают лопатой.

После дождя стаи саранчи в огромном количестве откладывают яйца в песчаный грунт на глубину около 15 см, и если яйца остаются влажными, новое поколение саранчи отраждается чуть меньше, чем через три недели. Если дожди не принесут необходимого количества влаги, то яйца высохнут и будут оставаться в песке, пока не пройдет достаточно сильный дождь. После обильного дождя появляются буйные зеленые побеги, которые обеспечивают личинок саранчи пищей, обычно в отсутствие конкурентов.

Появляющиеся на свет насекомые малы, бескрылы и называются личинками. Они собираются в калигулы и начинают двигаться вперед, постоянно меняя лидеров — в первые ряды все время выходят личинки со свежими силами, особенно если передовые останавливаются кормиться. Саранча пожирает почти все съедобное, что попадает на пути калигулы. В некоторых районах, где достаточно много рабочей силы, роют траншеи и закапывают в них личинок, как только они заполняются. Другой метод состоит в разбрасывании перед калигулой отравленной приманки.

Наиболее эффективным из известных методов уничтожения калигул является покрытие растительности пестицидами методом дрейфового опрыскивания. Обычно густо посаженные культурные растения опрыскивали инсектицидами с воздуха в безветренную погоду, рассчитывая, что капли осядут на растения под действием силы тяжести. Этот способ не очень хорош, так как верхние листья защищают нижние части растений. Кроме того, он весьма неэкономичен, так как в пустынных районах большая часть инсектицида попадет на землю и создает серьезные трудности, так как может быть унесена лишь при благоприятном ветре, что бывает довольно редко. При дрейфовом опрыскивании используется умеренный ветер, который несет аэрозоль в горизонтальном направлении вдоль земли, и растительность окутывается облаком капель, остающихся за счет турбулентности во взвешенном состоянии на протяжении нескольких километров, но оседающих при столкновении на мелких элементах растений. Если личинки пройдут даже мило или две, они в конце концов наберут смертельную дозу инсектицида. Так как существуют очень стойкие инсектициды, то это позволяет создать в пустыне барьер, преграждающий путь калигулам.

Примерно через шесть недель пустынная саранча достигает стадии взрослых крылатых насекомых. Теперь, если температура воздуха достаточно высока, она днем летит, а по ночам опускается на землю. Большая стая может покрыть территорию в несколько квадратных миль и уничтожить количество пищи, достаточное, чтобы прокормить 100 000 человек. Разрушительная сила стаи саранчи известна со времен начала цивилизации, и уже в Ветхом завете находим некоторые элементарные сведения о ней. Там, например, говорится, что в отличие от муравьев и пчел у саранчи «нет царя, но выступает она вся стройно» («Книга притчей Соломоновых», гл. 30, стих 27), и отмечается, что саранча сидит во время холода и разлетается, когда взойдет солнце («Книга пророка Наума», гл. 3, стих 17).

Экологи считали, что саранча собирается в стаи под влиянием особенностей рельефа или распределения растительности. Если это так, то прилетевшие ранее особи должны оставаться

на месте и ждать, когда придут остальные, чтобы увеличить численность стаи. Факты, которые подтверждали бы такой характер поведения, отсутствуют. Наоборот, известные данные свидетельствуют о другом: саранча летит из местности, богатой кормом, в пустыню, если ветер несет ее в этом направлении.

Рэйни показал, что стаи саранчи летят по ветру, и отклонения от такого характера поведения лежат в пределах точности, с которой известно направление ветра в области, занятой стаей. Время, когда стая поднимается утром и опускается вечером, обычно трудно установить точно. Неопределенность времени прилета еще более увеличивается, так как под стаей обычно имеется

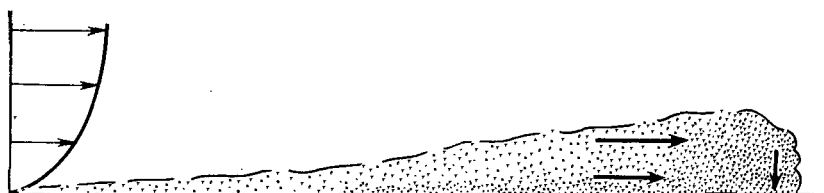


Рис. 12.6.1. Распределение пустынной саранчи в стае, несомой ветром.

Эти насекомые имеют тенденцию опускаться в передней части стаи, где ее плотность максимальна, и взлетать, когда над ними оказывается мало особей.

уже большое количество севшей саранчи. Поэтому саранча перемещается со скоростью, несколько меньшей скорости ветра. Исключением могут быть случаи, когда температура воздуха особенно высока. В стае наблюдается циркуляционное движение (рис. 12.6.1), так как насекомые, летящие на большей высоте, движутся быстрее как благодаря увеличению скорости ветра с высотой, так и в силу присущей саранче тенденции лететь против ветра, когда она находится вблизи земли, особенно при взлете и посадке. Поэтому концентрация саранчи в передней части стаи увеличивается (рис. 12.6.2), и плотность воздуха может возрасти настолько, что возникнет направленное вниз течение, которое заставит особей, находящихся вблизи поверхности, сесть из-за высокой скученности. При этом скорость продвижения фронта убывает. Отставшие особи взлетают, когда небо над ними проясняется, и могут догнать стаю, возможно, потому, что при ясной погоде воздух сильнее прогревается и поднимает их на высоту, которая больше высоты полета всей стаи.

Наблюдения показывают, что если группа саранчи оказывается на границе стаи и ее движение направлено от стаи в свободное пространство, то она поворачивает назад и летит в направлении повышения концентрации. Этот «скин-эффект» не похож на поверхностное натяжение, которое всегда стремится

уменьшить поверхность тела. Если нисходящий поток образует в середине большой стаи дыру, то особи, оказавшиеся на границе дыры, будут лететь от нее, увеличивая ее размеры, и это в конце концов приведет к разделению стаи. Однако этот механизм препятствует полету насекомых в случайных направлениях, что могло бы привести к рассеиванию стаи за счет медленного уменьшения ее концентрации по краям. Стая называется *плотной*, если на  $1 \text{ м}^3$  занимаемого ею объема приходится более одной особи или если над  $1 \text{ м}^2$  поверхности земли находится более 100 насекомых.

В тех же случаях, когда стая саранчи остаются компактными, дым или любая другая взвесь, более или менее пассивно несомая воздухом (например, водяной пар, пахучие вещества, пыльца или тли), рассеивается. Даже если рассеивание ограничено областью между поверхностью земли и устойчивым слоем, движение воздуха заставляет дым расползаться вдоль горизонтальной плоскости. Разные виды саранчи отличаются тем, что

Рис. 12.6.2. Небольшая летящая стая саранчи, занимающая площадь около  $1 \text{ км}^2$ , Уоджир, Кения (фото Х. Дж. Соьера).





стремятся либо оставаться на более или менее постоянной высоте, либо лететь как можно ниже. Попадая в сильные конвективные токи, захватывающие глубокий слой, саранча уносится вверх целыми колошмами, но, как пояснялось в разд. 8.5, она часто может опускаться на нижний уровень, сохраняя высокую концентрацию. Саранча не наблюдается выше уровней, на которые поднимается воздух при термической конвекции; когда конвекции нет, она летит оставаясь вблизи поверхности. Если бы саранча просто использовала горизонтальную составляющую скорости воздушного потока и оставалась на постоянной высоте, то она бы концентрировалась у основания восходящих потоков. Если при этом возникает нисходящее течение, начинающееся не точно из центра скопления в основании предыдущего восходящего течения, то саранча при неизменной концентрации будет целиком перенесена в основание другого восходящего течения, а не рассеется, как это произошло бы с дымом.

Большая стая саранчи, когда смотришь на нее сверху, скорее напоминает раскинутую сеть с высокой концентрацией вблизи питей и низкой концентрацией внутри ячеек. Вся эта картина носит иллюзорный характер, так как саранча лучше всего видна, когда солнечный свет попадает к наблюдателю, отражаясь от ее сверкающих крыльев. В пределах стаи группы саранчи летают в произвольных направлениях, и локальная однонаправленность их полета помогает избежать столкновений. Однако если в вертикальном направлении размер стаи велик, то направление полета относительно воздуха по высоте часто меняется. Поэтому некоторые части стаи видны лучше других и то появляются, то исчезают для наблюдателя, совершающего облет стаи на самолете.

Таким образом, рассеиванию стаи под действием маломасштабных движений воздуха или в результате разлета особей в случайных направлениях противодействуют простые механизмы. Стая может разделиться, если несущий ее воздушный поток обтекает гору, не переваливая через вершину, и соединиться вновь за отдельно стоящей горой. Стаи саранчи никогда не перелетают через горы, если воздух не перестекает через их вершины. Если с одной стороны горы имеет место конвергенция (как на восточных склонах Эритрейских гор), то стаи концентрируются у склона горы, так как саранча избегает удаляться от поверхности земли (рис. 12.6.3).

Ветры, дующие с Красного моря, часто приносят в Эритрею дожди, и в этих случаях саранча старается, насколько это возможно, не попадать в облака, располагающиеся над зоной ветра, дующего вверх по склону. Нередко облачный слой находится под устойчивым слоем, который при дожде не так сильно выражен. Над вершинами гор может бушевать шторм, и, попав

в воздушный поток, саранча может оказаться в этой опасной зоне.

Пока неясно, что заставляет саранчу сопротивляться уносу вверх, но можно высказать ряд предположений: может быть, это потребность видеть под собой землю или чувствовать движение относительно нее; может быть,— стремление избегать низких температур, характерных для больших высот. Перемещение вниз может осуществляться намеренно за счет работы крыльями, если саранча попадает в восходящий поток, или в резуль-

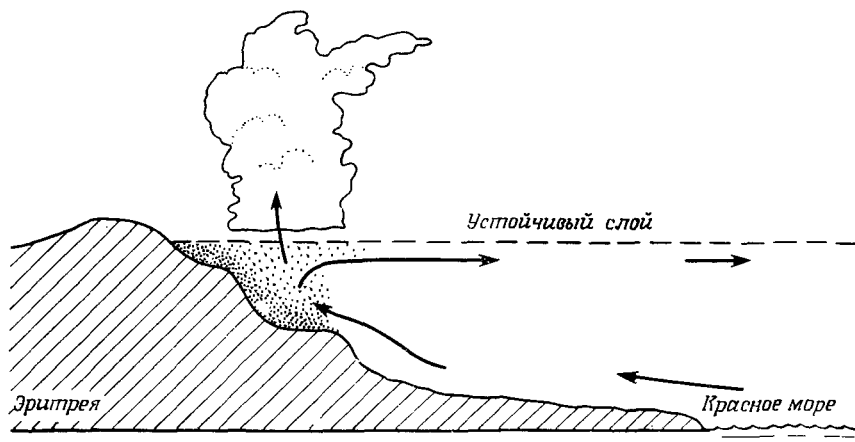


Рис. 12.6.3. Иногда стаи саранчи собираются в зоне ливней на склоне горного хребта. Они стараются не попасть внутрь дождевого облака или в слой, лежащий под слоем инверсии.

тате инстинктивного складывания крыльев, когда температура опускается до уровня, при котором саранча не взлетает с земли. С математической точки зрения эти механизмы можно моделировать, рассматривая движение частиц, сплывших горизонтальной составляющей воздушного потока и имеющих компоненту скорости, направленную вниз и являющуюся простой функцией высоты над уровнем земли (или над уровнем, на котором должен происходить полет) или функцией вертикальной (направленной вверх) составляющей скорости воздушного потока. При подъеме теплого воздуха в холодных фронтах могут концентрироваться насекомые, рассеянные на большой площади. Очень высокие концентрации саранчи наблюдались вблизи Харгейсы в Сомали в области столкновения северного и юго-восточного воздушных течений.

Скорость изменения концентрации насекомых  $\sigma$ , следующих за насекомыми, которые летят со скоростью  $v$  относительно воз-

духа, движущегося в свою очередь относительно земли со скоростью  $\mathbf{u}$ , при  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  равна

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \operatorname{grad} \sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \sigma (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \sigma \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (12.6.1)$$

Если концентрация в данной области постоянна, то первые два слагаемых в правой части равны нулю, и это уравнение определяет скорость изменения  $\sigma$  относительно данного насекомого. Эта скорость положительна, если  $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ . Если горизонтальная составляющая скорости насекомых относительно воздуха мала или направлена случайным образом, то единственной составляющей скорости, которая может эффективно повысить концентрацию насекомых, является вертикальная скорость  $v_z$ , и, следовательно, если производная  $\partial v_z / \partial z$  отрицательна, то высокая концентрация сохраняется даже тогда, когда ветер дует из областей с малой концентрацией насекомых. Практически это означает, что если направленная вниз составляющая скорости насекомых относительно воздуха по мере увеличения высоты растёт, то в области конвергенции создаются благоприятные условия для повышения их концентрации.

Таким образом, маломасштабные образования, такие, как атмосферные фронты, могут создавать и поддерживать очень высокие концентрации саранчи. Кошеме (1965, см. также Рэйши, 1963) выполнил некоторые простые вычисления и показал, что и при крупномасштабных движениях концентрация частиц, увлекаемых только горизонтальными потоками воздуха, за несколько дней может возрасти в тысячу раз. Более того, он показал, что в некоторых случаях воздух просторов Южной Аравии и Восточной Африки, где наблюдалась стадная саранча, может сконцентрироваться над районами Белуджистана, и здесь через 2—3 недели появляются огромные стаи саранчи. Происходящая при этом конвергенция сопровождается дождями, которые обеспечивают продолжение се рода.

Точно так же и дальние «миграции» пустынной саранчи, при которых она преодолевает большие расстояния, служат той же цели — перемещению стай в зоны конвергенции, где над пустыней проливаются дожди. Такие дожди очень нерегулярны и не могут обеспечивать существование человеческих поселений, за исключением оазисов и других мест, где вода скапливается под землей; однако пустынная саранча в процессе эволюции выработала такие приемы полета, которые позволяют ей использовать «случайные» и редкие дожди.

Многие другие виды, такие, как стайные ткачики (*Quelea quelea*), розовый скворец, гусеницы многих ночных бабочек (например, «ратные черви») и кузнечики, вероятно, выработали

подобный же механизм выживания. Поистине, изучение образа жизни саранчи открыло совершенно новые перспективы контроля численности насекомых-вредителей. Это направление нашло себе четкое выражение в работах Рэйни (1951, 1963, 1969, 1973).

## 12.7. Контроль численности насекомых-вредителей путем воздействия на их стаи

Обычно считают, что лучшим способом защиты посевов от вредителей является опрыскивание пестицидами. Однако эта мера может оказаться запоздалой, и так как известно, что насекомые переносятся на большие расстояния воздушными течениями, то опрыскивание посевов, конечно, слабо влияет на резервы численности вредителей в других местах. Джойс и др. (1970) заметили, что когда фермеры на большей части территории Явы проводят опрыскивание одновременно с интервалом 2—3 недели, то эффект гораздо больше, чем при несинхронном опрыскивании (что намного дешевле с точки зрения использования отрядов воздушного и наземного опрыскивания). Причина этого состоит в том, что при снижении численности вредителей на большой площади требуется больше времени для восстановления, особенно когда речь идет об острове и, следовательно, лишь об эпизодическом пополнении популяции вредителей за счет притока извне. Однако, с другой стороны, небольшая площадь может быть быстро заселена вредителями, прибывшими извне.

При опрыскивании посевов в организм вредителей попадает одна из  $10^{8\pm 2}$  частей расходуемого пестицида. Это очень расточительно и означает, что почти весь пестицид идет на опасное загрязнение окружающей среды. Эффективность обычно измеряют частью поверхности посевов, покрытой инсектицидом, или частью общего количества инсектицида, которая попадает либо на сами растения, либо на всю площадь данного поля, а не уносится за его границы. Определенная таким способом эффективность изменяется в пределах от 0,1 до 0,6, но дает весьма неправильное представление об истинной эффективности. Одним из наиболее успешных случаев применения инсектицида был случай, когда около половины количества инсектицида, распыленного над летящей стаей пустынной саранчи, было ею захвачено. Другая половина выпала на землю на очень большой площади и имела очень низкую концентрацию. Так как многие особи при этом получили дозу, существенно превышающую минимальную смертельную, то часть инсектицида, которая действительно пошла на уничтожение насекомых в этом случае (стая

была полностью уничтожена), составила около  $\frac{1}{5}$  израсходованного количества. Таким образом, указанный случай является примером наиболее эффективного применения инсектицидов против летающих насекомых.

В связи с этим полезно было бы выяснить, многим ли видам насекомых свойствен механизм образования стай. Ясно, что он не играет большой роли в жизни тлей, однако важен для всех видов, проходящих стадии оплодотворения, кладки яиц и выведения личинок. Используя самолет, оборудованный системой доплеровской радарной навигации и ловушками для насекомых, Джойс (1973), работавший в Судане, установил, что концентрация насекомых резко возрастает в небольших по площади районах горизонтальной конвергенции. Весьма вероятно, что заражение сейскохозяйственных культур вредителем происходит в основном тогда, когда образовавшаяся в зоне конвергенции стая пролетает над посевами. Есть много народных преданий о появлении плотных стай различных бабочек, саранчи и других насекомых, например божьих коровок. Известна история о том, как стая появилась из яиц, отложенных в той же местности 7 лет назад, и что отрождению насекомых способствовала разыгравшаяся в это время буря. Однако более вероятно, что как сама буря, так и концентрация насекомых были результатом горизонтальной конвергенции воздушных течений.

У стадной формы саранчи нет естественных врагов, кроме голода, холода и болезней. Хищные птицы, например ансты, не могут существенно сократить ее численность. Ни для одного наземного животного саранча не служит основной пищей, так как ее передвижения непредсказуемы и неопределимы. Хотя при повышенной влажности саранча подвержена некоторым вирусным заболеваниям и по этой причине не живет в тропических зонах с хорошо развитой растительностью, непредсказуемость ее появления служит ей защитой от хищников и имеет огромное значение для выживания вида. Все, что от нее требуется,— это лететь на постоянной высоте или в слое с постоянной температурой и ждать, когда другие ее сородичи соберутся в месте кормежки.

Тот факт, что пустынная саранча существует в двух фазах, послужил основанием для представления о них, как о двух разных видах, и некоторое время мешало заметить связь между одиночной саранчой и образованием стайных популяций. Продолжение рода многих насекомых почти полностью зависит от возможности собраться в стаю. Вид, распространяющийся указанным способом, оказывается хорошо защищенным и от человека, и от хищников. Стаи насекомых наблюдать трудно; кроме того, многие из них, например почные бабочки, роятся только по ночам или в сумерки, и, чтобы обнаружить их, нужен радар. Для

птиц, питающихся летающими насекомыми (например, стрижей и ласточек), концентрация насекомых в холодных фронтах, включая морские бризы и другие микрофронты, создаст большие преимущества.

Дж. У. Шафер (1976) показал, как по частотам дыхания и взмахов крыльев можно определять вид насекомых с помощью радара и использовать этот метод для отыскания стай определенных видов. По-видимому, многие стаи занимают в атмосфере тонкие слои, причем такие вытянутые в горизонтальном направлении области высокой концентрации насекомых могут образовываться в результате действия сдвиговых напряжений на более компактные объемы воздуха, содержащие насекомых. Если такие слои подстилаются слоями более холодного воздуха, то насекомые будут стремиться лететь вверх, как только почувствуют, что опускаются в направлении падения температуры. При этом сохраняется их высокая концентрация на нижней границе теплого слоя. Знание этого механизма уже было успешно использовано для борьбы с еловым почкоедом.

На ранних стадиях исследования миграции птиц ученые исходили из предположения об их чудесных способностях к навигации. С другой стороны, считалось, что насекомых разносят воздушные течения, и это, при их высокой скорости размножения, является преимуществом. Такие простые гипотезы ставили вопрос о том, как самцам и самкам ночных бабочек удастся найти друг друга и каким образом птицы осуществляют навигацию. В результате и тем и другим приписывали чудесные способности. На самом деле мы видим, что разум здесь вовсе ни при чем. Особо высокая точность навигации у птиц не была бы преимуществом, так как мешала бы им использовать возможность заселения новых территорий, появляющихся за счет медленных (в течение десятилетий) изменений климатических условий. В удачный год птицы-родители не хотели бы, чтобы все их более многочисленное потомство мигрировало вместе с ними; скорее они дадут им понять, что следует «потеряться». Благодаря цитированной выше работе Вильямсона мы знаем, что птицы тоже в сильной степени подвержены влиянию воздушных течений — пересекая океан, они летят по ветру, если небо затянуто облаками и они не могут ориентироваться по звездам. Такая тактика позволяет в кратчайшее время достигнуть суши, однако в то же время она влечет за собой отклонение от обычной цели на сотни и тысячи километров. Связанный с этим почти случайный выбор направления полета необходим для сохранения вида в условиях непрерывно меняющихся климатических условий и конкуренции с другими видами, численность которых также непрерывно меняется.

В настоящее время наши знания о перемещениях линий конвергенции малой интенсивности, подобных обнаруженным Джойсом, недостаточны, так как еще нет метеорологических систем наблюдения, которые позволяли бы их обнаруживать. Наибольшие надежды связаны, конечно, с применением радара, который позволяет «видеть» насекомых, и весьма вероятно, что мы сможем глубже понять структуру микрофронтов, именно изучая поведение насекомых (Скорер, 1974). Возможно, это создаст и экономический стимул для более детальных исследований. Пока же лучшим гидом является знание механики фронтов морских бризов.

# Заключение

## ЖИВИТЕ С ПРИРОДОЙ В МИРЕ

Миновали те времена, когда человек считал, что ему, как царю природы, предопределено господствовать над Землей. В результате научно-технической революции, кажется, пришла пора долгожданного триумфа, и вот тут-то становится ясно, что человеку необходимо возделывать и беречь свою планету, как сад, хотя бы для собственного спасения, если не говорить о большем.

Но сад, как и город или квартира, могут нормально существовать только потому, что существует вмещающая их «среда обитания», из которой черпаются ресурсы и куда выбрасываются отходы. Для нашего же мира в целом «средой обитания» является он сам. Пока мы рассматриваем возможности человечества умозрительно, нам кажется, что промышленное развитие не сдерживает ничем. Однако в последнее время успехи часто не восполняют потерь, так как природа либо деградирует из-за нашей разрушительной деятельности, либо как-то приспособляется, эволюционируя «социально» так же быстро, как и человек, а биологически много быстрее. Между тем механизация, искусственные политические границы и перенаселенность навсегда разрушили некоторые ветви эволюции. Возможно, кочевники и некоторые малые народности, которые мы называем примитивными, обладали здравым смыслом, нам неизвестным, и, вероятно, ряд видов, вымерших в результате господства человека, играл неоценимую роль в биосфере Земли.

Мы сможем легче осознать свою роль в мире, вспомнив, что в нем все взаимосвязано. Например, попытки очистить ядохимикатами сельскохозяйственные угодья от вредителей могут привести к нежелательным или даже катастрофическим последствиям только из-за того, что значительная часть используемых ядохимикатов может попасть не по назначению. В полупустынных районах существует много биологических видов, для которых численность особей возрастает со скоростью взрыва после редких ливней, и ирригация может стать прямой причиной такого роста. Численность особей таких видов обычно ограничивается дефицитом пищи в пустыне, так что уничтожение человеком того или иного вида лишает пищи другой вид, который вследствие этого должен вымереть.



Мы попытались весьма упрощенно описать то, как подобные процессы регулируются в естественных условиях. Когда же люди вмешиваются в основной механизм регуляции, появляются эффекты меньшего масштаба, которые начинают играть главенствующую роль; это ошибочно называют побочными эффектами. Для того чтобы избежать опрометчивых решений, надо больше осторожности и терпения. Даже употребление некоторых слов может привести нас к ошибочным заключениям. Например, когда мы говорим о сельскохозяйственных вредителях, то воображаем, что вред, который наносится вредителям, обязательно имеет положительный эффект. Однако часто пестициды оказываются смертельными не для вредителей, которые приспособились к ним, а для их врагов, которые до использования пестицидов контролировали численность вредителей и с которыми нам следовало бы жить в мире.

Эпоха, из которой мы в настоящее время выходим, была эпохой чрезвычайно быстрого роста знаний и пренебрежения теми факторами, которым мы в настоящее время снова начали придавать большое значение. Нам нужен синтез знаний, а вместо этого мы имеем избыток информации, с которым не знаем, что делать. Синтез в данном случае означает выделение и усвоение наиболее существенного и важного из потока научной информации, которая быстро устаревает. Данная книга представляет попытку внести вклад в прояснение и упорядочение быстро растущих знаний о нашей атмосфере.

## ВОПРОСЫ И (ВОЗМОЖНО СПОРНЫЕ) ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

1. Если открыть под водой сосуд, наполненный воздухом, то образуется воздушный пузырь со сферической верхушкой. Чем будет отличаться от него по форме объем воды, вылитой в воздухе? Что можно сказать в этом отношении о ртути, вылитой в воду?

2. Может ли планер, имеющий среднюю собственную скорость снижения 1 м/с, сохранять высоту, паря в потоке при реальных градиентах ветра?

3. По теореме Бернулли скорость ветра больше там, где давление меньше. Поэтому скорость ветра возрастает с высотой.

4. В соответствии с теоремой Бернулли при возрастании скорости ветра с высотой у верхушки трубы возникает подсос.

5. Для баллона, наполненного водородом, вероятность столкнуться со зданием под действием ветра меньше, чем у мыльного пузыря.

6. В точке пересечения двух взаимно перпендикулярных линий тока сумма их скоростей поворота в плоскости, определяемой этими линиями, будет такой же, как и для любой другой пары взаимно перпендикулярных линий тока в этой плоскости.

7. Почему у подножия высоких зданий очень ветрено, и могут ли архитекторы с этим что-либо подделать?

8. Как можно, отклонившись от положения равновесия назад, не упасть на спину, если при этом не двигать ногами, а вращать только руками?

9. Что кошка будет делать, чтобы приземлиться на лапы из любого положения в отсутствие сопротивления воздуха? Встаньте на вращающуюся площадку и попытайтесь повернуться вокруг себя.

10. Если на небольшом отрезке течения вокруг двух параллельных линейных вихрей внезапно возрастет вязкость, так что эти вихри взаимно гасятся, что будет происходить на «свободных концах» этих вихрей по обоим сторонам рассматриваемого участка? Что можно сказать относительно «петель» в конденсационных следах?

11. Если наносы образуются там, где река течет медленно всего, то почему они не образуются на внешних участ-

ках излучин, где давление больше, а, следовательно, скорость меньше?

12. Можно ли образование снежных и песчаных заносов, скопление опавших листьев и другие подобные процессы объяснить на основании того, что процесс оседания происходит там, где скорость течения минимальна; может ли при высокой скорости течения происходить самоочищение жидкости от примесей?

13. Первоначально таз с водой находился в покое. Затем его привели во вращение. Можно видеть, что жидкость на поверхности смещается по направлению к оси вращения, а сама поверхность принимает форму воронки. В чем здесь дело?

Когда вся жидкость вовлечена во вращение, таз прекращают вращать. Воронка, образованная поверхностью воды, заполняется, но видно, что жидкость движется от центра!

14. Таз с водой вращается. В отсутствие сопротивления воздуха шарик для пинг-понга, плавающий на поверхности воды, будет перемещаться к середине сосуда; но если его утяжелить так, чтобы он полностью погрузился в воду, он будет двигаться от центра. В последнем случае можно ли сделать так, чтобы шарик не смещался наружу, а, может быть, даже двигался к центру?

15. Полезно ли для дерева захватывать дождевые капли листьями? Какого вида листья лучше всего захватывают дождевые капли?

16. Почему в точке торможения у передней кромки препятствия частицы усиленно кристаллизуются, а испарение воды наименее активно? Какого вида оледенение иллюстрирует это явление?

17. Когда флаг полощется по ветру, то натяжение веревки, на которой он привязан, увеличивается. Каким образом живые существа могут перемещаться вперед при распространении волны назад? Легче ли камбале плавать вблизи дна?

18. Можно ли опустить тяжелые ширики (например, от подшипников) в патуку так, чтобы они столкнулись? Можно ли сделать так, чтобы они столкнулись с поднимающимися пузырьками воздуха или чтобы сами пузырьки столкнулись между собой?

19. Почему кажется, что за автомобилем образуются два концевых вихря (это можно наблюдать по выхлопным газам), как у самолета? Значит ли это, что у автомобиля существует подъемная сила, а если существует, то желательна ли это?

20. Жесткий круглый диск с отверстием посередине прислонили вблизи плоской стены. Через отверстие по направлению к стене продувается воздух. Какого рода силы действуют при этом на стену? Какова сила, создаваемая струей воздуха,

направленной от насадка (без диска) к стене? Проведите опыт в домашних условиях. Лист бумаги поднимается со стола, если на него дуть сверху.

21. Почему из одних отверстий выходят турбулентные клубы, а из других — кольцевые вихри с ламинарными течениями?

22. Две банки из-под варенья, плотно закрытые крышками, находятся на гладком столе; одна из них заполнена водой до отказа, в другой оставлен небольшой объем воздуха. Эти банки в течение примерно 1 с быстро вращают по кругу таким образом, чтобы их основания скользили по столу. В одном из сосудов вода начинает вращаться, в другом — нет. Благодаря наличию частиц варенья движение воды можно наблюдать. Во вращающейся жидкости движение совпадает по направлению с заданным, а вращение шарика, находящегося в центре банки, будет иметь противоположное направление. Как завихренность передается воде в первом случае и как столь небольшой объем воздуха может изменить всю картину движения?

23. Отрыв потока происходит там, где пограничный слой утолщается. Почему тогда точка отрыва перемещается вперед, если пограничный слой становится тоньше за счет возрастания скорости?

24. Если турбулентность в атмосфере носит диффузионный характер, как может случиться, что вода, испарившаяся над океаном с большой площади, может сконцентрироваться на малой площади и вызвать ливень над сушей? Не противоречит ли это второму началу термодинамики?

25. При турбулентном движении вихри по определению ориентированы случайно. Поэтому число сжимающихся вихрей равно числу растягивающихся, а число теряющих кинетическую энергию — числу приобретающих ее. Вследствие этого суммарный перенос кинетической энергии от осредненного движения отсутствует; работа против вихревых напряжений не производится, т. е. такие напряжения как бы отсутствуют. Равным образом отсутствует суммарный перенос энергии между вихрями различных масштабов. Какие еще свойства турбулентности можно вывести из такого определения?

26. Если определить любое невращательное движение как турбулентное, то можно ли как-нибудь использовать это определение?

27. Покажите, что если в жидкости градиенты скорости и температуры определяются вязкостью и теплопроводностью (как, например, в опыте с нагретым куполом Готорна), то при использовании только числа Ричардсона нельзя дать критерия возникновения турбулентности.

28. Перенос энергии от больших вихрей к малым вызывается диссипацией энергии малых вихрей вследствие вязкости.

29. Перенос энергии в направлении меньших размеров вихрей объясняется наличием вихревых напряжений, вызванных тем, что в упорядоченном движении крупных вихрей присутствуют мелкие.

30. Каким образом турбулентность в устойчиво стратифицированных слоях делает стратификацию еще более устойчивой?

31. При каких условиях термическая конвекция или турбулентность, порожденная механическими причинами, может повысить статическую устойчивость в верхней части слоя смешения?

32. Число Ричардсона бесполезно в качестве критерия возникновения турбулентности, так как легче определить наличие турбулентности, чем измерить это число.

33. Число Ричардсона является локальной характеристикой течения и поэтому не может служить критерием возникновения турбулентности глобального масштаба.

34. Почему деревья, наклонившиеся под действием преобладающих ветров, принимают форму крылового профиля?

35. Должно ли тело, захватываемое при горизонтальном ветре частицы, находящиеся в воздухе, иметь большое профильное или вязкостное сопротивление? Связано ли большое лобовое сопротивление крупных падающих тел с лучшей способностью к захвату мелких частиц?

36. Почему анабатический ветер оказывается сильнее, а слой, в котором он дует — тоньше, если слой над подстилающей поверхностью устойчиво стратифицирован?

37. Каким образом устойчиво стратифицированный слой, оставаясь устойчивым, нагревается восходящими потоками, вызванными переносом тепла а) в случае наличия облаков и б) в случае их отсутствия?

38. Как подоблачный устойчивый слой связан с потоком а) солнечного излучения; б) лунного излучения?

39. Если свободная струя от неподвижного теплового источника имеет форму конуса с полууглом при вершине  $5^\circ$ , то она должна находиться в восходящем потоке.

40. Может ли устройство, установленное на земле и находящееся в нижних 100 м торнадо, отбирать энергию, освобождающуюся за счет сил плавучести на высоте 1000 м?

41. Покажите, что усредненные линии тока для вертикальной напорной струи описываются соотношением  $r \sim z^{1/2}$ . Как будет описываться соответствующая кривая для двумерной напорной струи, для факела?

42. Сравните эффективность следующих устройств для обогрева помещения:

а) нагреватель с вентилятором, который разгоняет теплый воздух на уровне пола;

б) конвекционный нагреватель с высокотемпературным источником тепла небольшой емкости;

в) конвекционный нагреватель с низкотемпературным источником тепла большой емкости;

г) нагревательно-вентиляционная система, которая засасывает воздух с уровня пола, нагревает его и выпускает вблизи потолка;

д) нагревательно-вентиляционная система, которая засасывает воздух вблизи потолка, нагревает его и выпускает на уровне пола;

е) нагреваемый пол;

ж) нагреваемый потолок;

з) источник тепла с излучающими рефлекторами.

Какая из этих систем порождает нисходящие потоки, создает ситуацию, когда ногам холодно, а голове жарко? Какая из систем более экономична и эффективна для конкретных целей? Какая является наиболее универсальной?

43. Сколько безразмерных критериев можно получить из следующих параметров, характеризующих звуковые гравитационные волны в атмосфере;  $g\beta$  в стратосфере,  $g\beta$  в тропосфере,  $c$  (скорость звука) у подстилающей поверхности,  $h$  — высота тропопаузы,  $\sigma$  — частота источника?

44. Почему волнистые облака чаще встречаются в Гренландии и на Огненной Земле, чем в Венесуэле?

45. Почему ветер дует чаще вдоль склона холма вверх, нежели вниз?

46. При каких обстоятельствах следует ожидать, что волны, регистрируемые радиозондом, с его подъемом будут убывать по частоте?

47. Почему дождь выпадает вертикальными или наклонными полосами, а не горизонтальными слоями, которые должны были бы образовываться вследствие того, что в серии капель, падающих одна за другой, последующие захватывают предыдущие, настигая их в их же турбулентном следе?

48. Воздух над пустыней имеет влажность 10 %, а над оазисом 50 %. Покажите, что, пока воздух над оазисом не охладится на  $1,5^\circ\text{C}$ , он будет подниматься.

49. Покажите, что насыщенные термики могут преодолевать подоблачный устойчивый слой, где окружающий воздух имеет влажность 50 % и температуру  $7^\circ\text{C}$ , если они на  $0,3^\circ\text{C}$  холоднее, даже в отсутствие момента, направленного вверх.

50. Почему на высоте, где образуются облака с гладкими вершинами, подветренные волны имеют большую амплитуду?

51. Для струйки загрязняющих веществ, не обладающих плавучестью и выброшенных с нулевой скоростью в поле постоянного однородного ветра, радиус  $r$  связан с расстоянием от ис-

точника  $x$  зависимостью  $r \sim x^{1/3}$ , за исключением точек вблизи источника.

52. «Ложки вам не понадобятся, всё уже размешалось!»

53. Нарисуйте правильно лестницу, как она видна с высоты  $\sim 3$  м над полом.

54. При каких условиях гребень высокого давления на всех высотах будет смещаться против ветра? Почему, принимая во внимание ваш ответ, часто утверждают, что барические системы движутся по направлению ветра в верхних слоях?

55. Почему с наибольшей вероятностью депрессии имеют форму медленно движущихся участков холодного фронта или быстро движущихся участков теплого фронта?

56. Циклоногенез наиболее вероятен слева от выхода из струйного течения и справа от входа в него.

57. При каких условиях должна существовать дивергенция у поверхности в центре низкого давления?

58. Почему наклоненная инверсия приводит к разрыву в скорости ветра? При каких условиях меняется составляющая скорости  $a$ ) вдоль границы инверсии,  $b$ ) перпендикулярно ей?

59. В каком случае при искривленных изобарах ветер может быть равным геострофическому?

60. Горизонтальный ветер возрастает с высотой. Ветровое течение вращается вместе с Землей и поэтому обладает вертикальными вихревыми линиями. Эти линии сдвинуты таким образом, что образуется горизонтальная вторичная компонента, которая смещает течение в верхнем слое вправо, а в нижнем — влево. Как при таких условиях может существовать однонаправленное течение со сдвигом?

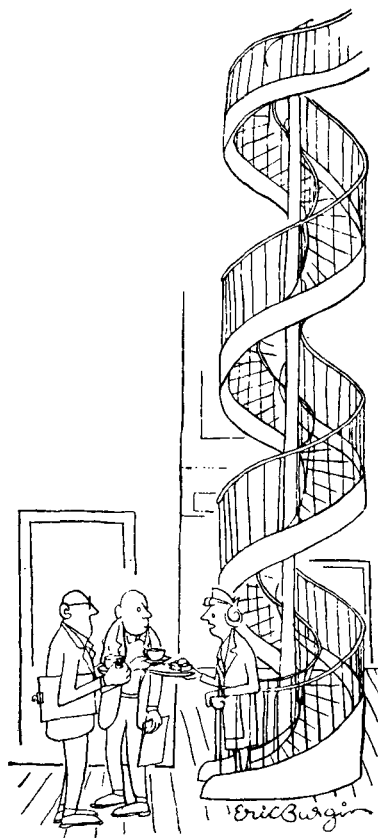


Рис. 52. Публикуется с разрешения журнала «Панч».

61. В гидродинамических устройствах, связанных с осевым течением, таких, как турбина, на оси может иметь место значительное сопротивление. Если поток закручен, то пузырь отрывается будет находиться в нижней по течению части препятствия с бóльшей вероятностью, чем в отсутствие круговой составляющей скорости течения.

62. Если восходящий поток в ливне из кучево-дождевого облака рассматривать как препятствие течению на более высоком

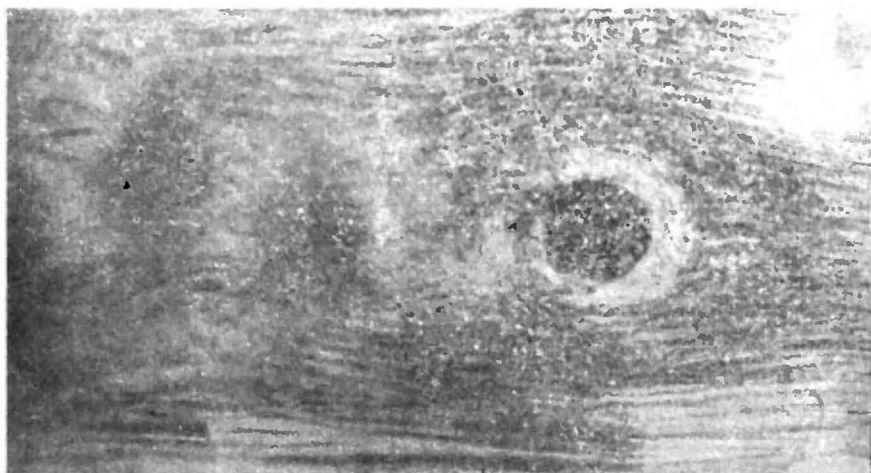


Рис. 67.

уровне, то вихревые линии растягиваются около него и будут приводить к дополнительному снижению холодного нисходящего потока. Подобным же образом холодный выступ будет собирать вихревые линии, которые стимулируют восходящий поток. Этот эффект значителен.

63. Почему воздушное течение не рассеивает стаи насекомых, хотя может разделить большую стаю?

64. Почему ветер скорее собирает (сбивает) переносимые им сыпучие вещества, такие, как песок, снег, в кучи, чем равномерно рассеивает их, как дым? Как малы должны быть частицы для того, чтобы рассеиваться? Состоят ли более крупные барханы из соответственно более крупных частиц?

65. Почему прерывание вихрей пропеллером приводит к возникновению шума? Что может быть источником вихрей в окружающем воздухе?





Рис. 68.

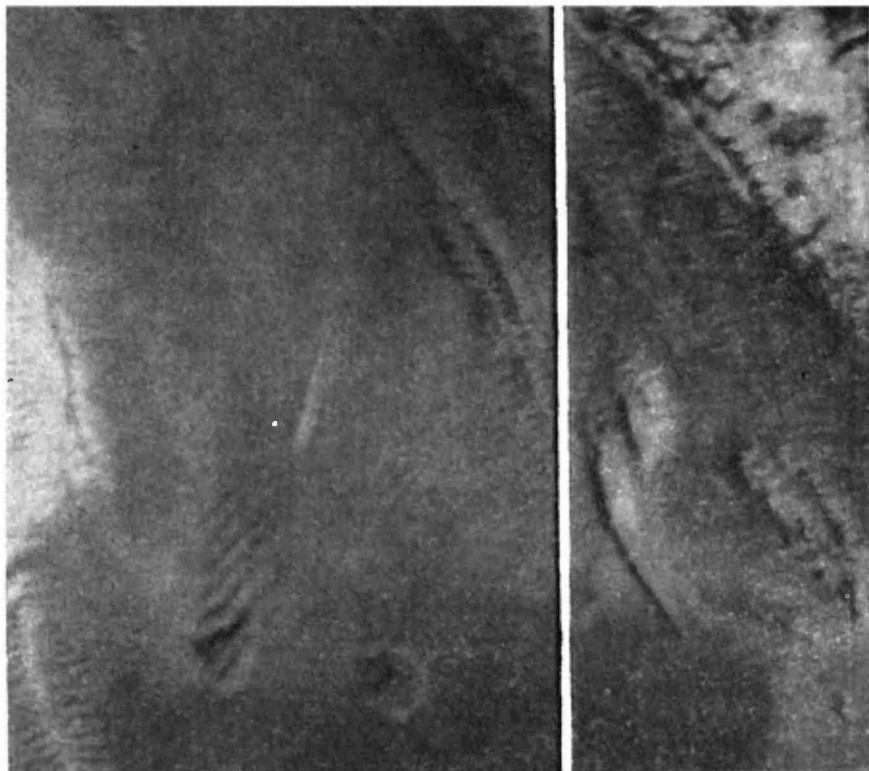


Рис. 69.

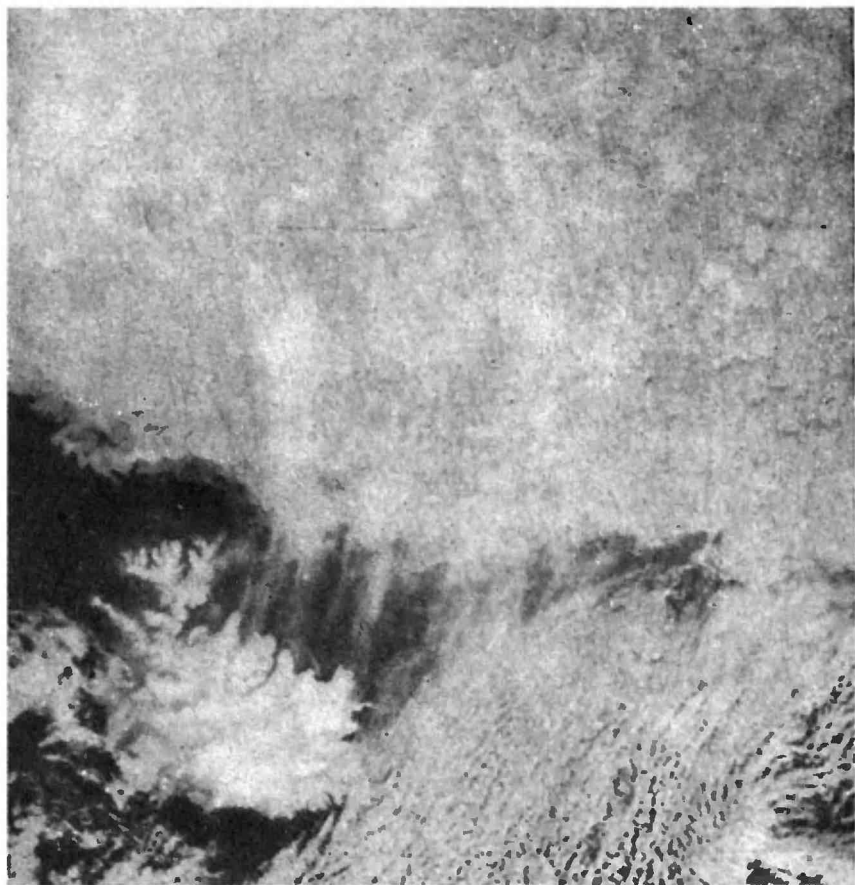


Рис. 70.



Рис. 71.

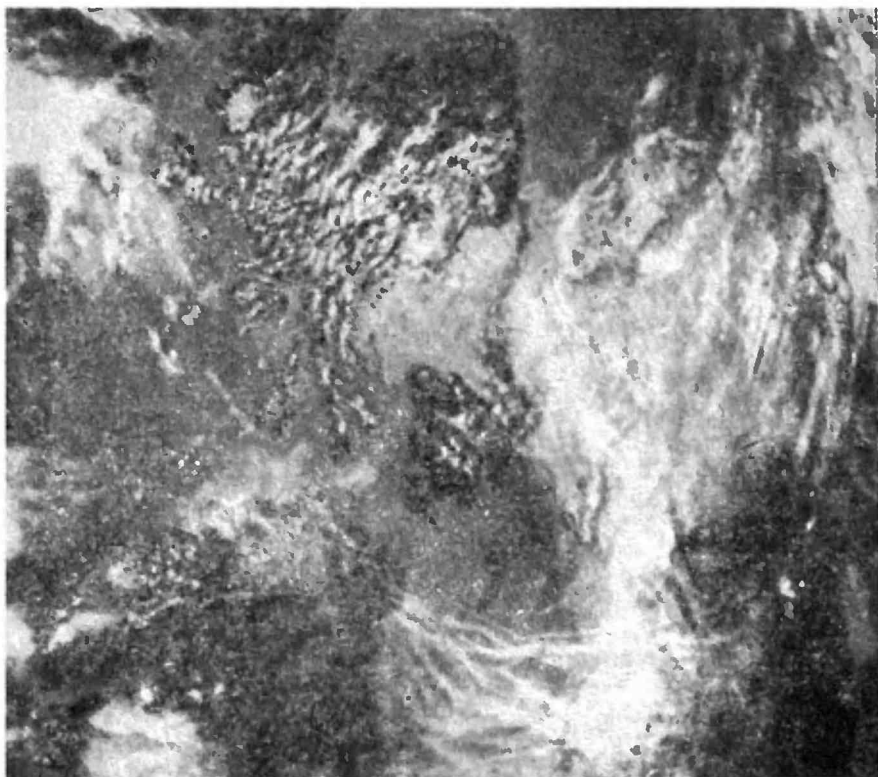


Рис. 72.

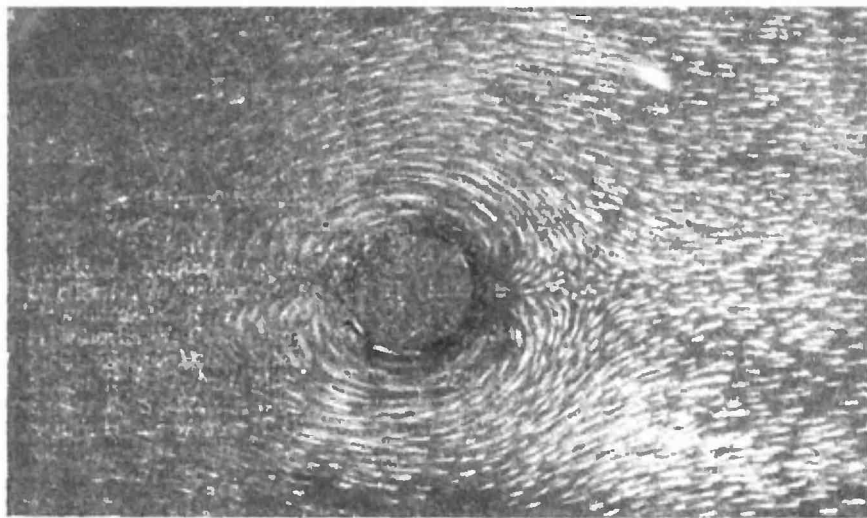


Рис. 73.

66. Почему шум от пропеллера больше, когда самолет не движется относительно земли (например, на испытательном стенде или на старте перед взлетом), но убывает, когда самолет поднимается над землей на высоту более 50 м?

67. На снимке показано обтекание водой цилиндра в канале глубиной 4 см. Трассером служит  $KMnO_4$ . Опишите характер течения на разных глубинах.

68. Определите на снимке песчаную пустыню, низкие облака, высокие облака и вихри. Найдите Агадир, Канарские острова (спутниковый снимок, 5 марта 1977 г.).

69. Часть площади, показанной на рис. 68 (большое увеличение). Через несколько дней в Западной Шотландии выпал красный дождь. Отметьте тени низких облаков; объясните волновую картину, подобную структуре движения волн за кораблем.

70. Ветер со стороны океанического льда (спутниковый снимок в инфракрасном диапазоне, 26 марта 1977 г.). Определите на снимке зону тумана, облачные улицы, искривленную вихревую дорожку (Ян-Майсн), орографические циррусы, линию снега и береговую линию Исландии, побережье Гренландии.

71. Определите местоположение суши по формам облаков (спутниковый снимок в инфракрасном диапазоне, 9 сентября 1976 г.). Каково направление ветра?

72. Видны естественные и искусственные облака: перистые, высокие кучевые, волны за препятствием, инверсионные следы, дымка над промышленными районами (Шотландская низменность, Ноттингем). Что еще? (Спутниковый снимок в инфракрасном диапазоне, 09.40 по Гринвичу, 13 августа 1976 г.)

73. Снимок канала, изображенного на рис. 67. Поясните детали.

# Литература

## Гл. 2

- Lamb, Sir Horace, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932. [Имеется перевод: Ламб Г., Гидродинамика.— М.: ОГИЗ, 1947.]  
Dean W. R., *Phil Mag.*, 4, 208 (1927).  
Eustice J., *Engineering*, Nov. 13 (1925).  
Görtler H., *Ingenieur Archiv.*, 28, 71 (1959).  
Hawthorne W. R., *Proc. Roy. Soc. A*, 206, 374 (1951).  
Hawthorne W. R., Martin M. E., *Proc. Roy. Soc. A*, 232, 184 (1955).  
McConologue D. J., Srivastava R. S., *Proc. Roy. Soc. A*, 307, 37 (1968).  
Scorer R. S., *J. Inst. Maths. Applic.*, 3, 250 (1967).  
Scorer R. S., Wilson S. D. R., *Quart. J. R. Met. Soc.*, 89, 532 (1963).  
Squire H. B., Winter K. G., *J. Aero Sci.*, 18, 271 (1951).

## Гл. 4

- Brunt D., *Physical and Dynamical Meteorology*, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press, 1939.  
Scorer R. S., *Clouds of the World*, David and Charles, Newton Abbot, Lothian Pub. Co. Melbourne, Stackpole, Harrisburg, 1972.  
Tannehill I. R., *Hurricanes, their nature and history*, 9th Ed., Princeton Univ. Press, 1956.

## Гл. 5

- Astapowitsch I. S., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 60, 493 (1934).  
Banks W. H. H., Drazin P. G., Zatorska M. B., *J. Fluid Mech.*, 75, 149 (1976).  
Berkshire F. H., *Pageoph.*, 113, 561 (1975).  
Berkshire F. H., Warren F. W. G., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 96, 50 (1970).  
Booker J. R., Bretherton F. P., *J. Fluid Mech.*, 27, 513 (1967).  
Drazin P. G., Howard L. N., *Adv. Appl. Mech.*, 9, 1—89 (1966).  
Förchtgott J., *Letectvi*, 25, 350 (1949).  
Förchtgott J., *Met. Zpravy*, No. 3—4, 72 (1950).  
Gerbier N., Berenger M., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 87, 13 (1961).  
Lamb, Sir Horace, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932. [Имеется перевод: Ламб Г., Гидродинамика.— М.: ОГИЗ, 1947.]  
Lee G. H., Newmark O. W., *Met. Mag.*, 81, 307 (1952).  
Long R. R., *Tellus*, 5, 42 (1953); *Ibid.*, 7, 341 (1955).  
Manley G., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 71, 197 (1945).  
Queney P., *Misc. Rep. Dept. Met. Univ. Chicago*, No. 23 (1947); *Bull. Amer. Met. Soc.*, 29, 16 (1948); *Tellus*, 3, 367 (1955).  
Roper R. D., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 78, 415 (1952).  
Sawyer J. S., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 86, 326 (1960).



- Scorer R. S., *Ibid*, 75, 41 (1949); *Quart. J. Math. Appl. Mech.*, 3, 107 (1950a); *Proc. Roy. Soc. A*, 201, 138 (1950b); *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 77, 76 (1951a); *Gliding*, 2, 119 (1951b); *Sci. Prog.*, No. 159, 466 (1952a); *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 78, 76 (1952b); *Gliding*, 4, 61 (1953a); *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 79, 70 (1953b); *Ibid*, 81, 340 (1955); *Ibid*, 82, 75 (1956).
- Scorer R. S., Klieforth H., *Ibid*, 85, 131 (1959).
- Scorer R. S., Wilkinson M., *Ibid*, 82, 419 (1956).
- Wallington C. E., *Ibid*, 84, 428 (1958).
- Warren F. W. G., *J. Fluid Mech.*, 10, 584 (1961).
- Whipple F. J. W., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 56, 287 (1930); *Ibid*, 61, 285 (1935).
- Yamamoto R., *J. Met. Soc. Japan*, Ser. II, 35, 32 (1957).
- Yih C.-S., *J. Fluid Mech.*, 9, 161 (1960); *Ibid*, 29, 539 (1967). The Airflow over Mountains (World Meteorological Organisation).
- Queney P. (Chairman), Corby G. A., Gerbier N., Koschmieder H., Zierep J., 1960, Tech. Note, No. 34, WMO, No. 98, TP 43.
- Nichols J. M., 1973, Tech. Note, No. 127, WMO, No. 355.
- Scorer R. S., *Clouds of the World*, Chapter 5, 1972.
- Yih C.-S., *Mechanics of Non-homogeneous Fluids*, Chapters 1—3 (1969).

## Гл. 6

- Drazin P. G., *J. Fluid Mech.*, 4, 214 (1957); *Ibid*, 10, 571 (1961); *Ibid*, 42, 321 (1970); *Ibid*, 65, 781 (1974).
- Drazin P. G., Howard L. N., *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. (J. Eng. Mech. Div.)*, 87, 101 (1961).
- Hicks J. J., Angell J. K., *J. Appl. Met.*, 7, 114 (1968).
- Howard L. N., *J. Fluid Mech.*, 10, 509 (1961).
- Lamb, Sir Horace, 1932, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press.
- Miles J. W., *J. Fluid Mech.*, 4, 538 (1958); *Ibid*, 6, 583 (1959).
- Scorer R. S., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 77, 235 (1951); Paper 7 in RAE Sympos.—Atmos. Turb. in relation to Aircraft Op. (HMSO), 1961; *Radio Science*, 4 1299 (1969); *Arch. Met. Geoph. Biokl. Ser. A*, 20, 1 (1971); *Clouds of the World*, Chapter 6, 1972.
- Thorpe S. A., *J. Fluid Mech.*, 32, 693 (1968).
- Warren F. W. G., *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 21, 433 (1968); *J. Fluid Mech.*, 68, 413 (1974).
- Woods J. D., *J. Fluid Mech.*, 32, 791 (1968).
- Woods J. D., Wiley R. L., *Deep Sea Res.*, 19, 87 (1972); см. также Ludlam F. H., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 93, 419 (1967); Browning K. A., *Ibid.*, 97, 283 (1971).

## Гл. 7

- Batchelor G. K., *Theory of Homogenous Turbulence*, Cambridge Univ. Press, 1956. [Имеется перевод более раннего издания: Бэтчелор Дж. К., Теория однородной турбулентности.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.]
- Brunl D., *Physical and Dynamical Meteorology*, Cambridge Univ. Press, 1939.
- Hinze J. O., *Turbulence*. McGraw-Hill, 1959. [Имеется перевод: Хинце И., Турбулентность. Ее механизм и теория.— М.: Физматгиз, 1963.]
- Howard L. N., *J. Fluid Mech.*, 10, 509 (1961).
- Lamb, Sir Horace, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1895, 1932. [Имеется перевод: Ламб Г., Гидродинамика.— М.: ОГИЗ, 1947.]
- McEwan A. D., *Nature*, 260, 126 (1976).
- Saffman P. G., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 88, 382 (1962).
- Sutton O. G., *The Challenge of the Atmosphere*, Hutchinson, 1962.

## Гл. 8

- Davies R. M., Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc. A*, **200**, 375 (1950).  
 Goodhart H. C. N., *Swiss. Aero. Revue, OSTIV Section*, **6**, 324 (1958).  
 Malkus J. S., Scorer R. S., *J. Met.*, **12**, 43 (1955).  
 Richards J. M., *J. Fluid Mech.*, **11**, 369 (1961); *Int. J. Air & Wat. Poll.*, **7**, 17 (1963a); *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **89**, 254 (1963b); *J. Fluid Mech.*, **21**, 97 (1965); *Ibid.*, **32**, 681 (1968); *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **96**, 702 (1970).  
 Ricou F. P., Spalding D. B., *J. Fluid Mech.*, **11**, 21 (1961).  
 Rouse H., Yih C.-S., Humphreys H. W., *Tellus*, **4**, 201 (1952).  
 Schmidt W., *Z. A. M. M.*, **21**, 265 (1941).  
 Scorer R. S., *J. Fluid Mech.*, **2**, 583 (1957).  
 Spackman E. A., DIC Thesis, Imperial College Department of Mathematics, 1964.  
 Woodward B., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **85**, 144 (1959).

## Гл. 9

- Angell J. K., Pack D. H., *Monthly Weather Rev.*, **91**, 583 (1963); *Physics of Fluids — Suppl. Boundary layers and turbulence*, S 226 (1967).  
 Ives R. L., *Bull. Amer. Met. Soc.*, **28**, 168 (1947).  
 Konrad T. G., Kropfli R. A., *Proc. 13th Radar Meteor. Conf., Amer. Met. Soc.*, 262 (1968).  
 Lamb, Sir Horace, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932. [Имеется перевод: Ламб Г., *Гидродинамика*.—М.: ОГИЗ, 1947.]  
 Scorer R. S., *Air Pollution*, Pergamon Press, 1968; *Arch. Met. Geoph. Biokl. Ser. A*, **18**, 249 (1969); *Clouds of the World*, David and Charles, 1972.  
 Scorer R. S., Davenport J. L., *J. Fluid Mech.*, **43**, 451 (1970).  
 Simpson J. E., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **95**, 758 (1969); *J. Fluid Mech.*, **53**, 759 (1972).  
 Simpson J. E., Mansfield D. A., Milford J. R., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **103**, 47 (1977).  
 Turner J. S., *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge Univ. Press, 1973. [Имеется перевод: Тёрнер Дж., *Эффекты плавучести в жидкостях*.—М.: Мир, 1977.]  
 Willis P. A., *On Being a Bird*, pp. 78—86, 1977, David & Charles, 1953.

## Гл. 10

- Jorg O., Scorer R. S., *Atmos. Environ.*, **1**, 645 (1967).  
 Lucas D. H., Moore D. J., Spurr G., *Int. J. Air. and Water Poll.*, **7**, 473 (1963).  
 Pasquill F., *Atmospheric Diffusion*, 2nd Ed., Ellis Horwood, Ltd., 1974.  
 Scorer R. S., *Int. J. Air. Poll.*, **1**, 198 (1959).  
 Scorer R. S., *Air Pollution*, Pergamon Press, 1968.

## Гл. 11

- Browning K. A., Foote G. B., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **102**, 499, 1976.  
 Fraser A. B., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **94**, 71 (1968).  
 Ludlam F. H., *Severe Local Storms: a review*, *Met. Monographs*, **5**, 1 (1963); *Tellus*, **18**, 687 (1966); *Bull. Amer. Met. Soc.*, **57**, 774 (1976).  
 Malkus J. S., Scorer R. S., *J. Met.*, **12**, 43 (1955).  
 Newton C. W., *Tellus*, **18**, 699 (1966).  
 Scorer R. S., *Weather*, **8**, No. 7 (1953); *Arch. Met. Geoph. Biokl.*, **8**, 25 (1955); *Sci. Prog.*, No. 181, 75 (1958); *Bull. Astr.*, XXIV Fasc. 2, 216 (1964); *Clouds of the World*, David and Charles, 1972.  
 Scorer R. S., Davenport L. J., *J. Fluid Mech.*, **43**, 451 (1970).

## Гл. 12

- Ackworth B., Bird and Butterfly Mysteries, Eyre and Spottiswoode, 1955.
- Berson F. A., Simpson K. G., *Weather*, 26, 23 (1971).
- Cochemé J., Scorer R. S., inter al., Meteorology and the Desert Locust, WMO/FAO, Seminar. WMO Tech. Note No. 69, 1965.
- Hankin E. H., *Animal Flight: a Record of Observation*, Hiffie, 1913.
- Harper W. G., *Nature*, 180, 847 (1957); *Proc. Roy. Soc. B.*, 149, 484 (1958); *Ibid*, 101, 201 (1959).
- Johnson C. G., *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 83, 194 (1957).
- Johnson C. G., Taylor R. R., Southwood T. R. E., *J. Anim. Ecol.*, 31, 373 (1962).
- Joyce R. J. V., *PANS*, 19, 62 (1973).
- Joyce R. J. V., Marmol L. C., Lucken J., Bale E., Quantlick R., *PANS*, 16, 309 (1970).
- Rainey R. C., *Nature*, 168, 1057 (1951); Meteorology and the Migration of Desert Locusts', WMO Tech. Note, No. 54, 1963; *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 95, 424 (1969); *Weather*, 28, 224 (1973).
- Schaefer G. W., *Insect Flight*, Ed. R. C. Rainey, Ch. 8, Radar Observations of Insect Flight, Blackwell, 1976.
- Scorer R. S., *Clouds of the World*, David and Charles, 1972; Chemistry and Industry, 2 March, 181 (1974).
- Scorer R. S., Wexler H., *Cloud Studies in Colour*, Pergamon Press, 1967.
- Simpson J. E., *British Birds*, 60, 225 (1967).
- Williamson K., Fair Isle and its Birds, Oliver and Boyd, 1965; *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 95, 414 (1969).

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Некоторые обозначения, которые встречаются только в каком-либо одном разделе, в список не включены; их смысл ясен из контекста.

- $a$  — радиус сферы (2.2.7), радиус трубы, размер частицы (2.8.2), тангенциальное ускорение (3.1.12);
- $\mathbf{a}$  — вектор с нулевой расходимостью (1.4.5);
- $b$  — размер горизонтального препятствия (5.13), ширина струи (10.2);
- $\mathbf{b}$  — единичная бинормаль (3.1.6);
- $B$  — число плавучести (2.12.1), (8.2.1), (8.2.7), (8.13.5);
- $\mathbf{B} = \mathbf{t} \times \mathbf{w}$  — вектор Бернулли;
- $C$  — универсальная безразмерная постоянная (8.2.1), (9.9.1), размерная константа (8.11.12), (8.12.14);
- $C_D$  — коэффициент лобового сопротивления (2.10.1);
- $c$  — скорость звука (1.8.8), постоянная интегрирования (8.11.10), (8.12.12);
- $d$  — размер тела (2.8.1), высота подъема теплого воздуха (9.9.1);
- $D$  — сила сопротивления (2.8.2);
- $E$  — энергия турбулентности (7.1.1);
- $e_{ij}$  — скорость деформации (1.3);  $e_{r0}$  (7.9.17);
- $f$  — параметр Кориолиса (гл. 5 и 6);  $f_z$  (гл. 4);
- $\mathbf{f} = d\mathbf{v}/dt$  — ускорение жидкости (1.4.1), (3.1.9), ускорение, обусловленное вращением Земли (4.1.1);
- $\mathbf{F}, F_i$  — массовая или общая сила;
- $F$  — число Фруда (2.12.3), (8.12.6), число Росби (5.8.14);
- $F$  — поток плавучести или загрязнения (8.10.18), (9.4.3), (10.3.3);
- $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести,  $g$  — его модуль;
- $\mathbf{g}^*$  — кажущееся ускорение силы тяжести (4.1.6);
- $h$  — глубина (2.5.1), характерная высота (2.12.2), высота изобарического контура (4.4.1), глубина слоя (гл. 5, 6), высота трубы (10.2),  $h'$  — тепловой подъем (10.2);

- $H$  — постоянная Бернулли  $gH$  (1.7.4) или (1.7.9), глубина слоя (6.2), эффективная высота трубы (10.2);  
 $\mathbf{j}$  — единичный вектор в поперечном направлении потока (5.1.6);  
 $k$  — интенсивность линейного вихря (2.5.3), (7.8.2), волновое число (гл. 5 и 6),  $k^*$  — волновое число для подветренных волн, размерная константа (8.2.9), размерный коэффициент для количества движения (8.7.1), (8.11.2);  
 $k_0$  — изэнтропная константа (1.6.2), (1.8.1), (5.1.6);  
 $K$  — коэффициент турбулентного переноса (4.11.1), интенсивность вихря (9.10.5);  
 $K_M$  — коэффициент переноса количества движения (9.6.5);  
 $K_H$  — коэффициент переноса тепла (9.6.1);  
 $\mathbf{i}$  — единичный вектор (1.1.1);  
 $l$  — параметр Скорера (5.9.2), длина пути перемешивания (7.3.1);  
 $m$  — мощность источника (2.2.1), коэффициент объема (8.2.1), (8.11.2);  
 $M = U/c$  — число Маха;  
 $\dot{M}$  — поток количества движения (8.9.20);  
 $n$  — коэффициент расширения (8.2.6);  
 $\mathbf{n}$  — единичная нормаль (3.1.3);  
 $N$  — коэффициент разбавления струи (10.2.1);  
 $p$  — давление, параметр для подветренных волн (5.13.20),  $p_m$  — среднее давление (1.3.18);  
 $p_{ij}$  — напряжение (1.3);  
 $P$  — концентрация загрязнения (10.2);  
 $q$  — скорость жидкости (1.2.5);  
 $Q$  — объемный расход, поток загрязнения (8.13.2), (10.2);  
 $r$  — полярная координата;  
 $\mathbf{r}$  — вектор положения (4.1);  
 $R$  — универсальная газовая постоянная (1.6.1), радиус Земли (гл. 4), вычет в особой точке (5.13), радиус или ширина термика, клуба, напорной или свободной струи (гл. 8), пара вихрей (гл. 9);  
 $Ra$  — число Рэлея (9.2.1);  
 $Re$  — число Рейнольдса (2.8.1), (7.3.11);  
 $Ri$  — число Ричардсона (2.12.4), (6.1.2), (7.5.3);  
 $\mathbf{R} = 1/\rho \text{ grad } \rho$  или  $1/\tau \text{ grad } \tau$  (1.4.1);  
 $s$  — расстояние по траектории;  
 $S$  — число Струхала (2.11.1), коэффициент устойчивости (8.12.7);

- $S$  — стратификация потока (5.4.5), коэффициент устойчивости (8.4.1);
- $t$  — время;
- $\mathbf{t} = \mathbf{v}/q$  — единичная касательная (3.1.1);
- $T$  — абсолютная температура (1.6.1), кинетическая энергия (1.1.10);
- $u$  —  $x^-$  или  $r^-$  — компонента малого возмущения скорости (5.8), (гл. 6);
- $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $u$  — его модуль;
- $U$  — скорость втекания (8.9.5), скорость потока или ветра;
- $v$  —  $y^-$  или  $\theta^-$  — компонента скорости;
- $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — скорость в декартовых или полярных координатах;
- $\mathbf{v}_a$  — агеострофическая компонента скорости (4.3.6);
- $\mathbf{v}_g$  — геострофическая компонента скорости (4.3.4);
- $\mathbf{v}_i$  — изаллобарический ветер (4.3.11);
- $V$  —  $y$ -компонента ветра (5.8), скорость фронта (9.9.1);
- $w$  — вертикальная компонента скорости;
- $w_c$  — вертикальная скорость вершины термика;
- $W$  — вертикальная скорость (8.11.1);
- $x$  — горизонтальная декартова координата, направленная по потоку;
- $\mathbf{x}$  — вектор положения;
- $y$  — горизонтальная поперечная декартова координата;
- $Y$  — коэффициент «проникания» термика (8.4.2);
- $z$  — вертикальная или направленная вдоль оси координата;
- $\alpha$  — угол отклонения течения (2.4.1), (3.6.1), наклон фронта (4.8.1), стратификация скорости (сдвиг потока) (5.4.4), коэффициент захвата (8.11.3), угол при вершине конической струи (10.2);
- $\beta$  — суммарная статическая устойчивость (1.8.2), (5.2.4), (8.12.1), угол между касательной к спирали и направлением оси (3.10—12), параметр  $\beta$ -плоскости (5.20);
- $\gamma$  — показатель адиабаты (1.6.2), угол между вектором завихренности и направлением оси (рис. 3.10.2);
- $\Gamma$  — адиабатический вертикальный градиент (1.8.3);
- $\delta$  — толщина пограничного слоя (2.7.1);
- $\varepsilon$  — скорость диссипации энергии (7.3.12);
- $\zeta$  — перемещение по вертикали (1.8.5), (5.4.6), (гл. 6), вертикальная или  $z$ -компонента завихренности (5.20.1);
- $\eta$  —  $y$ -компонента завихренности, завихренность в двумерном течении (гл. 5, 6, 7), абсолютная величина сдвига скорости;

- $H$  — плотность завихренности (9.10.4);  
 $\Theta$  — потенциальная температура (1.6.3), угол изгиба канала (гл. 3), дополнительная широта (3.10), (гл. 4), сферическая полярная координата, угол наклона термика (9.5.1);  
 $\kappa$  — пористость по Хеле—Шоу (2.6.6), кривизна траектории (3.1.3), постоянная Кармана (7.3.7);  
 $\lambda$  — вязкость (1.3.7), (1.3.23), стратификация (3.6.2), интенсивность турбулентности (10.3.7);  
 $\mu$  — динамическая вязкость (1.3.7), (1.3.23), интенсивность диполя (2.2.5), коэффициент устойчивости для искривленного течения (3.10.5), экспоненциальное затухание по вертикали (5.10.14), коэффициент изгиба струи (10.3);  
 $\nu$  — кинематическая вязкость (1.3.28), волновое число по вертикали (5.10.3);  
 $\Pi$  — импульсное давление (1.1.11);  
 $\rho$  — плотность;  
 $\sigma$  — пористость по Дарси (2.6.7), концентрация загрязняющих веществ (8.9.11) или насекомых (12.6.1), частота (2.11.1), (5.20.6), (гл. 6), (7.11), доля горизонтальной области, занятая движением вверх (9.4.1), безразмерная константа (8.12.13);  
 $\tau = 1/\theta$  — (потенциальная температура)<sup>-1</sup> (1.6.5), кручение для кривой (3.1.7), напряжение сдвига (7.3), время перемешивания (7.9);  
 $\tau_{ij}$  — тензор напряжений (4.11.7);  
 $\varphi$  — потенциал (1.1.6), (2.1.2), (6.1), угловое смещение (1.8.9), (3.2.2), (3.5.2), угол наклона волны (5.15), энтропия (11.2);  
 $\Phi$  — поток плавучести (8.11.2);  
 $\psi$  — функция тока (6.2), наклон линии тока (6.3.2);  
 $\xi$  — компонента завихренности по оси  $x$ ;  
 $\omega$  — завихренность,  $\omega = \text{rot } v$  (1.2.3),  $\omega = (\xi, \eta, \zeta)$  (1.3.2);  
 $\omega_s = \omega t$  — вторичная завихренность (3.1.18);  
 $\underline{\omega}_n$  — нормальная компонента завихренности;  
 $\underline{\omega}$  — приведенное давление (1.6.4);  
 $\Omega$  — угловая скорость вращения (1.3.3), (2.5), (7.8), (7.11), угловая скорость вращения Земли (гл. 4).

# Предметный указатель

- Адиабата для льда 436, 437  
Адиабатическое движение 44  
Альбатросы 501—504  
Альтокумулюсы, улицы 378  
Антициклоны 163, 244  
Атмосферные приливы 489—491
- Бернулли* вектор 94  
— поверхность 46  
Бифуркация 405  
*Бозанке* формула 411  
Бризы морские 385—388  
*Буссинеска* приближение 85, 164, 182, 244, 261, 313
- Ветер агеострофический 147, 151, 155  
— анабатический 237, 239, 382—384, 422  
— антитриптический 148  
— геострофический 147, 151  
— изаллобарический 150  
— кататический 237, 383  
— термический 153, 154  
Ветра геострофического дивергенция 154  
— сдвиг 369, 370, 454, 456, 457, 478, 479  
Встры горные Наталя 469  
Вихревая дорожка 80, 82  
Вихревого слоя неустойчивость 250—257  
Вихревое течение с радиальными смещениями 300  
— — изотропное 299  
— — — при вращении 299  
Вихревой процесс хаотический 276—279  
Вихревые линии в пограничном слое 120  
— трубки 309, 301—305
- Вихревых линий движение вместе с жидкостью 22, 38  
— — деформация вблизи препятствия 113—118  
— — растяжение 40  
— — — вертикальное 155, 160  
Вихрей масштаб 283, 284  
— пара 388—394  
— — спектр масштабов 278, 279  
Вихри (области циркуляции) 195, 196  
— в пограничном слое 232  
— на подветренной стороне препятствий 233  
— поперечные 231, 233  
— срывные 240, 241  
— угловые 232  
Вихря кинетическая энергия 285, 286  
Влажная адиабата 433, 434  
Водяные смерчи 488  
Воздух холодный, скопления при фене 240  
Волн захват за счет скачка плотности 201—203  
Волн распространение 248, 461  
Волнистая облачность 478  
Волнистое облако, расслоение 454, 457  
Волнистые облака *см.* Облачные валы  
Волновая структура за движущимися судами 216—223, 531  
Волновое движение вдоль оси вихрей 301—305  
Волны большой амплитуды 191  
— в атмосфере и вращение Земли 186  
— вечерние 226  
— затухающие по течению 206  
— захваченные (поглощенные) 200, 201, 229  
— звуковые 247  
— на подветренной стороне препятствий 206—214



- — — — трехмерного препятствия 216—223  
 — — — — незахваченные 203—205  
 — — — — от сильных взрывов 245, 246  
 — — — — подветренные и сильные ветры 225, 226  
 — — — — максимум амплитуды 228  
 — — — — при наличии адиабатического слоя 243  
 — — — — свойства 223—229  
 — — — — суточная изменчивость 226, 227  
 — — — — при движении к плато 242  
 — — — — суточная изменчивость 226, 238  
 Вращение антициклональное 487  
 — Земли 140  
 Время оседления 425  
 Выпадение осадков 462—475  
 — росы 435  
 Высота трубы как параметр задымления 403  
 Выхолаживание воздуха дождем 465, 466  
 Вязкость 32, 34  
  
 Геострофическое ускорение 151  
 Глаз бури 169, 485  
 Горячий купол 113  
 Град, явление образования 430  
 Градиент концентрации 288  
 — температуры 48, 162  
 Градиентов потенциальной температуры возрастание 265—268  
 Граничное условие для верхних слоев атмосферы 241  
 Грифы 497—499  
  
 Давление, действующее на сферу 54, 55  
 — нормальное 29  
 — полное гидродинамическое в криволинейном течении 128  
 — среднее 32  
 — стандартное 44  
 Давления импульсы, создаваемые штормом 248, 249  
 Движение безвихревое 52  
 — жидкости в стакане 59, 118  
 Депрессий образование вследствие нагрева 160  
 Депрессия 157—159  
 Деформации скорость 24, 25  
 Дивергенция потока 151, 157  
 Динамическое парение 501—505  
 Диполь 53  
 Диссипация энергии 63  
 Дождь в штормах 484  
 — под деревьями 74  
  
 Дымки поверхность 383  
  
 Завихрение 235—237  
 Завихренности возникновение и вязкость 42  
 — — — — градиенты плотности 41, 50  
 Завихренность 35  
 — абсолютная 155, 244  
 — — и вертикальные движения 156  
 — и конвекция 301  
 — — угловая скорость 25, 26, 90  
 Загрязнений фоновый уровень 424  
 Загрязнения максимум 425  
 Загрязняющие вещества естественные 426  
 Закон *Бюис*—*Баллота* 146  
 — *Дарси* 61  
 — *Колмогорова* «— $5/3$ » 289  
 — *Ома* 61  
 — *Стефана*—*Больцмана* 48  
 — *Ферреля* 146  
 Замерзание частиц 430, 431  
 Запирание (блокирование) воздушной массы 238, 242, 243, 466, 467, 469  
 Затекание холодного воздуха в трубу 414—417  
 Захват (поглощение) волн вихрями 302, 303  
 — — — — малых частиц 73—75  
 — планера 236  
 Захвата коэффициент 75  
 — — — — для струй 351—354  
 Звук генерация 305  
 Зона циркуляционная 388, 389, 393  
 Зондирование аэрологическое 431, 433, 458  
  
 Излучение с верхней поверхности облака 265, 385, 428  
 Изменение климата Земли 491, 492  
 Изотропная жидкость 28  
 Инверсия 456—460, 496  
 — — — — подоблачная 460, 482  
 Источник 52  
 Источники тепла 379  
  
 Кажущееся ускорение силы тяжести 143  
 Капоки 497  
 Катафронт 164  
*Кельвина* волны 187  
 Кинетическая энергия сжимаемой жидкости 19  
 Клуба циркуляция 333

- Клубы всплывающие 333, 334  
 — двумерные 334—336  
 Колебания в изогнутых трубах 102  
 Конвекция атмосферная, режимы 363, 364  
 — в режиме подобия 366—369  
 — за счет вращения 381, 382  
 — облачные улицы 375—379  
 — при наличии вязкости 364, 375  
 — — ячеистая 364, 375—379  
 Конвергенция 151, 157, 505, 511, 513  
 — и конвекция 460  
 Конденсация уровень 433  
 Конденсационный след самолета 439—450  
 Конденсация 427  
 — влаги 434, 435  
*Кориолиса* силы 377, 388  
 «Кошачий глаз» 257—261  
 «Кошачья лапа» 237  
 Коэффициент лобового сопротивления 77  
 Кристаллы льда 76, 77  
 К-теория 293, 294, 371—374, 395—398  
*Куни* волны 190  
 Кукушки и атмосфера 496, 497  
 Кучевые облака в пассатах 456, 460  
 — — — потоке со сдвигом ветра 456, 457  
 — — — над горами 383, 384
- Ламинарное течение вязкой жидкости 59  
 — — — — в цилиндре 59, 60  
 Ласточки и атмосфера 496, 7  
 Летучие рыбы и атмосфера 504, 505  
 Локальная неустойчивость 121—123, 133—134  
 Лох-Несское чудовище 270, 494, 500
- Меандрирование рек 99  
 Мухи в Австралии и атмосфера 499
- Нагревание за счет оседания 459—461  
 Напряжение касательное (тангенциальное) 471, 280, 281  
 — *Рейнольдса* (турбулентное) 280, 282, 286  
 Несвязкая жидкость 15  
 Необратимое течение 275, 276  
 — в слое *Экмана* 377—379  
 — в спиральном течении 128  
 Неустойчивость вихревого слоя 250—257
- *Гёртлера* 137  
 — плоского криволинейного течения 135  
 — по *Гельмгольцу* 252  
 — типа облачных валов, возникновение 261
- Облака башнеобразные (хлопьевидные) 461, 462, 471, 472, 478  
 — в циклонах 167, 168  
 — вымеобразные 469—472  
 — перистые орографические 478, 531  
 — плохой погоды 475  
 — с наковальнями 377, 469, 480  
 Облаков излучение 427, 428, 475  
 — образование 428, 429  
 Облачко воздушных пузырьков 463—465  
 Облачное покрытие 492  
 Облачные валы 476—478  
 — — картина на экране радара 260  
 — — — с подветренной стороны хребта 239  
 — — — суточная изменчивость 226  
 Образование тумана 435  
 Обтекание пузырьков воздуха жидкостью 61, 62  
 — сферы 52—54  
 Окно осадков 472, 473  
 Оледенение 430, 431, 472  
 Опрыскивание пестицидами дрейфовое 506  
 Опрыскивания эффективность 506, 512  
 Отбор проб загрязняющих веществ 424 426  
 Отклоняющая сила 144  
 Относительная влажность 433  
 Отношение смеси для влаги 433  
 — — — состояния насыщения 433  
 Отрыв потока 66—71, 80—85  
 — — в изгибе канала 70  
 — — на склоне холма 68  
 — — от поверхности 231—240
- Падение частиц внутри термика 322, 328, 329  
 Падение в термиках 329, 496, 497  
 Параметр *Кориолиса* 144, 244  
 Парашют 73  
 Переменное поле давлений 150  
 Перемешивание механическое 384, 385

- Перемешивания процесс при вращении 296-300  
 Перенасыщение 427  
 Перенос количества движения волнами 292  
 Поверхности постоянной плотности 43  
 Пограничный слой 63—65  
 Показатель преломления 438  
 Полет птиц 493  
 Потенциал скорости 52  
 Поток из зоны шторма 466, 480, 482  
 — количества движения для напорной струи 338  
 — нисходящий (опускающийся) 485, 488, 507  
 — — холодного воздуха 466, 479  
 — — скошенный за самолетом 388—394  
 Правило «2,5 раз» 423  
*Прандтля* число вихревое 376  
 — гипотеза 281  
 Препятствие в стратифицированном по скорости потоке 110—118  
 Приближение  $\beta$ -плоскости 244  
 Присоединенная масса 54, 55  
 Прямая циркуляция 167, 475  
 Пузырей воздуха размывание 329  
 Пузыри воздушные большие 306—310  
 Путь смещения 281, 296—300
- Радиальная (центробежная) неустойчивость 125, 135, 136  
 Развитие центров низкого давления 156  
 Размер дождевых частиц 429  
 Разрывы скоростей на скачке температур 163, 164  
 Разрушение берегов рек 99  
 — вихревого течения 133  
 Рассеяние 396, 508  
*Рейнольдса* аналогия 340, 395  
 — число для вихрей 288  
 — — для клубов 333  
 — — — напорных струй 338  
 — — — термиков 313  
 Рециркуляция 359—362  
 Решетка профилей 70, 86  
*Ричардсона* критерий 290—292  
*Росби* волны 244
- Самум 388, 466  
 Саранча и ветер 493, 505—512  
 Саргассово море, механизм поверхностных течений 173  
*Сатклиффа* теория развития центров низкого давления 156
- Свободная поверхность 58, 59  
 — — в вязкой жидкости 63  
 «Связанная» стадия развития торнадо 489  
 Семя одуванчика и ветер 73  
 Сила, обусловленная градиентом давления 16  
 Сильный взрыв 245  
 Система устойчивая 476  
*Скайра* формула 95  
 Скоростей профиль логарифмический 282  
 Скорость воздуха вертикальная 154  
 — трения 283  
 Слабый взрыв 245  
 След конденсационный 444—447  
 Следов представление источниками 110  
 Следы 73, 80, 117  
 Смерчи песчаные (пыльные) 241, 381, 382  
 Среднее значение 279  
 Статистическая устойчивость 47  
 Стационарные фазы принции 220  
*Стокса* формула для сферы 72  
 Струи напорной подъем 406, 414  
 Струйный шум 305  
 Струя бифуркированная 418, 420, 421, 424  
 — веерообразная 418, 419, 421  
 — волнообразная 417, 418, 420  
 — восходящая 418, 419, 422  
 — всплывающая изогнутая 405  
 — задымленная 418, 419, 421  
 — клубящаяся 418, 419, 424  
 — конвективная ламинарная 358, 359  
 — коническая (конусообразная) 417, 418, 421  
 — напорная всплывающая 350  
 — — двумерная 341  
 — — осесимметричная 336—341  
 — — развивающаяся (свежая, неустановившаяся)  
 — нисходящая 418, 419, 423  
 — — содержащая капельки воды 412—414  
 — термикообразующая 418, 419, 422, 423  
 — флагообразная (провисшая) 403, 408, 409, 418, 419, 423  
 Сухие адиабаты 432, 433
- Тейлора* спираль 173  
 Температура виртуальная 438  
 — дождевых капель 430

- потенциальная 44, 431
- — смоченного термометра 439
- Теорема *Кельвина* о единственности 18
- — — — — минимуме кинетической энергии 19
- — — — — циркуляции 21, 22
- — — — — *Норманда* 435
- Термики 310, 497
- в потоке со сдвигом ветра 369, 370, 453, 454
- — — — — двумерные 334, 335
- — — — — и планировании 329—332, 497
- Термиков внешняя скорость 327
- внутренняя скорость 333
- источники 380, 381, 418, 419, 422
- проникновение сквозь слой инверсии 322, 324, 326
- циркуляция 318
- Термический ветер 153
- сдвиг 157
- (тепловой) подъем струи 401, 404, 409
- Тетраграмма 431
- Течение в боковом русле 99—102
- в спиральном вихре 123
- вне напорной струи 341, 342
- вторичное 87
- вызванное ударным воздействием грани 20, 21
- необратимое 84
- — — — — потенциальное 52
- — — — — спиральное в трубе 132
- Течения струйные 55, 166, 167, 268
- Тлей рассеяние ветром 495, 496
- Торнадо 489
- Точка заморзания 436
- росы 435
- Трение у поверхности Земли 148, 156, 163
- Туман при испарении 475
- Тумана полосы 387
- Тунгусский метеорит 245
- Турбулентная вязкость 39
- Турбулентного переноса коэффициенты 370—374
- течения профиль скоростей 69, 70
- Турбулентной энергии рассеяние 290
- — — — — спектр 289, 290
- Турбулентность во вращающейся жидкости 294—296, 299, 300
- вызванная механическим перемешиванием 287, 384
- «замороженная» 430
- определение 273—279
- порожденная стоячими волнами 292, 293
- ясного неба, 265, 268, 269
- Уравнение *Бернулли* 45
- волнового движения, линсаризация 170
- волновое трехмерное 180
- вторичной завихренности 90, 91
- гидростатики 17, 147
- движения 16, 33, 34, 44
- — — — — адиабатический случай 185
- — — — — в системе координат, связанных с Землей 143, 144
- — — — — горизонтальная составляющая 147
- — — — — невязкой жидкости 16
- — — — — завихренности 35—37, 42, 45, 261
- — — — — *Навье—Стокса* 34, 35
- — — — — неразрывности 37, 52, 176, 177
- — — — — случай сжимаемой атмосферы 185, 186
- — — — — стационарного движения 177—185, 194
- Ураганы (тайфуны) 168—170, 294—296, 484—489
- Ураганы и трение о подстилающую поверхность 168
- Уровень сублимации льда 440
- Условие излучения 204, 241, 242
- Устойчивая стратификация 433
- Факелы 345, 346
- в стратифицированной среде 355, 356
- — — — — двумерные 346—348
- — — — — развивающиеся 348—350
- Фен 239, 240, 384
- Феновое окно 228, 229
- Флюктуации (пульсации) в безвихревом движении 276
- Флюктуаций (пульсаций) природа 274
- Форма крыльев птиц 499, 500, 503, 504
- Френе* формулы 88, 89
- Фронт и «кошачья лапа» 237
- — — — — теплый 162, 473
- — — — — холодный 161, 162, 497
- — — — — шквальный 482
- — — — — шторма 479, 482
- Фронтальной поверхности наклон 163
- Фронты морских бризов 385—388
- Центробежная сила на поверхности Земли 143
- Циклогенез 157
- Циклона теплый сектор 165
- Циклоническое вращение 144

- Число Кармана** 282  
— *Маха* 78  
— *Ричардсона* 256, 262—264, 267, 268  
— *Росби* 189  
— *Рэля* 365  
— *Фруда* 85, 238, 355
- Шапки облачные** 456, 458  
**Шлейф циррусов** 379, 478, 531  
**Шторм** свободно развивающийся 478—483
- Эжеския** 83, 85  
**Электрические силы** 429, 430  
**Электролитическая ванна** *Тейлора* 61  
**Экмана спираль** 170—173  
**Эрозия кучевых облаков** 451—456  
— термиков 451'
- Ячеистая структура нисходящего движения** 475  
**Ячейка Хеле—Шоу** 61, 62

# Оглавление

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	11
<b>ЧАСТЬ I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ, ЗАВИХРЕННОСТЬ И ВОЛНЫ . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>Глава 1. Основные уравнения . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1. Безвихревое движение и реальные жидкости . . . . .	15
1.2. Обозначения, системы координат, тождества . . . . .	23
1.3. Уравнения Навье—Стокса . . . . .	24
1.4. Уравнение завихренности . . . . .	35
1.5. Теорема о сохранении вихревых линий на поверхностях постоянной плотности . . . . .	42
1.6. Адиабатические движения в атмосфере . . . . .	44
1.7. Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости в стационарном движении . . . . .	45
1.8. Статическая устойчивость . . . . .	47
<b>Глава 2. Явления в потоках жидкости . . . . .</b>	<b>52</b>
2.1. Классическая гидродинамика невязкой несжимаемой жидкости . . . . .	52
2.2. Источник, диполь, однородный поток и обтекание сферы . . . . .	52
2.3. Сила, действующая на сферу. Присоединенная масса . . . . .	54
2.4. Струйные течения . . . . .	55
2.5. Поверхность вращающейся жидкости . . . . .	58
2.6. Ламинарное течение вязкой жидкости . . . . .	59
2.7. Пограничный слой . . . . .	63
2.8. Движение малых тел в жидкости. Число Рейнольдса . . . . .	71
2.9. Траектории малых частиц. Эффективность захвата . . . . .	73
2.10. Коэффициент лобового сопротивления . . . . .	77
2.11. Отрыв и необратимость . . . . .	80
2.12. Критерии подобия . . . . .	85
<b>Глава 3. Вторичная завихренность . . . . .</b>	<b>87</b>
3.1. Определения . . . . .	87
3.2. Уравнение вторичной завихренности . . . . .	90
3.3. Формула Сквайра . . . . .	95
3.4. Течение в речных излучинах . . . . .	97
3.5. Колебания в изогнутых трубах . . . . .	102
3.6. Вторичное течение позади препятствий; тепловой купол Готорна . . . . .	109
3.7. Вторичное течение перед препятствием . . . . .	115
3.8. Движение жидкости в стакане . . . . .	118
3.9. Течение, возникающее в двугранных углах, образованных дном и стенками каналов . . . . .	120

3.10. Локальная неустойчивость в криволинейном течении . . . . .	121
3.11. Неустойчивость при плоском вращательном течении . . . . .	135
3.12. Вращения вокруг главной нормали и бинормали . . . . .	137
<b>Глава 4. Вращающаяся Земля . . . . .</b>	<b>140</b>
4.1. Формальный математический подход . . . . .	140
4.2. Физическая интерпретация . . . . .	144
4.3. Соотношение между градиентом давления и ветром . . . . .	146
4.4. Движение в верхних слоях атмосферы; изобарические карты . . . . .	152
4.5. Термический ветер . . . . .	153
4.6. Оценка вертикальной скорости . . . . .	154
4.7. Теория развития центров низкого давления Сатклиффа . . . . .	156
4.8. Фронты . . . . .	163
4.9. Струйные течения . . . . .	166
4.10. Ураганы . . . . .	168
4.11. Спираль Экмана . . . . .	170
<b>Глава 5. Волны в стратифицированной жидкости . . . . .</b>	<b>174</b>
5.1. Роль теории. Допущения, приближения, обозначения . . . . .	174
5.2. Уравнение стационарного движения . . . . .	177
5.3. Уравнение движения в трехмерном случае . . . . .	180
5.4. Волновое уравнение для установившегося двумерного движения несжимаемой стратифицированной жидкости . . . . .	180
5.5. Практические приближения . . . . .	181
5.6. Волновое уравнение для сжимаемой атмосферы . . . . .	184
5.7. Уравнение неразрывности для сжимаемой атмосферы . . . . .	185
5.8. Волны малой амплитуды и влияние вращения Земли . . . . .	186
5.9. Линейные волны большой амплитуды в несжимаемой жидкости . . . . .	191
5.10. Стоячие волны и вихри . . . . .	194
5.11. Незахваченные волны . . . . .	203
5.12. Затухающие волны . . . . .	205
5.13. Волны на подветренной стороне препятствия . . . . .	206
5.14. Влияние ветрового профиля на подветренные волны . . . . .	214
5.15. Подветренные волны при обтекании трехмерных препятствий . . . . .	216
5.16. Некоторые важные свойства подветренных волн . . . . .	223
5.17. Захваченные волны второго рода . . . . .	229
5.18. Отрыв потока от поверхности . . . . .	231
5.19. Некоторые теоретические трудности . . . . .	241
5.20. Другие виды волн . . . . .	244
<b>Глава 6. Механика образования облачных валов . . . . .</b>	<b>250</b>
6.1. Неустойчивость вихревого слоя . . . . .	250
6.2. Развитие структуры «кошачий глаз» . . . . .	257
6.3. Возникновение неустойчивости типа валов . . . . .	261
6.4. Динамическая генерация слоев, обладающих большой устойчивостью . . . . .	265
<b>ЧАСТЬ II. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ОБЛАКА И РАССЕЯНИЕ . . . . .</b>	<b>270</b>
<b>Глава 7. Турбулентность . . . . .</b>	<b>270</b>
7.1. Проблема чрезвычайной трудности . . . . .	270
7.2. Что такое турбулентность . . . . .	273
7.3. Напряжения Рейнольдса; путь смещения; вырождение вихрей . . . . .	279
7.4. Свойства турбулентности . . . . .	288
7.5. Критерий Ричардсона для затухающей турбулентности . . . . .	290

7.6. Турбулентность, порождаемая стоячими волнами . . . . .	292
7.7. Приложение теории турбулентности к атмосферным процессам . . . . .	293
7.8. Турбулентность во вращающейся жидкости . . . . .	294
7.9. Применение теории пути смешения к изучению вращающейся жидкости . . . . .	296
7.10. Дробление вихрей . . . . .	300
7.11. Упругие свойства вихревых трубок в турбулентных течениях . . . . .	301
<b>Глава 8. Частично турбулентные течения . . . . .</b>	<b>306</b>
8.1. Всплывание воздушного пузыря в воде . . . . .	306
8.2. Осесимметричные термики . . . . .	310
8.3. Свойства термиков . . . . .	318
8.4. Продолжение экспериментов с термиками . . . . .	322
8.5. Полеты в термиках . . . . .	329
8.6. Клубы газа . . . . .	332
8.7. Всплывающие клубы . . . . .	333
8.8. Двумерные термики и клубы . . . . .	334
8.9. Напорные струи . . . . .	336
8.10. Факелы . . . . .	345
8.11. Всплывающие напорные струи . . . . .	350
8.12. Подобие в стратифицированной среде . . . . .	354
8.13. Ламинарные конвективные струи . . . . .	358
8.14. Напорная струя с рециркуляцией . . . . .	359
8.15. Сводка экспериментальных зависимостей . . . . .	362
<b>Глава 9. Свободная конвекция в сухой атмосфере . . . . .</b>	<b>363</b>
9.1. Атмосферная конвекция. Режимы и наблюдения . . . . .	363
9.2. Слабая конвекция. Число Рэлея . . . . .	364
9.3. Полностью турбулентная конвекция в режиме подобия . . . . .	366
9.4. Конвекция в режиме подобия при опускающейся нестратифицированной среде . . . . .	367
9.5. Подъем термиков в потоке со сдвигом ветра . . . . .	369
9.6. Отношение коэффициентов турбулентного переноса для количества движения и тепла . . . . .	370
9.7. Сомнительность понятия коэффициента турбулентного переноса . . . . .	374
9.8. Формы свободной конвекции . . . . .	375
9.9. Фронты морских бризов . . . . .	385
9.10. Скок потока и инверсионный след самолета . . . . .	388
<b>Глава 10. Рассеяние загрязняющих веществ в атмосфере . . . . .</b>	<b>395</b>
10.1. Общие принципы . . . . .	395
10.2. Распространение загрязняющих веществ от трубы . . . . .	399
10.3. Напорная струя и тепловой подъем . . . . .	404
10.4. Опускание дымовой струи; влияние находящихся в струе капелек воды . . . . .	412
10.5. Дымовые струи в неподвижном воздухе под инверсией . . . . .	414
10.6. Затекание холодного воздуха в трубу . . . . .	414
10.7. Разновидности дымовых струй . . . . .	417
10.8. Отбор проб загрязняющих веществ . . . . .	424
10.9. Рассеяние естественных загрязняющих веществ . . . . .	426
<b>Глава 11. Облака и осадки . . . . .</b>	<b>427</b>
11.1. Основные принципы . . . . .	427
11.2. Тефиграмма . . . . .	431
11.3. Физика конденсационного следа за самолетом . . . . .	439



11.4. Динамика конденсационного следа от самолета . . . . .	444
11.5. Динамика кучевых облаков . . . . .	450
11.6. Динамика выпадения осадков . . . . .	462
11.7. Разнообразные облачные формы . . . . .	475
11.8. Свободно развивающиеся штормы . . . . .	478
11.9. Роль облаков во фронтальных циклонах . . . . .	483
11.10. Тропические циклоны, торнадо и водяные смерчи . . . . .	484
11.11. Атмосферные приливы . . . . .	489
11.12. Облака и изменения климата . . . . .	491
<b>Глава 12. Аэродинамика и живые организмы . . . . .</b>	<b>493</b>
12.1. Как изучаются явления . . . . .	493
12.2. Тли . . . . .	495
12.3. Ласточки и кукушки . . . . .	496
12.4. Грифы, канюки и другие хищные птицы . . . . .	497
12.5. Альбатросы и динамическое парение . . . . .	501
12.6. Пустынная саранча . . . . .	505
12.7. Контроль численности насекомых-вредителей путем воздействия на их стаи . . . . .	512
Заключение. Живите с природой в мире . . . . .	516
Вопросы и (возможно спорные) предложения для обсуждения . . . . .	518
Литература . . . . .	532
Обозначения . . . . .	536
Предметный указатель . . . . .	540

**Р. Скорер**

**АЭРОГИДРОДИНАМИКА  
ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

Ст. научный редактор Ю. В. Воронов  
Мл. научный редактор Н. И. Сивилева  
Художник В. И. Харламов  
Художественный редактор Л. Е. Безрученков  
Технический редактор Г. В. Алюлина  
Корректор А. Ф. Рыбальченко

**ИБ № 2023**

Сдано в набор 20.12.79. Подписано к печати 25.06.80. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 17,25 бум. л. Усл. печ. л. 34,50. Уч.-изд. л. 32,75. Изд. № 20/0471. Тираж 3700 экз. Зак. 170. Цена 3 р. 60 к.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»**

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
190000, г. Ленинград, Прачечный переулок, 6.