

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ

**Е. В. БРУЯЦКИЙ**

**ТЕОРИЯ АТМОСФЕРНОЙ ДИФФУЗИИ  
РАДИОАКТИВНЫХ ВЫБРОСОВ**

---

**Ye. V. BRUYATSKYI**

**THEORY FOR ATMOSPHERIC DIFFUSION  
OF RADIOACTIVE RELEASES**

КИЕВ — 2000



УДК 532.517.4.697.911

Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов / Бруяцкий Е. В. – Киев: Институт гидромеханики НАН Украины, 2000. – 443 с. ISBN 966-02-1535-5 (Кн. 2).

Изложены теоретические основы процессов турбулентного переноса и диффузии радиоактивных газоаэрозольных выбросов в атмосфере. Приведены фундаментальные решения задач стационарной и нестационарной диффузии примеси от точечных, линейных и объемных источников в безграничной и полуграниченной покоящейся или движущейся среде. Рассмотрены структура и особенности пограничного слоя термически стратифицированной атмосферы. Проанализированы основные методы расчета рассеивания примеси в атмосфере. Особое внимание уделено теории диффузии Тейлора и модели Гаусса.

Представлена струйно-диффузионная модель рассеивания радиоактивной примеси в атмосфере от непрерывных источников. Изложена теория плавучих турбулентных струй, распространяющихся в сносящем ветровом потоке и методика расчета рассеивания примеси на струйном и диффузионном участках. Обсуждена проблема учета нестационарности метеорологических условий и методика расчета полей приземных концентраций радиоактивности, осредненных за произвольный отрезок времени. Особое внимание уделено аварийному залповому выбросу. Приведены примеры построения расчетных карт-схем радиоактивного или химического загрязнения воздуха и почвы вблизи источника выбросов в форме изоплет. Рассмотрены основные принципы расчета доз облучения населения от радиоактивного облака, загрязненной почвы и от попадания радионуклидов по пищевым цепочкам. Проанализированы некоторые аспекты аварии на Чернобыльской АЭС и способ оценки предельно допустимых выбросов в атмосферу для предприятий с ядерным топливным циклом.

Для научных работников и специалистов, интересующихся вопросами турбулентной диффузии, проблемами охраны окружающей среды и радиационной безопасности населения, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Ил. 51. Табл. 47. Библиогр.: с. 425–443 (234 назв.).

Утверждено к печати

Ученым советом Института гидромеханики НАН Украины

Ответственный редактор: член-корр. НАН Украины А. Я. Олейник

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук Е. И. Никифорович,

докт. техн. наук А. Б. Ступин

Редактор: Н. И. Нежурбеда

ISBN 966-02-1411-1 (серия) © Институт гидромеханики НАН Украины, 2000  
ISBN 966-02-1535-5 (Кн. 2) © Е. В. Бруяцкий, 2000

УДК 532.517.4.697.911

Теорія атмосферної дифузії радіоактивних викидів / Бруяцький Є. В. – Київ: Інститут гідромеханіки НАН України, 2000. – 443 с. ISBN 966-02-1535-5 (Кн. 2).

Викладені теоретичні основи процесів турбулентного переносу і дифузії радіоактивних газоаерозольних викидів в атмосферу. Наведені фундаментальні розв'язки задач стаціонарної і нестаціонарної дифузії суміші від точкових, лінійних та об'ємних джерел у безмежному і напівобмеженому рухомому або нерухомому середовищі. Розглянуто структуру та особливості граничного шару термічно стратифікованої атмосфери. Проаналізовано основні методи розрахунку розсіювання суміші в атмосфері. Особливу увагу приділено теорії дифузії Тейлора та моделі Гауса.

Представлена струминно-дифузійна модель розсіювання радіоактивної суміші в атмосфері від безперервних джерел. Викладено теорію плавучих турбулентних струмин, що розповсюджуються в поперечному вітровому потоці і методика розрахунку та розсіювання суміші на струминній та дифузійній ділянках. Обговорено проблему врахування нестаціонарності метеорологічних умов і методик розрахунку полів приземних концентрацій радіоактивності, осереднених за довільний відрізок часу. Особливу увагу приділено аварійному залповому викиду. Наведені приклади побудови розрахункових карт-схем радіоактивного або хімічного забруднення повітря і ґрунту біля джерела викидів у формі ізоплет. Розглянуті основні принципи розрахунку доз опромінення населення від радіоактивної хмари, забрудненого ґрунту і від попадання радіонуклідів по харчових ланцюгах. Проаналізовано деякі аспекти аварії АЕС та спосіб оцінки гранично допустимих викидів в атмосферу для підприємств з ядерним паливним циклом.

Для наукових співробітників і спеціалістів, які цікавляться питаннями турбулентної дифузії, проблемами охорони навколишнього середовища та радіаційної безпеки населення, а також для студентів і аспірантів відповідних спеціальностей.

Лл. 51. Табл. 47. Бібліогр.: с. 425–443 (234 назв).

Затверджено до друку

Вченою радою Інституту гідромеханіки НАН України

Відповідальний редактор: член-кор. НАН України *О. Я. Олійник*

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук *Є. І. Нікіфорович*,

докт. техн. наук *О. Б. Стушін*

Редактор: *Н. І. Нежурбіда*

ISBN 966-02-1411-1 (серія) © Інститут гідромеханіки НАН України, 2000  
ISBN 966-02-1535-5 (Кн. 2) © Є. В. Бруяцький, 2000

UDC 532.517.4,697.911

Theory for atmospheric diffusion of radioactive releases / Bruyatskyi Ye. V. – Kyiv: Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine, 2000. – 443 p. ISBN 966-02-1535-5 (Book 2).

Theoretical fundamentals are presented for processes of turbulent transport and diffusion of radioactive aerosols in atmosphere. Fundamental solutions are given for problems of stationary and nonstationary admixture diffusion from point, linear and body sources in infinite and semi-infinite medium under rest or motion. Structure and peculiarities of a boundary layer of the thermally stratified atmosphere are considered. Basic methods to calculate the admixture dispersion in the atmosphere are analyzed. The special attention is paid to the Taylor diffusion theory and to the Gauss model.

A jet-diffusion model is presented for the radioactive admixture dispersion in the atmosphere from continuous sources. A theory of buoyant turbulent jets propagating in a cross wind-stream is described, as well as a calculation method of the admixture dispersion along jet and diffusion sections. Account of non-stationarity of meteorological conditions and ways to calculate fields of ground radioactivity concentrations averaged within an arbitrary time interval are discussed. Special attention is focused on wrecking volley releases. Construction of calculated maps is shown as an example of radioactive and chemical air/soil pollution near a source of releases in a form of isopleths. There are investigated basic principles to estimate radiation doses acquired by population from a radioactive cloud, polluted soil and through the consumption of food containing radionuclides. Some aspects of the Chernobyl accident are analyzed, and a method of estimation is given for marginal admissible releases in the atmosphere for enterprises with a nuclear fuel cycle.

The book is destined for researchers and specialists interested in problems of turbulent diffusion, environment protection and nuclear safety as well as for students and postgraduate students of corresponding specialities.

Illustrations 51. Tables 47. Bibliography: p. 425–443 (234 titles).

Approved for publication

by Scientific Council of Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine

Editor-in-chief: Member-correspondent of NAS of Ukraine *A. Ya. Oleinik*

Reviewers: Dr. phys-math. sci. *Ye. I. Nikiforovich*,

Dr. techn. sci. *A. B. Stupin*

Editor: *N. I. Nezhurbeda*

ISBN 966-02-1411-1 (series) © Inst. of Hydromechanics of NAS of Ukraine, 2000

ISBN 966-02-1535-5 (book 2) © Ye. V. Bruyatskyi, 2000

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b>	<b>11</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>15</b>
<b>1 ПРОБЛЕМА ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ РАДИО- АКТИВНЫМИ ВЫБРОСАМИ</b>	<b>20</b>
1.1. Общая характеристика атмосферы и выбросов . . . . .	20
1.2. Краткие сведения о радионуклидах . . . . .	27
1.3. Основные подходы к математическому описанию турбулентной диффузии . . . . .	32
1.4. Введение в теорию диффузии. Общие понятия и определения . . . . .	34
1.5. Дифференциальное уравнение конвективной диффузии	38
1.6. Основное уравнение турбулентной диффузии . . . . .	42
1.7. Начальные и граничные условия для задач конвективной диффузии и общие подходы к их решению . . . . .	44
<b>2 НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ</b>	<b>49</b>
2.1. Постановка задачи для точечного источника и выбор начально-краевых условий . . . . .	49
2.2. Решение вспомогательной задачи с неоднородными условиями . . . . .	51
2.3. Диффузия от непрерывного точечного источника в безграничной неподвижной среде . . . . .	55
2.4. Диффузия от мгновенного точечного источника в безграничной неподвижной среде . . . . .	56
2.5. Диффузия от нестационарных линейного и плоского источников в безграничной неподвижной среде . . . . .	59
2.6. Нестационарная диффузия радиоактивной или неконсервативной примеси . . . . .	61
<b>3 ДИФФУЗИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ БЕЗГРАНИЧНОЙ И ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ</b>	<b>64</b>
3.1. Общие положения . . . . .	64
3.2. Диффузия от непрерывного линейного источника в безграничной движущейся среде . . . . .	66

3.3.	Диффузия от непрерывного точечного и объемного источника в безграничной движущейся среде . . . . .	69
3.4.	Диффузия от непрерывного высотного линейного источника в полуограниченной движущейся среде . . . . .	72
3.5.	Диффузия от непрерывного точечного и объемного источника в полуограниченной движущейся среде . . . . .	77
3.6.	Нестационарная диффузия от мгновенного точечного источника в безграничной и полуограниченной движущейся среде . . . . .	81
3.7.	Диффузия от непрерывных наземных источников в движущейся среде . . . . .	84
3.8.	Нестационарная диффузия конечного облака примеси в полуограниченной движущейся среде . . . . .	85
<b>4</b>	<b>ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ ПРИМЕСЕЙ В ТЕРМИЧЕСКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ</b>	<b>90</b>
4.1.	Общий характер ветрового потока и приземный слой атмосферы . . . . .	90
4.2.	Уравнения гидротермодинамики для приземного слоя атмосферы . . . . .	95
4.3.	Термическая стратификация и устойчивость атмосферы . . . . .	104
4.4.	Профиль скорости ветра в приземном слое однородной по температуре атмосферы . . . . .	110
4.5.	Анализ баланса турбулентной энергии в приземном слое стратифицированной атмосферы . . . . .	116
4.6.	Профиль скорости ветра в приземном слое термически стратифицированной атмосферы . . . . .	121
4.7.	Профили скорости ветра и температуры при устойчивой стратификации и в условиях, близких к конвекции . . . . .	126
4.8.	Механизм переноса турбулентной энергии по спектру при наличии сил плавучести . . . . .	128
<b>5</b>	<b>ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАССЕЙВАНИЯ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ</b>	<b>133</b>
5.1.	Общие замечания . . . . .	133
5.2.	Статистический способ описания диффузии. Теория Тейлора . . . . .	135
5.3.	Гауссова модель диффузии примеси и формулы Сэттона . . . . .	142

5.4.	Обзор моделей по оценке начального подъема газоаэрозольных выбросов в атмосферу . . . . .	147
5.5.	Классификация категорий устойчивости атмосферы . . . . .	155
5.6.	Определение параметров дисперсий примеси $\sigma_y$ и $\sigma_z$ . . . . .	161
5.7.	Аналитические методы решения уравнения турбулентной диффузии с переменными коэффициентами . . . . .	166
5.8.	Численные методы решения уравнения турбулентной диффузии . . . . .	173
5.9.	Краткий обзор практических способов расчета рассеивания примеси в атмосфере . . . . .	185
<b>6</b>	<b>СТРУЙНО-ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЙВАНИЯ РАДИОАКТИВНЫХ ГАЗОАЭРОЗОЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ</b>	<b>194</b>
6.1.	Физические основы струйно-диффузионной модели . . . . .	194
6.2.	Моделирование рассеивания выбросов примеси на диффузионном участке . . . . .	198
6.3.	Решение диффузионной задачи для распределенного источника . . . . .	204
6.4.	Расчет поля концентрации радиоактивной оседающей примеси при наличии осадков . . . . .	207
6.5.	Учет крупномасштабных угловых флуктуаций направления ветрового потока . . . . .	211
6.6.	Учет категорий устойчивости атмосферы и оценка угловых дисперсий скорости ветра $\sigma_{\theta_y}$ и $\sigma_{\theta_z}$ . . . . .	219
6.7.	Учет нестационарности метеорологических условий и проблема осреднения . . . . .	231
6.8.	Расчетная скорость ветра . . . . .	240
6.9.	Оценка высоты подъема аварийного выброса при штилевых условиях . . . . .	243
6.10.	Адекватность моделей атмосферной диффузии примеси и измерений концентрации . . . . .	254
<b>7</b>	<b>ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПЛАВУЧИЕ СТРУИ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ</b>	<b>256</b>
7.1.	Особенности распространения турбулентных струй в поперечном потоке . . . . .	256
7.2.	Основные интегральные соотношения для струи в поперечном потоке . . . . .	259
7.3.	Приближение пограничного слоя для уравнений струи в поперечном потоке . . . . .	267



7.4.	Основные уравнения для плоской струи в поперечном потоке . . . . .	274
7.5.	Гипотеза турбулентной вязкости и выбор профилей скорости и температуры . . . . .	281
7.6.	Расчет параметров круглой плавучей турбулентной струи в поперечном стратифицированном потоке . . . . .	288
<b>8</b>	<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУЙ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР</b>	<b>311</b>
8.1.	Краткая характеристика состояния вопроса . . . . .	311
8.2.	Постановка задачи о струе в сносящем потоке с целью учета деформации ее поперечного сечения . . . . .	314
8.3.	Использование динамики вихревых структур для описания эволюции площади поперечного сечения струи . . . . .	317
8.4.	Расчет функции поперечного распределения продольной скорости струи . . . . .	320
8.5.	Описание формы поперечного сечения струи с помощью уравнений динамики вихревых нитей . . . . .	322
8.6.	Расчет основных параметров струи и обсуждение результатов численных исследований . . . . .	328
<b>9</b>	<b>РАСSEИВАНИЕ РАДИОАКТИВНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ</b>	<b>340</b>
9.1.	Формулы для расчета полей концентрации и радиоактивности в условиях ровной поверхности для непрерывных и мгновенных выбросов . . . . .	340
9.2.	Учет сложной подстилающей поверхности в расчетах атмосферной диффузии выбросов . . . . .	348
9.3.	Применение метода потенциальных течений . . . . .	353
9.4.	Учет трансформации профиля скорости ветрового потока . . . . .	360
9.5.	Выбросы из низких источников и учет влияния аэродинамических теней . . . . .	363
<b>10</b>	<b>ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ДОЗ РАДИОАКТИВНОГО ОБЛУЧЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ОТ ГАЗОАЭРОЗОЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ</b>	<b>370</b>
10.1.	Радиационные характеристики радионуклидов, содержащихся в выбросах действующих АЭС . . . . .	370

10.2.	Общие положения и регламентирующие уровни эквивалентной дозы ионизирующего излучения . . . . .	374
10.3.	Доза фотонного облучения от радиоактивного конечного облака . . . . .	380
10.4.	Доза фотонного облучения от радионуклидов осевших на почву . . . . .	388
10.5.	Доза от внешнего $\beta$ -излучения радионуклидов . . . . .	394
10.6.	Дозы внутреннего облучения от ингаляционного и перорального путей попадания радионуклидов в организм человека . . . . .	398
10.7.	Индивидуальная доза от попадания радионуклидов по пищевым цепочкам . . . . .	400
10.8.	Расчет индивидуальных доз от выбросов трития и радиоактивного углерода . . . . .	402
10.9.	Коллективная доза при прямом пути облучения и по пищевым цепочкам . . . . .	403
10.10.	Основные подходы к моделированию радиационных аварий и оценке доз облучения . . . . .	404
10.11.	Некоторые аспекты аварии на Чернобыльской АЭС . . . . .	412
10.12.	Способ оценки предельно допустимых радиоактивных выбросов в атмосферу и их нормирование . . . . .	417

## ЛИТЕРАТУРА

425

## СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

### Основные символы и их определения

- $a$  – активность источника, Бк (Ки);
- $a_t$  – коэффициент турбулентной теплопроводности;
- $A_v$  – объемная радиоактивность, Бк/м<sup>3</sup> (Ки/м<sup>3</sup>);
- $A_s$  – поверхностная радиоактивность, Бк/м<sup>2</sup> (Ки/м<sup>2</sup>);
- $\dot{A}_s$  – интенсивность поверхностного загрязнения, Бк/(с·м<sup>2</sup>) (Ки/(с·м<sup>2</sup>));
- $b, b_{01}, b_{02}$  – полуширина зоны смещения струи;
- $b_0$  – полуширина сопла;
- $b^*$  – эффективный радиус эквивалентной струи;
- $c_p, c_v$  – теплоемкости жидкости;
- $B_a$  – дозовый коэффициент внутреннего облучения при вдыхании радионуклидов;
- $B_w$  – дозовый коэффициент внутреннего облучения при попадании радионуклидов с водой;
- $B_{a\beta}$  – дозовый коэффициент внешнего облучения  $\beta$ -частицами;
- $B_{a\gamma}$  – дозовый коэффициент внешнего облучения фотонами от облака;
- $B_{s\gamma}$  – дозовый коэффициент, равный мощности эквивалентной дозы на высоте 1 м от  $\gamma$ -излучения поверхностно-загрязненной почвы;
- $C$  – концентрация вещества или радиоактивности, г/м<sup>3</sup>, Бк (Ки)/м<sup>3</sup>;
- $D$  – диаметр устья трубы, м; коэффициент молекулярной диффузии, м<sup>2</sup>/с; поглощенная доза, Гр (рад);
- $\dot{D}$  – мощность поглощенной дозы, Гр/с (рад/с);
- $f, g, \varphi$  – функции подобия;
- $E_{L,E}$  – лагранжева, эйлерова спектральная функция;
- $\Phi$  – интеграл ошибок;
- $g$  – ускорение силы тяжести;
- $G$  – функция рассеивания примеси, с/м<sup>3</sup>;
- $G_T$  – функция рассеивания непрерывного кратковременного выброса, с/м<sup>3</sup>;

$G_{\Sigma}$	– функция рассеивания непрерывного длительного выброса, $\text{с}/\text{м}^3$ ;
$G_i$	– функция рассеивания мгновенного выброса, $\text{с}/\text{м}^3$ ;
$H$	– эффективная высота источника выброса; эквивалентная доза, Зв (бэр);
$\dot{H}$	– мощность эквивалентной дозы, Зв/с (бэр/с);
$H^c$	– полная ожидаемая доза, Зв (бэр);
$H_z^{max}$	– максимальная высота атмосферного слоя перемешивания примеси;
$H_0$	– геометрическая высота трубы;
$H_3$	– поток тепла у поверхности земли;
$k_0$	– коэффициент экранирования;
$L$	– масштаб длины Монина – Обухова;
$M$	– мощность (интенсивность) непрерывного выброса, Бк/с (Ки/с);
$Pe$	– число Пекле;
$Pr$	– число Прандтля;
$Q$	– количество выброшенной радиоактивности; Бк (Ки);
$Q_i$	– дополнительные источники тепла, вещества;
$r$	– переходный коэффициент, расстояние;
$r_0$	– радиус сопла;
$Re$	– число Рейнольдса;
$Ri, Rf$	– интегральное и динамическое числа Ричардсона;
$\xi, n, s$	– криволинейные координаты;
$S$	– коллективная эквивалентная доза, чел·Зв, (чел·бэр);
$Sc$	– число Шмидта;
$St$	– число Струхала;
$T$	– время, температура;
$T_{1/2}$	– период полураспада радионуклидов, с, сут, год;
$T_b$	– период биологического полувыведения, с, сут, год;
$T_w$	– температура окружающей среды;
$V$	– объем вдыхаемого воздуха или потребляемой воды;
$u, v, w$	– компоненты скорости потока вдоль декартовых осей координат;
$w_g$	– скорость гравитационного осаждения примеси, $\text{м}/\text{с}$ ;

$w_{ef}$	–	скорость выпадения примеси на поверхность, м/с;
$W$	–	средняя скорость ветрового потока;
$\eta_{mn}$	–	вероятность величины и направления скорости ветра, %;
$P_m$	–	вероятность величины скорости ветра, %;
$P_n$	–	повторяемость направлений ветра по румбам розы ветров, %;
$P_l$	–	вероятность категорий устойчивости атмосферы по классификации Паскуилла – Гифффорда, % ;
$\lambda$	–	коэффициент теплопроводности; постоянная радиоактивного распада, $c^{-1}$ ;
$\Lambda$	–	постоянная вымывания примеси осадками, $c^{-1}$ ;
$k_x, k_y, k_z$	–	коэффициенты турбулентной диффузии, $m^2/c$ ;
$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$	–	стандартные отклонения флюктуаций скорости ветра, м;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	–	дисперсионные параметры примеси в соответствующих направлениях, м;
$\sigma_{\theta x}, \sigma_{\theta y}, \sigma_{\theta z}$	–	угловые отклонения флюктуаций направления ветра;
$\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z$	–	дисперсионные параметры примеси в струйно-диффузионной модели, м;
$I$	–	интенсивность осадков, мм/час;
$R_{L,E}$	–	лагранжева, эйлерова корреляционная функция;
$\gamma_a$	–	сухо-адиабатический градиент температуры;
$u, m$	–	параметр сносящего потока;
$x, y, z$	–	декартовы координаты;
$\theta$	–	полярный угол;
$y_{01}, r_{01}$	–	размер потенциального ядра на начальном участке струи;
$\beta$	–	коэффициент объемного расширения;
$\nu_t$	–	кинематический коэффициент турбулентной вязкости;
$\rho$	–	плотность;
$\tau$	–	турбулентное трение;

### Индексы

$0$	–	значение в выходном сечении;
$m$	–	значение на оси;
$w$	–	значение в окружающей среде

**Некоторые множители, приставки и символы  
для образования десятичных единиц**

Множитель	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^2$	$10^1$
Приставка	гига	мега	кило	гекто	дека
Международный символ	G	M	k	h	da
Русский символ	Г	М	к	г	Да
Множитель	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$
Приставка	деци	санти	милли	микро	нано
Международный символ	d	c	m	$\mu$	n
Русский символ	Д	с	м	мк	н

**Характерные соотношения между единицами измерения  
в системе СИ и внесистемными единицами**

Наименование единицы измерения в системе СИ	Наименование внесистемной единицы	Соотношение внесистемных и системных единиц
Беккерель (Бк)	Кюри (Ки)	$1 \text{ Ки} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$
Беккерель на метр кубический (Бк/м <sup>3</sup> )	Кюри на литр (Ки/л)	$1 \text{ Ки/л} = 3.7 \cdot 10^{13} \text{ Бк/м}^3$
Грей (Гр)	Рад (рад)	$1 \text{ рад} = 0.01 \text{ Гр}$
Грей в секунду (Гр/с)	Рад в секунду (рад/с)	$1 \text{ рад/с} = 0.01 \text{ Гр/с}$
Зиверт (Зв)	Бэр (бэр)	$1 \text{ бэр} = 0.01 \text{ Зв}$
Зиверт в секунду (Зв/с)	Бэр в секунду (бэр/с)	$1 \text{ бэр/с} = 0.01 \text{ Зв/с}$
Секунда (с)	год (год)	$1 \text{ год} = 3.16 \cdot 10^7 \text{ с}$

## ВВЕДЕНИЕ

Задача определения химического и радиоактивного загрязнения атмосферного воздуха выбросами промышленных предприятий является одной из основных в проблеме охраны окружающей среды. Воздушный путь поступления радиоактивных веществ в организм человека обусловлен, главным образом, наличием аэрозольных выбросов в атмосферу предприятий с ядерным топливным циклом. В связи с этим для обеспечения безопасности населения необходимо иметь надежную научную основу для прогнозирования процессов рассеивания радиоактивных выбросов в атмосфере с целью оценки последствий их воздействия на человека и окружающую среду.

Авария на Чернобыльской атомной электростанции (Украина, апрель 1986 года) особенно ярко высветила социальное и экономическое значение проблемы радиационной безопасности населения, связанной со строительством новых и эксплуатацией уже действующих предприятий ядерной энергетики. Совершенно очевидно, что в каждом конкретном случае необходимо всестороннее исследование вопросов радиационной безопасности населения и охраны окружающей среды от загрязнения радиоактивными веществами. В силу актуальности этой проблемы ей посвящены многие международные и национальные конгрессы, симпозиумы и конференции. Некоторые аспекты этой проблемы разработаны уже достаточно полно и опубликованы в обширной периодической литературе, а также в ряде книг монографического характера и трудах международных конференций. Характеристика состояния исследований атмосферной диффузии загрязнений имеется в монографиях А. С. Мониной и А. М. Яглома [115], М. Е. Берлянда [15], Н. Л. Бызовой [40], Н. Л. Бызовой, Е. К. Гаргера и В. Н. Иванова [41], а обобщение результатов в области математического моделирования радиоактивного загрязнения атмосферы представлено в отдельных разделах монографий Н. Г. Гусева и В. А. Беляева [70], В. В. Бадяева, Ю. А. Егорова и С. В. Казакова [10], В. Ф. Козлова [91] и специальных изданиях МАГАТЭ [145, 156]. Анализ этих и других литературных источников показывает, что рассмотрение проблемы диффузии примесей в атмосфере с точки зрения прикладных расчетов обычно ограничено так называемой гауссовой моделью диффузии, которая основана на концепции точечного источника выбросов и в свое время была рекомендована международной метрологической организацией для применения в нормативной технической документации и в инженерных прикладных расчетах [110, 145]. Однако в настоящее время различ-

ными исследователями и научными коллективами предложены и другие модели атмосферной диффузии. При этом, вследствие того, что процесс рассеивания примеси в атмосфере зависит от большого числа факторов, степень сложности моделей атмосферной диффузии, используемых в прикладных расчетах полей концентрации, оказывается различной и обычно определяется целями расчетов.

Современный уровень развития науки в области турбулентного теплопереноса, теории плавучих струй в сносимом ветровом потоке и других смежных с ними областях создал предпосылки для построения новых более адекватных моделей процессов рассеивания промышленных выбросов в атмосфере. Существенный прогресс в этом направлении связан с отказом от концепции точечного источника и более полным учетом моделью основных факторов, влияющих на процесс рассеивания примеси, включая объемность источника, струйный и диффузионный участки распространения выбросов, нестационарность метеорологических условий, вероятностный характер состояния устойчивости атмосферы, мелко- и крупномасштабную турбулентность, а также широкое использовании возможностей современной вычислительной техники для оперативного представления результатов расчета в требуемой форме.

В теории диффузии процесс удаления вредных веществ в атмосферу через вентиляционные и дымовые трубы промышленных предприятий принято называть **выбросом**. Поступившие в атмосферу газовые и мелкодисперсные аэрозольные вещества называют **примесью**, а ветровой перенос и диффузию примеси обычно называют **рассеиванием** или **дисперсией** выбросов.

В общем случае при анализе процесса дисперсии радиоактивных выбросов в атмосфере можно выделить четыре основных группы факторов. Во-первых, нужно знать, как загрязнения поступают в атмосферу и каков характер источника загрязнения. Различные загрязнения в виде примеси могут попадать в воздух как от техногенных искусственных источников (тепловые и атомные электростанции), так и от естественных источников (поверхность земли, пожары, вулканы). Причем в зависимости от времени действия источника их подразделяют на непрерывные и мгновенные.

Во-вторых, нужно знать закономерности распространения загрязнений в воздухе при различных начальных и метеорологических условиях в ближней и дальней от источника области, то есть в локальном, региональном и глобальном масштабе. Поскольку загрязнения переносятся ветровым потоком и диффундируют в воздухе благодаря действию турбулентности, то для описания переноса загрязнений ветровым потоком необходимо иметь сведения о турбулентной



структуре поля скоростей и характере термической стратификации атмосферы. Эти характеристики в общем случае зависят как от времени, так и от градиента средней скорости ветра, шероховатости поверхности и термической стратификации атмосферы. Например, при устойчивой стратификации турбулентная диффузия угнетается и загрязнения переносятся ветром, почти не рассеиваясь. В условиях конвекции и неустойчивой стратификации, наоборот, турбулентная диффузия происходит интенсивно.

Для расчета поля концентраций, осредненных за большой промежуток времени, нужно располагать статистическими данными о направлении и величине скорости ветра в данном регионе. В случае необходимости расчетов загрязнения в глобальном масштабе, т.е. в масштабах земного шара, нужно знать кинематику воздушных течений, обусловленных синоптическими процессами, на значительной части земного шара за период порядка одной или нескольких недель.

Третья группа факторов, влияющих на процесс рассеивания радиоактивной примеси, связана с ее собственными свойствами. Газо-аэрозольный выброс в зависимости от температуры может обладать положительной или отрицательной плавучестью. Размер аэрозольных частиц и характер их распределения в воздухе также может дать дополнительную гравитационную составляющую скорости оседания. Необходимо учитывать возможность химических и радиоактивных превращений. Может оказаться существенным взаимодействие примеси с атмосферной влагой. Дождь и снег также приводят к дополнительному вымыванию загрязнений из воздуха и способствуют их выпаданию на земную поверхность.

Четвертая группа факторов относится к условиям взаимодействия загрязнения с поверхностью земли или водной акваторией. Загрязнения могут либо поглощаться граничной поверхностью, либо отражаться от нее. Наиболее вероятны и возможны промежуточные случаи частичного поглощения и отражения. Очевидные осложнения будут создаваться при определении степени шероховатости поверхности и учете сложной орографии, когда, например, высота холмов или строений сопоставима с высотой трубы, которая служит источником выбросов. Для низких источников выбросов существенным является учет области аэродинамической тени.

Теоретические исследования конвективной турбулентной диффузии радиоактивных примесей в атмосфере направлены на анализ указанных выше факторов и на изучение закономерностей рассеивания примеси при наличии сносящего ветрового потока. Поведение и динамика радиоактивных газоаэрозольных выбросов в атмосфере определяют поля концентрации и радиоактивности в воздухе и на поверхно-

сти земли, которые являются важнейшими факторами формирования дозы радиоактивного облучения населения.

Для обеспечения радиационной безопасности населения принятые в ядерной энергетике уровни доз облучения населения, обусловленных газоаэрозольными выбросами, например, атомных электростанций, настолько низки, что в условиях нормальной эксплуатации их очень трудно измерить по сравнению с естественным радиационным фоном. Поэтому оценка загрязнения атмосферного воздуха и почвы расчетным путем на основе гидродинамических моделей рассеивания выбросов газоаэрозольных радионуклидов является одним из основных способов научно обоснованного прогнозирования уровня радиации и доз облучения при нормальных условиях работы энергетического объекта в различных климатических условиях, а также при оценке радиоактивной обстановки в условиях проектных или за-проектных аварий.

Настоящая книга посвящена теории и гидродинамическим моделям турбулентной диффузии в приложении к вопросам локального радиоактивного загрязнения окружающей среды газоаэрозольными выбросами. Одним из основных источников загрязнения внешней среды радиоактивными веществами являются атомные электростанции (АЭС). Учитывая неполноту разработки некоторых вопросов, автор попытался на основе собственных и известных в литературе представлений обобщить существующие результаты в этой области и с единых позиций изложить основы теории конвективной турбулентной диффузии в приложении к моделированию и решению задач турбулентного рассеивания радиоактивных выбросов в атмосфере. Целью настоящей книги является ознакомление специалистов и читателей с современными достижениями в области моделирования рассеивания радиоактивных примесей в атмосфере, а также представление полного изложения развиваемой автором струйно-диффузионной модели для решения задач, связанных с радиоактивным загрязнением и расчетом доз облучения человека.

Значительное внимание в работе уделено теории плавучих турбулентных струй, распространяющихся в сносимом ветровом потоке. Успех в этом направлении позволил отказаться от традиционной концепции точечного источника и предложить новую струйно-диффузионную модель рассеивания примеси в атмосфере из объемных источников с заданными их геометрическими параметрами и начальной скоростью выбросов. Эта модель обладает значительной преемственностью прежних разработок и содержит некоторые новые элементы. Поэтому она рекомендуется как основа по расчету радиоактивного загрязнения атмосферы газоаэрозольными выбросами

предприятий ядерной энергетики.

В заключение необходимо отметить, что хотя современные численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и уровень развития вычислительной техники в принципе позволяют решать полную задачу конвективной турбулентной диффузии численно, однако имеющийся у автора опыт практических расчетов турбулентной атмосферной диффузии показывает, что при численном решении задачи атмосферной диффузии наряду с традиционной проблемой замыкания исходной системы уравнений приходится сталкиваться с разнообразностью как масштабов турбулентности, так и масштабов расчетной области, последние из которых обычно оцениваются не только десятками метров, но и десятками километров, что приводит к необходимости использования больших шагов в разностной сетке и, вследствие этого, к появлению дополнительных трудностей, связанных с адекватностью описания интересующих нас процессов в рамках рассматриваемой модели. Поэтому в практическом отношении предпочтение должно быть отдано численно-аналитическим методам расчета рассеивания примеси, использующим полуэмпирические соотношения типа формул Гаусса, однако модифицированных и дополненных на основе экспериментальных данных и аналитической аппроксимации результатов численного решения уравнения турбулентной диффузии с переменными коэффициентами.

Автор надеется, что представленный в книге материал окажется полезным широкому кругу специалистов, а также студентам соответствующих специальностей.

Автор выражает глубокую благодарность докт. техн. наук проф. Ю. А. Егорову, общение с которым оказало значительное влияние на замысел написания этой книги и ее структуру. Автор также признателен канд. техн. наук Е. А. Иванову за многолетнее сотрудничество и полезное обсуждение многих вопросов струйно-диффузионной модели. Наконец, автор благодарит свою дочь, канд. физ.-мат. наук С. Е. Бруяцкую, участвовавшую в численных расчетах и подготовившую компьютерный набор рукописи монографии.

## Глава 1

# ПРОБЛЕМА ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ РАДИОАКТИВНЫМИ ВЫБРОСАМИ

### 1.1. Общая характеристика атмосферы и выбросов

Атмосфера окружает нашу планету и простирается практически безгранично. Однако основное количество воздуха содержится в слоях непосредственно, примыкающих к земной поверхности. В слое высотой 5 км содержится около 50 % всего воздуха, а в слое до 30 км – 99 %. Вся атмосфера подвержена воздействию тепловой солнечной радиации и вследствие этого температура воздуха в атмосфере неоднородна.

Анализ оценок различных авторов показывает, что около 70 % солнечной радиации достигает поверхности земли, при этом активное получение радиации атмосферой наблюдается в нижнем  $15 \pm 5$ -километровом слое, тогда как поглощение в почву или воду осуществляется в верхнем слое толщиной  $\sim 1$  мм. Это приводит к тому, что верхние слои атмосферы почти не нагреваются, в то время как температура поверхности земли или воды изменяется в больших пределах благодаря колебаниям потоков солнечной радиации в зависимости от облачности, географической широты, времени года или суток.

Изменения температуры деятельного слоя поверхности земли или воды благодаря механизму теплопроводности приводят к образованию тепловых пограничных слоев в воздухе, воде или грунте. Толщина этих слоев зависит от температуропроводности сред, от характера изменений потоков солнечной радиации и ряда других факторов.

По характеру изменения температуры с высотой атмосферу разделяют на пять характерных слоев. Наибольшее значение в проблеме атмосферной диффузии примесей имеет нижний слой атмосферы высотой примерно 11 км, называемый тропосферой. В нем температура с удалением от земной поверхности монотонно падает в среднем на  $0.65^\circ \text{C}$  на каждые 100 м. Если принять на уровне моря температуру  $+15^\circ \text{C}$  (288 К), то на внешней границе тропосферы температура составляет  $-56^\circ \text{C}$  (217 К). Выше этого слоя до высоты примерно 40 км простирается стратосфера, в которой температура с высотой не меняется. В тропосфере содержится около 75 % общего объема воздуха атмосферы.

В атмосферном воздухе постоянно протекают тепловые, гидродинамические, химические, фотохимические, электромагнитные и

другие процессы, которые определяют температуру, давление, скорости движения и химический состав воздушных масс.

Чтобы определить уровень загрязнения, т.е. качество воздуха, необходимо установить присутствие в нем посторонних примесей по отношению к природному химическому составу атмосферного воздуха, который согласно [141] приводится ниже в %:

Азот	78.084	Гелий	$524 \cdot 10^{-6}$
Кислород	20.9476	Криптон	$114 \cdot 10^{-6}$
Пары воды	3 ÷ 4	Водород	$50 \cdot 10^{-6}$
Аргон	0.934	Ксенон	$8.7 \cdot 10^{-6}$
Диоксид углерода	$3.14 \cdot 10^{-2}$	Озон (летом)	$7 \cdot 10^{-6}$
Неон	$1.818 \cdot 10^{-3}$	Озон (зимой)	$2 \cdot 10^{-2}$

Атмосферный воздух никогда не бывает абсолютно чистым. Это обусловлено как производственной деятельностью человека, так и естественными процессами, протекающими в природе (пыльные бури, вулканы, пожары и т.д.). Также источником загрязнения воздуха служит мировой океан. Мельчайшие брызги воды, поднимаясь над поверхностью моря или океана, довольно быстро испаряются, а растворенные в них соли, например кальция, магния, натрия, калия и других веществ, попадают в атмосферу.

Атмосферное загрязнение является глобальным, так как от него страдают не только страны-производители вредных веществ, но и остальные государства из-за переноса канцерогенных веществ на большие расстояния.

Кроме теплового воздействия, солнечная радиация также оказывает постоянное влияние на динамику воздушных потоков. Характер изменения воздушных потоков и температурная стратификация влияют на ее турбулентные характеристики и, следовательно, на процессы турбулентного переноса газоаэрозольного вещества.

Выбросы из вентиляционных труб атомных электростанций и других промышленных источников, попадающие в атмосферу в виде газа и аэрозолей, обычно называют примесью. Если примесь химически активна, т.е. во времени не сохраняется, то ее принято называть неконсервативной. Примером может служить случай радиоактивной примеси или когда происходят физико-химические превращения газоаэрозольного вещества. Распространение выброшенной в атмосферу как консервативной, так и неконсервативной примеси происходит путем ее рассеивания в результате турбулентной диффузии и ветрового переноса. В расчетах атмосферной диффузии примеси различные виды источников выбросов обычно классифицируют в зависимости от их пространственной конфигурации и продолжительности

выброса. В первом случае обычно различают точечные, линейные, плоские и объемные источники. В зависимости от продолжительности выброса их классифицируют как мгновенные, кратковременные и продолжительные.

**Мгновенным** называют выброс, продолжительность которого много меньше времени диффузии. Обычно это залповый или аварийный выброс.

**Кратковременным** называют непрерывный выброс в атмосферу, продолжительность которого сравнима или превосходит время движения примеси от источника до рецептора, а метеорологические условия постоянны.

**Продолжительным** обычно называют непрерывный выброс, за время которого направление ветра и величина его скорости значительно изменяются и, следовательно, расчеты рассеивания примеси в этом случае должны учитывать розу ветров, градации величины скорости ветра и состояние устойчивости атмосферы, связанное с вертикальным градиентом температуры воздуха. При непрерывном истечении примеси в атмосферу образуется струя выброса, которая при наличии сил плавучести постепенно становится свободно восходящим факелом. При штилевых условиях или слабом ветре переменного направления струя поднимается вертикально вверх, постепенно остывая. При нейтральной стратификации атмосферы этот подъем теоретически продолжается бесконечно далеко. Однако если атмосфера стратифицирована, что обычно имеет место, то этот подъем струи ограничивается высотой, на которой имеет место инверсия или скачок температуры в ее вертикальном распределении. В общем случае характер динамики струйного выброса зависит не только от величины этого скачка, но и ряда других факторов. Например, если вертикальный импульс струи мал для преодоления слоя воздуха со скачком температуры, то он как бы запирает струю, образуя своеобразную “крышку”, и тогда примесь распространяется в горизонтальном направлении под этой крышкой в соответствии с существующими в атмосфере горизонтальными перепадами давления. Этот случай наиболее интересен с практической точки зрения, так как именно при этих обстоятельствах будут иметь место максимальные приземные концентрации при идентичных условиях выброса. При частичной или полной проницаемости области скачка температуры струей или облаком (аварийный выброс) примесь будет уходить дальше вверх, и ее концентрация в нижних слоях атмосферы будет меньше. Поэтому теоретический расчет уровня концентрации или удельной объемной активности воздуха, выполненный для условия выброса с “крышкой”, будет учитывать самый неблагоприятный

случай с точки зрения загрязнения атмосферы и радиационной безопасности. В случае наличия сносящего ветрового потока с переменной скоростью по величине и направлению становится очевидной сложность и многогранность процесса рассеивания радиоактивных примесей в атмосфере. В дополнение к этому ветровое движение воздуха в атмосфере обычно носит турбулентный характер.

Источниками возникновения турбулентности в атмосфере являются взаимодействие ветрового потока с поверхностью земли и вертикальные потоки воздуха, обусловленные действием сил плавучести вследствие разности температур воздуха и нагретой поверхности суши или моря. Обычно в атмосфере присутствуют вихри различных масштабов и форм, которые движутся беспорядочным образом, взаимодействуя между собой и с неровностями поверхности земли, распадаясь на более мелкие вихри или образуя более крупные. Горизонтальные размеры атмосферных вихрей могут быть очень большими, достигая десятков и сотен километров (циклоны). Максимальные же вертикальные размеры вихрей в атмосфере обычно много меньше и составляют порядок сотен метров. Поэтому, строго говоря, в конкретной ситуации следует различать случаи крупномасштабной турбулентности, влияющей на глобальный перенос примеси, и мелкомасштабной турбулентности, определяющей процессы смешения струи или облака с окружающей средой.

Выше уже отмечалось, что в случае непрерывного выброса диффузионный факел имеет форму струи. Результатом действия мелкомасштабных вихрей на струю является ее диффузия и увеличение поперечных размеров струи в процессе ее динамики. Средние вихри приводят к колебанию или меандрированию траектории струи со случайной амплитудой и длиной волны. Крупномасштабные вихри в рассматриваемой задаче атмосферной диффузии примеси фактически определяют направление сносящего ветрового потока, т.е. розу ветров. Эти особенности необходимо обязательно учитывать в проблеме прогнозирования загрязнения окружающей среды.

Интенсивность атмосферной диффузии примеси зависит также от реального спектра турбулентных вихрей и размеров струи или облака. Спектр вихрей для каждой географической широты и времени года различный. Он определяется, в основном, характером местности, вертикальным распределением температуры в атмосфере и скоростью ветра. При этом большое значение имеет составляющая вертикального градиента температуры воздуха, так как она определяет характер стратификации атмосферы, что в свою очередь влияет на уровень турбулентности и закономерности процессов перемешивания.

Основная масса примесей, поступающая в атмосферу, по своему составу подразделяется на газообразные, твердые и жидкие вещества. При этом на долю газообразных веществ (оксид углерода, диоксид и другие производные серы, углеводороды, оксиды азота, органические соединения) приходится около 90 %, а на долю твердых (пыль, тяжелые металлы, радиоактивные вещества, минеральные и органические соединения) – около 10 %; масса жидких примесей (серная кислота) мала по сравнению с массой газообразных и твердых. В производственной практике при сжигании основных видов топлива обычно образуются и затем поступают в атмосферу водяной пар и диоксид углерода, которые, вообще говоря, содержатся в атмосфере и в естественных условиях, но до определенной концентрации не оказывают вредного воздействия на человека. Количество химических элементов и их соединений в атмосфере в общем случае огромно, но в настоящей работе мы отметим лишь некоторые, наиболее распространенные и опасные химические элементы.

Среди физико-химических загрязняющих веществ особую роль играют оксиды серы и азота, так как они служат причиной выпадения из атмосферы на земную поверхность так называемых “кислотных дождей”. Процессы, благодаря которым происходит выпадение из атмосферы отдельных ее составляющих, очень сложны и зависят от множества факторов, включая метеорологические условия, осадки, рельеф местности и т. д. Среднее время жизни в атмосфере, например,  $SO_2$ ,  $NO_x$  и важных продуктов их реакций ( $SO_4$ ,  $NO_3$  и др.) составляет от нескольких часов до нескольких недель. За это время вещества могут удалиться от источника выбросов до момента их выпадения на землю как на десятки метров, так и на сотни километров. В практическом отношении выделяют два главных типа атмосферных выпадений: влажные и сухие. Среди загрязняющих токсических веществ наиболее характерными для атмосферы являются следующие.

**Оксид углерода** ( $CO$ ), называемый в быту угарным газом – самая распространенная и наиболее значительная по массе примесь атмосферы. В естественных условиях содержание  $CO$  в атмосфере очень мало. Основная его масса образуется в процессе сжигания ископаемого топлива и при эксплуатации двигателей внутреннего сгорания. Степень воздействия  $CO$  на организм зависит не только от концентрации, но и от времени пребывания в загрязненном  $CO$  воздухе.

**Диоксид серы** ( $SO_2$ ), или сернистый газ – второе по массе вещество, загрязняющее атмосферу. Основным источником наличия в атмосфере является сжигание ископаемого топлива и, в первую



очередь, угля. Диоксид серы в комбинации с твердыми частицами и влагой приводит к заболеванию легких.

**Соединения азота**  $NO$  и  $NO_2$  образуются в процессе горения при высокой температуре. Значительная их часть поступает в атмосферу от двигателей внутреннего сгорания, работающих как на бензине, так и на дизельном топливе. Они образуют фотохимические окислители, которые сильно раздражают и вызывают воспаление глаз.

**Углеводороды** попадают в атмосферу как от естественных (растения), так и от антропогенных (автотранспорт) источников.

**Аэрозоли или твердые примеси** также попадают в атмосферу от естественных и антропогенных источников. Размер (радиус) твердых частиц, наблюдаемых в атмосфере, колеблется в широких пределах: от тысячных и сотых долей до нескольких десятков микрометров. В зависимости от размера аэрозольные частицы делят на три класса: мелкие или микроскопические (тонкодисперсные) с радиусом  $r < 0.1$  мкм, средние с  $r = 0.1 \div 1$  мкм и крупные с  $r > 1$  мкм. Среди тонкодисперсных аэрозолей выделяют группу частиц, обладающих гигроскопическими свойствами. Эти частицы называют ядрами конденсации.

Общее число загрязняющих атмосферу веществ исчисляется несколькими сотнями. Вклад антропогенных выбросов в общий баланс аэрозоля в атмосфере существенен для всех его составляющих и имеет тенденцию со временем увеличиваться [52]. Одним из основных источников радиоактивного загрязнения атмосферы служат предприятия атомной промышленности, выбросы которых содержат радиоактивные химические элементы. Борьба с радиоактивным загрязнением окружающей среды на данном этапе развития науки может носить лишь предупредительный характер, поскольку пока нет способов биологического разложения или других механизмов, позволяющих нейтрализовать этот вид загрязнения окружающей среды. Наибольшую опасность представляют радиоактивные вещества с большим периодом полураспада. Наиболее характерны и опасны  $^{90}Sr$  и  $^{137}Cs$ , которые образуются в реакторах АЭС, при ядерных взрывах в атмосфере и содержатся в выбросах предприятий атомной промышленности. Благодаря химическому сходству с кальцием,  $^{90}Sr$  легко проникает в костную ткань позвоночных, а  $^{137}Cs$  накапливается в мышечных тканях, замещая калий.

С точки зрения влияния радиоактивности на живой организм следует отметить, что радиоактивное излучение:

- ослабляет облученный организм, снижает его иммунитет, сопротивляемость к инфекциям, замедляет рост;

- уменьшает продолжительность жизни, способствует временной или полной стерилизации;
- поражает гены, последствия чего проявляются во втором и третьем поколениях.

Тяжесть последствий облучения зависит от количества поглощенной организмом энергии, обычно называемой дозой облучения. Наиболее серьезное загрязнение окружающей среды связано также с работой заводов по обогащению и переработке атомного сырья. Хранение отходов атомной энергетики является наиболее острой проблемой современности. И хотя теоретически возможно создание атомных электростанций и заводов с практически нулевым выбросом радиоактивных веществ, однако экономически это пока недостижимо.

Все загрязняющие атмосферный воздух вещества в большей или меньшей степени оказывают отрицательное влияние на здоровье человека. Эти вещества попадают в организм человека преимущественно через систему дыхания и при приеме пищи. Органы дыхания страдают от загрязнения непосредственно, поскольку около 50 % частиц примеси с радиусом  $0.01 \div 0.1$  мкм, проникающих в легкие, осаждаются в них.

В связи с тем, что система воздушных течений в атмосфере достаточно сложная и носит глобальный характер, присутствие радиоактивной примеси в атмосфере представляет большую опасность для населения не только в регионе источника выбросов, но и на всем земном шаре. Обычно в метеорологии выделяют движение мезосиноптического и глобального масштаба. Под влиянием турбулентного перемешивания и вертикальных движений происходит перенос радиоактивной примеси из одних слоев атмосферы в другие. Средняя продолжительность пребывания пассивной неосаждающейся (легкой) примеси составляет около 2 лет в стратосфере,  $1 \div 4$  месяца в верхней тропосфере и  $6 \div 10$  суток в нижней тропосфере [52]. При таком времени существования примеси успевают распространиться на многие тысячи километров от тех мест, где они поступили в атмосферу. При средней скорости порядка  $30 \div 35$  м/с западных ветровых потоков, наблюдаемых в верхней тропосфере и нижней стратосфере умеренных широт, аэрозоль успевает обогнуть земной шар за  $10 \div 12$  суток. Скорость движения воздуха в меридиональном направлении значительно меньше зональной скорости.

В глобальном плане радиоактивные примеси поступают в атмосферу из трех основных источников и соответственно подразделяются на три большие группы. В первую входят радиоактивные элементы земной коры и их дочерние продукты деления. Вторую

группу составляют космогенные изотопы, образующиеся при взаимодействии атомов воздуха с космическими излучениями. Третью группу составляют продукты ядерных взрывов и отходы предприятий атомной промышленности. В 50-х и начале 60-х годов в связи с проведением массовых испытаний ядерного оружия радиоактивность атмосферы значительно увеличилась. Несмотря на то, что в 1963 г. испытания оружия в атмосфере и космосе были запрещены, некоторые страны (Китай, Франция) к Конвенции не присоединились и продолжали испытания ядерного оружия. В дальнейшем бурное развитие атомной энергетики сделало проблему радиоактивного загрязнения атмосферы еще более актуальной. А происшедшая в апреле 1986 г. авария на Чернобыльской АЭС дала новый импульс этому научному направлению, и ученые всего мира объединили свои усилия с целью решения проблемы безопасности эксплуатации объектов атомной энергетики и создания более надежных систем защиты в случае аварийных ситуаций.

## 1.2. Краткие сведения о радионуклидах

В окружающей нас природной среде всегда имеется естественная радиоактивность. Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение неустойчивого атомного ядра – радиоактивного нуклида – в другой нуклид, которое сопровождается испусканием ионизирующего излучения.

В 1945 году после начала испытаний ядерного оружия и широкого развития промышленного получения делящихся материалов и радиоактивных нуклидов в окружающую среду стали поступать радиоактивные вещества техногенного происхождения, главным образом продукты деления урана и плутония. Состав искусственных нуклидов, попадающих в атмосферу и океан, определяется в основном технологическим циклом деления ядерного топлива. В большинстве случаев процесс деления сопровождается образованием так называемых радиоактивных цепочек [71]. В конечном счете радиоактивные превращения заканчиваются стабильным нуклидом. В зависимости от схемы распада ядра радиоактивные цепочки могут быть простыми (линейными) и сложными (с ветвлениями). Доля превращения материнского радионуклида в дочерние характеризуется коэффициентом ветвления.

Физическим характеристикам радионуклидов посвящена обширная специальная литература, где подробно описываются типы распада радионуклидов, абсолютные или относительные выходы излучения, сопровождающие распад, а также другие характеристики [70].

Все известные радиоактивные нуклиды объединены в изобариче-

ские цепочки с массовыми числами по  $A = 166$ . Постоянная распада  $\lambda = 0.693T_{1/2}$ , где  $T_{1/2}$  – период радиоактивного полураспада. Экспериментально установлено, что число радиоактивных атомов данного радионуклида уменьшается со временем по экспоненциальному закону

$$N(t) = N(0) \exp(-\lambda t),$$

где  $N(0)$  – число атомов в начальный момент времени. Поэтому уравнения баланса нуклидов в радиоактивной линейной цепочке представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = -\lambda_i N_i(t) + \lambda_{i-1} N_{i-1}(t),$$

где  $N_1$  – число ядер материнского нуклида;  $N_i$  ( $i \geq 2$ ) – число ядер дочернего нуклида.

Активность источника  $a$  определяется как произведение постоянной распада  $\lambda$  на число радиоактивных ядер в источнике  $N$ , т. е.

$$a = \lambda N.$$

В системе СИ единицей активности является беккерель: 1 Бк = 1 распад в секунду. Во внесистемных единицах активность выражается в кюри: 1 Ки =  $3.7 \cdot 10^{10}$  Бк. Если  $N$  – число ядер в 1 г вещества, т. е.  $N = N_0/A$  ядер/г, где  $N_0 \approx 6 \cdot 10^{23}$  – число Авогадро;  $A$  – массовое число, то говорят об удельной активности вещества  $a_m$  (Бк/г). Если  $N$  – число ядер в единице объема, например воздуха, т. е.  $N = \rho N_0/A$  (где  $\rho$  – плотность в г/м<sup>3</sup>), то удобнее иметь дело с объемной активностью  $A_v$  (Бк/м<sup>3</sup>).

Существуют следующие типы радиоактивных превращений нуклидов (неконсервативность примеси):  $\beta_-$ -распад (испускание электрона),  $\beta_+$ -распад (испускание позитрона),  $\alpha$ -распад (испускание ядра  ${}^4_2\text{He}$ ), электронный захват и спонтанное деление. Некоторые нуклиды имеют возбужденное состояние с большим периодом полураспада. Подавляющее большинство нейтроноизбыточных радионуклидов, распадающихся путем  $\beta_-$ -перехода от массового числа  $A = 72$  до  $A = 166$ , образуется на реакторах как продукты деления тяжелых ядер или захвата нейтронов. Характерными в рассматриваемых здесь ситуациях являются также инертные радиоактивные газы: продукты активации – изотопы аргона; продукты деления – изотопы криптона и ксенона. Тритий ( ${}^3\text{H}$ ) и изотопы йода могут находиться как в газовой форме, так и в форме органических соединений. Обширный материал по свойствам радионуклидов можно найти в соответствующих отечественных и зарубежных справочных изданиях.

Табл. 1.1. Количество  $^{90}\text{Sr}$  и  $^{137}\text{Cs}$ , образовавшееся при испытаниях ядерного оружия в атмосфере (из докладов комитета ООН по атомной радиации, 1964) [52]

Годы испытаний	Мощность взрывов, Мг (в трот. экв.)	Количество, $10^{16}$ Бк	
		$^{90}\text{Sr}$	$^{137}\text{Cs}$
1945–1951	0.02	0.0075	0.0127
1952–1954	1.0	0.37	0.646
1955–1956	5.6	2.1	3.55
1957–1958	31.0	11.7	19.7
1959–1960	—	—	—
1961–1962	101.0	38.0	64.5
Всего	138.62	52.18	88.41

По данным, приведенным в [52], в период 1948–1962 гг. в мире произведено около 450 взрывов атомных бомб, по мощности которых было приближенно оценено количество наиболее опасных ( $^{90}\text{Sr}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ) радионуклидов, оказавшихся в атмосфере в виде аэрозолей. Эти оценки приведены в табл. 1.1. Суммарное количество  $^{137}\text{Cs}$ , выброшенное в стратосферу в начале 1981 года, по оценке А. А. Моисеева (1985) составило  $96 \cdot 10^{16}$  Бк [52].

Радиоактивная пыль и аэрозоли в процессе циркуляции воздушных масс распространяются на обширные территории и выпадают на поверхность земли. Наиболее опасным радионуклидом из непрореагировавших остатков ядерных зарядов является плутоний  $^{239}\text{Pu}$  ( $T_{1/2} = 24.4 \cdot 10^3$  лет), очень ядовитый как химическое вещество. По мере распада продуктов деления  $^{90}\text{Sr}$  и  $^{137}\text{Cs}$ , он становится основным компонентом загрязнения. К моменту моратория атмосферных испытаний ядерного оружия (1963) активность  $^{239}\text{Pu}$  в окружающей среде составила  $2.5 \cdot 10^{16}$  Бк. Приблизительно половина из них к 1972 году выпала в районах испытаний [52].

В процессе эксплуатации в силу технологических особенностей ядерные реакторы являются генераторами огромного количества искусственных радионуклидов, основные из которых – продукты деления и актиноиды. Согласно [130] в ядерных реакторах генерируется до 600 радионуклидов с массовыми числами от 72 до 166 и около 60 – актиноидов трансурановых и трансплутониевых элементов.

В результате взаимодействия нейтронов со стабильными ядрами систем реактора и теплоносителя возникают новые радионуклиды. Особо важное значение имеет так называемая собственная и кор-

Табл. 1.2. Основные характеристики серийных реакторов [70]

Характеристики	ВВЭР-440	ВВЭР-1000	РБМК-1000
Тепл. мощность, МВт (т)	1375	3000	3200
Электр. мощность, МВт (эл)	440	1000	1000
Загрузка урана, т	41.5	66	192
Уд. мощность, МВт (т)/тU	33	45.5	16.7
Обогащение топлива 235 U, %	3.6	4.4	2.0
Средняя глубина выгор., МВт(т)-сут/кг	30	40	22.3

Табл. 1.3. Характерные параметры АЭС, принятые в расчетах радиационных характеристик облученного ядерного топлива [130]

Параметр АЭС	ВВЭР-440	ВВЭР-1000	РБМК-1000
Средняя глубина выгорания	29.75	40.48	24.9
Удельная мощность	32.7	40.2	16.7
Загрузка ураном, т	42	70	192
1-ая компания, $T_1$ , сут	327	305.9	непрерывные
1-ая выдержка, $t_1$ , сут	38	48	перезагрузка
2-ая компания, $T_2$ , сут	327	305.9	ки без
2-ая выдержка, $t_2$ , сут	38	48	останова
3-ая компания, $T_3$ , сут	327	305.9	останова
Полная компания, $T$ , годы	$\sim 3$	$\sim 3$	$\sim 3$

розионная активность теплоносителя и наведенная активность внутрикорпусных устройств защиты и воздушного межреакторного пространства.

Радионуклидный состав и другие радиационные характеристики продуктов деления и актиноидов в значительной степени зависят от типа реактора и других его особенностей. В табл. 1.2 приведены основные характеристики водо-водяных энергетических реакторов ВВЭР и уранграфитовых реакторов РБМК, эксплуатируемых в бывшем СССР. В табл. 1.3 приведены некоторые характерные параметры АЭС [70].

Большую роль в формировании радиационной обстановки в ре-

гионе АЭС играют инертные радиоактивные газы (ИРГ) и изотопы йода. В целом в состав радионуклидов осколочного происхождения входят: 18 изотопов криптона, 15 изотопов ксенона и 20 изотопов йода [70]. Однако многие из них имеют или очень малый период полураспада ( $T_{1/2} \leq 1$  мин), или вносят пренебрежимо малый вклад в суммарную активность радионуклидов данной группы. Важнейшими с точки зрения радиационной безопасности являются изотопы  $Kr$ ,  $Xe$  и  $I$ , которые накапливаются в серийных реакторах. Другую важную группу долгоживущих продуктов деления представляют радионуклиды  $^{89}Sr$ ,  $^{90}Sr$ ,  $^{134}Cs$ ,  $^{137}Cs$ , а также  $^{95}Zr$ ,  $^{95}Nb$ ,  $^{144}Ce$ ,  $^{144}Pr$ .

Указанные радионуклиды и ряд других образуются в теплоделяющих элементах (ТВЭлах), которые облицованы оболочками из сплава циркония с ниобием, и их поступление во внешнюю среду на АЭС возможно лишь при частичной (нормальная эксплуатация) или полной (аварийная ситуация) разгерметизации этих оболочек.

В системе теплоносителя кроме продуктов деления накапливаются радионуклиды неосколочного происхождения. К ним относятся радионуклиды, образующиеся при активации ядер собственно теплоносителя и межреакторного воздушного пространства, а также активированные ядра продуктов коррозии.

При нормальной эксплуатации реакторов, охлаждаемых водой, радиационная обстановка в районе размещения АЭС формируется в основном выбросами ИРГ (изотопов  $Ar$ ,  $Kr$ ,  $Xe$ )  $^{131}I$ , других продуктов деления ( $^{89}Sr$ ,  $^{90}Sr$ ,  $^{134}Cs$ ,  $^{137}Cs$ ), а также продуктов коррозии  $^{58}Co$ ,  $^{60}Co$ ,  $^{51}Cr$ ,  $^{54}Mn$  и т. д.

Для реакторов на быстрых нейтронах с натриевым теплоносителем основными источниками загрязнения окружающей среды являются  $^{22}Na$ ,  $^{24}Na$  и  $^{41}Ar$ . В действительности спектр радионуклидов, выбрасываемых в атмосферу реакторами и другими предприятиями ядерного топливного цикла, очень широк и разнообразен. Поэтому в каждом конкретном случае требуется специальное экспериментальное исследование.

Наиболее полные сведения о выбросах действующих АЭС в западных странах имеются в [86], а о выбросах российских АЭС – в [38]. В приведенных там обобщенных данных при сопоставлении уровней выбросов тех и других АЭС необходимо учитывать типы реакторов и возможность разнообразия в методах отбора, измерения и обработки проб, а также полноту регистрации всех фракций изотопов йода.

Из вышеизложенного следует, что современные атомные реакторы, обладающие большой мощностью (1000 кВт), хотя и имеют

высокую безопасность и надежную систему защиты, тем не менее даже в условиях нормальной эксплуатации они содержат огромное количество радиоактивных веществ. Поэтому любой случайный (аварийный) выброс радиоактивных веществ в окружающую среду из такого реактора может представлять большую потенциальную опасность для населения, а также животного и растительного мира. Степень этой опасности определяется дозой радиации, полученной человеческим организмом от радиоактивного облака, а также от нуклидов, осевших на почву, и радиоактивных веществ, попавших внутрь человеческого организма вследствие вдыхания загрязненного воздуха или по пищевой цепочке.

Определяющую роль в процессах рассеивания в атмосфере и осадения радиоактивных веществ играют метеорологические факторы. Степень опасности каждой конкретной аварии зависит от метеорологической обстановки в данный момент, а потенциальная опасность от непрерывных выбросов в атмосферу радиоактивных веществ зависит от средних метеорологических условий данного региона и должна определяться на основе учета процессов переноса и диффузии радиоактивной примеси в данных конкретных климатических условиях с учетом термического состояния атмосферы.

Основное отличие воздействия на живой организм радиоактивных веществ от химических состоит в том, что химические вещества воздействуют непосредственно и пропорционально поступившему в организм их количеству, а радиоактивные вещества оказывают дополнительное воздействие вследствие ионизирующего излучения как внутренне, так и дистанционно.

Воздействие ионизирующего излучения на организм достаточно хорошо изучено, и допустимые выбросы радиоактивных веществ оцениваются с учетом внешнего и внутреннего облучения для всех переходов радионуклидов по основным биологическим и пищевым цепочкам с учетом накопления дозы облучения со временем.

### **1.3. Основные подходы к математическому описанию турбулентной диффузии**

Рассеивание примеси в атмосфере определяется различными механизмами, начиная от молекулярного переноса, затем благодаря наличию мелко- и крупномасштабной турбулентности и кончая переносом и перемешиванием в глобальном синоптическом масштабе. Последнее особенно касается горизонтального рассеивания. В случае вертикального переноса влияние крупномасштабных вихревых структур сказывается слабее вследствие ограничения области пере-



носа поверхностью Земли.

Процесс рассеивания примеси в турбулентной среде под влиянием мелкомасштабных турбулентных пульсаций скорости представляет собой по существу турбулентную диффузию. Рассеивание же примеси крупномасштабными вихревыми образованиями представляет собой ее конвективный перенос. Масштабы влияния источников выбросов условно подразделяют на три класса:

- локальные масштабы – в пределах десятков километров;
- региональные масштабы – от десятков до сотен километров;
- глобальные масштабы – от сотен до тысяч километров.

В соответствии с этой модели атмосферной диффузии классифицируют как локальные, региональные и глобальные.

Математическое описание движения жидкости или газа в общем случае может проводиться с помощью Эйлера и Лагранжева способа, хорошо известных в классической гидромеханике. При описании процесса рассеивания примеси в атмосфере используются оба эти способа. Преимущества каждого из них зависят от постановки задачи и целей расчета. Лагранжев способ описания приводит к широкому использованию результатов статистической теории турбулентности. Эйлеров способ описания связан с использованием полуэмпирической теории турбулентности. Рассмотрение проблемы атмосферной диффузии в переменных Лагранжа было начато Дж. Тейлором [222], а затем разрабатывалось рядом других авторов, включая Дж. Бэтчелора [158], А. С. Моница [113, 115], А. М. Обухова [120], И. О. Хинце [148] и других.

В прикладном плане этот подход подробно обсуждается в работах Н. Л. Бызовой, Е. К. Гаргера, В. Н. Иванова [40, 41]. Прикладные расчеты рассеивания примеси в атмосфере при лагранжевом способе описания процесса диффузии наряду со средними скоростями переноса жидких частиц и дисперсиями компонент скорости требуют знания лагранжевых корреляционных функций компонент пульсационных скоростей или их интегральных масштабов. Измерение этих характеристик в атмосфере весьма трудоемко и затруднительно. Эйлеровы же характеристики измерить значительно проще. Поэтому в практическом отношении эйлеров способ описания атмосферной диффузии оказывается предпочтительным.

Но если будет установлена связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками, то они становятся почти равнозначными. Установление связей между характеристиками турбулентности в координатах Эйлера и Лагранжа подробно анализируется в работе [41].

Там же значительное внимание уделено зависимости лагранжевых характеристик от характера устойчивости атмосферы. Несмотря на то, что между лагранжевым и эйлеровым способом описания есть определенная связь, однако возможности получения практических результатов у них различны. Некоторые вопросы поддаются анализу и рассмотрению лишь на основе одного из них.

С точки зрения практического применения возможность описания процессов атмосферной диффузии с двух различных позиций оказывается весьма полезной. В некоторых случаях удобно применение комбинации лагранжева и эйлерова описания.

Рассмотрение проблемы атмосферной диффузии примеси в переменных Эйлера приводит к решению уравнения турбулентной диффузии с использованием многочисленных полуэмпирических способов получения замкнутой системы уравнений, описывающих перенос и диффузию примеси в турбулентной движущейся среде. Этому подходу также посвящена обширная литература [15, 27, 115]. Ниже, в основном, будет использоваться Эйлеров подход к описанию процессов атмосферной диффузии в локальном масштабе.

#### **1.4. Введение в теорию диффузии. Общие понятия и определения**

В интересующем нас классе задач теории атмосферной конвективной турбулентной диффузии основная проблема состоит в установлении закономерностей рассеивания выбросов в окружающей среде и связанной с ней оценкой уменьшения локальных концентраций загрязняющих веществ в зависимости от расстояния до источника выбросов под воздействием ветрового потока, неконсервативности примеси, гравитационного осаждения и вымывания осадками. Наряду с задачами рассеивания газоаэрозольных выбросов в атмосфере из труб промышленных предприятий и энергетических объектов большой интерес представляют также задачи о рассеивании ядовитых газов от низких или наземных источников при различных метеорологических условиях, которые образуются, при разрыве каких-либо трубопроводов, искусственных контролируемых источников веществ, применяемых, например, в период войны с использованием химических отравляющих веществ, и т. д.

Если время выброса вещества много меньше времени диффузии, то такие источники называют мгновенными или залповыми. Хорошим примером мгновенного источника служит воздушный взрыв снаряда, ракеты, самолета. Характерным параметром мгновенного источника является масса вещества или его активности  $Q$ , выброшен-

ная в атмосферу, выражающаяся в граммах (тоннах) или в беккерелях (кюри). Когда источник непрерывный, т. е. вещество постоянно возникает в точке, как в случае выбросов из труб промышленных предприятий, то характерным параметром такого непрерывного источника является его мощность  $M$  или интенсивность, выраженная, например, в граммах (беккерелях) в секунду или тоннах (кюри) в год. Мощность точечного источника, обозначаемая через  $M$ , имеет размерность грамм в секунду (г/с), кюри в секунду (Ки/с) или тонна в год (т/г). Линейный источник состоит из ряда точечных источников, непрерывно расположенных на линии, перпендикулярной направлению среднего ветра. Его мощность, обозначаемая через  $\overline{M}$ , представляет собой количество вещества, которое поступает в атмосферу с единицы длины источника в единицу времени. Поэтому  $\overline{M}$  имеет размерность г/с·м. Мощность плоского или площадного источника, обозначаемая через  $\overline{\overline{M}}$ , характерна для задач об испарении, например, с поверхности водоемов и имеет размерность г/с·м<sup>2</sup>.

В силу большой практической значимости изучению молекулярной и конвективной турбулентной диффузии посвящена достаточно обширная литература. Помимо огромного количества журнальных статей в этой области широко известны монографии О. Г. Сэттона [138], Н. Л. Бызовой, Е. К. Гаргера, В. Н. Иванова [41], Ф. Паскуилла [208] М. Е. Берлянда [15], Р. В. Озмидова [122] и отдельные главы монографий Бай-Ши-И [11], И. О. Хинце [148], А. С. Мони́на, А. М. Яглома [115], Е. В. Бруяцкого [27] и других. Однако в настоящее время в силу большой актуальности вопросов загрязнения окружающей среды промышленными и радиоактивными газоаэрозольными выбросами остро назрела необходимость обобщения наиболее принципиальных вопросов в теории конвективной диффузии от искусственных источников.

В большинстве случаев различными исследователями рассматривается так называемая пассивная примесь, когда мелкодисперсные частицы не оказывают влияния на турбулентность и поле осредненных скоростей жидкости, и эти частицы практически двигаются в потоке со скоростями, равными скоростям жидкости.

Как правило, пассивная примесь представляет собой жидкие, твердые и газообразные добавки в виде мелкодисперсного вещества, которые характеризуются полем концентраций. Рассмотрение интересующих нас проблем переноса вещества в воздухе (или жидкости) начнем с изучения поведения жидкости или газа, содержащей пассивную примесь некоторого вещества. В практическом отношении нас будут интересовать газоаэрозольные выбросы, которые в общем случае будут содержать несколько ингредиентов, в том числе и ра-

дионуклиды. Состав газоаэрозоля будем характеризовать объемной концентрацией, которую определим как число грамм или активности вещества, содержащегося в единице объема газоаэрозольной смеси. Концентрацию, определенную таким образом, будем обозначать через  $C$ . В случае радиоактивных газоаэрозолей удобно вместо концентрации рассматривать объемную активность  $A_v$ , выраженную в кюри на метр кубический (Ки/м<sup>3</sup>), а плотность выпадений на почву будем обозначать через  $A_s$  (Ки/км<sup>2</sup>).

В условиях равновесия в среде, содержащей взвешенные газоаэрозольные частицы, выполняются условия термодинамического равновесия:

- отсутствие макроскопического движения;
- постоянство температур  $T$  и давления  $p$ ;
- постоянство парциального (химического) потенциала  $\mu = \mu(T, p, C)$ .

В дальнейшем, пока не будет специально оговорено, будем считать, что нарушение равновесия в среде связано с изменением концентрации от точки к точке и с наличием в ней макроскопического (конвективного) движения. На данном этапе рассмотрения температуру смеси будем считать постоянной, а давление хотя и будет считаться переменным, однако градиент давления будет предполагаться достаточно малым.

Таким образом, перенос вещества в движущейся среде пусть будет обусловлен лишь двумя различными механизмами. Во-первых, газоаэрозольные частицы, взвешенные, например, в воздушной среде, увлекаются ею и переносятся вместе с ней; во-вторых, при наличии разности концентраций в среде возникает молекулярная или турбулентная диффузия. Совокупность обоих процессов именуется конвективной диффузией вещества в рассматриваемой воздушной или жидкой среде. Макроскопическое движение смеси будет определяться действующими на нее объемными и поверхностными силами. Оно будет описываться системой уравнений гидротермодинамики, т. е. уравнениями неразрывности и изменения количества движения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial x_j} = 0,$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right) = \rho F_i + \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{v'_i v'_k} \right),$$

а если среда стратифицирована, т.е. неоднородна по температуре или плотности, то к рассмотрению дополнительно привлекается уравнение переноса тепла (энергии) [27]

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial q_{nk}}{\partial x_k} + \frac{E}{\rho_0 c_p} + \frac{Q}{c_p}, \quad q_{nk} = a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - v'_k \bar{\theta}'.$$

Перенос массы некоторых мелкодисперсных частиц, находящихся в изотропном неподвижном пространстве во взвешенном состоянии (в воздухе или воде), обусловлен перемещением жидких объемов, из которых состоит рассматриваемая сплошная среда. В общем случае это перемещение или диффузия может иметь молекулярный (ламинарный) или турбулентный характер. Если рассматриваемая мелкодисперсная примесь распределена по объему неравномерно, то вследствие различия плотности в локальных областях будет наблюдаться перенос массы от областей с большей концентрацией вещества в области с меньшей концентрацией вещества. Этот перенос описывается известным уравнением диффузии.

Рассмотрим изотропное пространство, распределение вещества в котором, т.е. концентрация, в момент времени  $t$  дается выражением

$$C(x, y, z, t) = f(x, y, z, t).$$

Представим в рассматриваемом пространстве поверхность такую, что концентрация в момент  $t$  в каждой ее точке постоянна и равна  $C_1$ . Такие поверхности будем называть изоплетами. Они условно разделяют объемы среды, имеющие концентрацию больше, чем  $C_1$ , от объемов с меньшей концентрацией. Теоретически число таких поверхностей может быть бесконечно большим в зависимости от принятой разности между уровнями концентрации на соседних изоплетах. Эти воображаемые поверхности разделяют пространство на тонкие слои, и перенос массы от одного слоя к другому, обусловленный механизмом диффузии, будет направлен по нормали к изоплетам, так как перенос вдоль поверхности физически невозможен.

Приведенные рассуждения приводят к формулировке основной гипотезы математической теории диффузии, состоящей в том, что поток вещества через любую изоповерхность изнутри наружу, рассчитанный на единицу площади в единицу времени, равен

$$-D \partial C / \partial n,$$

где  $C$  – уровень концентрации на поверхности;  $D$  – коэффициент диффузии;  $\partial / \partial n$  обозначает дифференцирование вдоль внешней нормали к поверхности.

Если в рассматриваемой сплошной среде или на ее границе происходит некоторое превращение, в котором участвуют взвешенные частицы или имеется автономный источник вещества, то концентрация может изменяться от точки к точке и зависеть от времени.

## 1.5. Дифференциальное уравнение конвективной диффузии

Выведем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять концентрация  $C(x, y, z, t)$  в движущейся среде. Движение среды будем считать стационарным и ламинарным, среду – несжимаемой. Обобщение на турбулентный режим рассмотрим позднее.

Наличие переменной от точки к точке концентрации обуславливает нарушение условия равновесия и появление в среде диффузионного потока вещества. Если возникающие градиенты концентрации малы, то можно считать малым и градиенты парциального потенциала. Тогда для диффузионного потока  $\vec{J}_d$  (числа частиц, проходящих за 1 с через единицу площади воображаемой плоскости) можно написать:

$$\vec{J}_d = -D \text{grad } C = -D \frac{\partial C}{\partial x_k},$$

где  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии, зависящий в общем случае от концентрации  $C$  и температуры  $T$ . Знак минус указывает, что поток вещества направлен в сторону уменьшения концентрации вещества.

Если взвешенное вещество находится в движущейся со скоростью  $\vec{v}$  среде, то последняя увлекает его в своем движении. При этом наряду с диффузионным потоком  $\vec{J}_d$  через 1 см<sup>2</sup> воображаемой плоскости за 1 с переносится поток вещества  $\vec{J}_k = C\vec{v}$ , движущийся вместе с объемом сплошной среды  $V$ , проходящим через эту площадку за 1 с. Таким образом, полный поток вещества складывается из конвективного и диффузионного потоков

$$\vec{J} = \vec{J}_k + \vec{J}_d = C\vec{v} - D \text{grad } C.$$

Если среда характеризуется неизотермическими условиями или на нее действуют внешние силовые поля, как например гравитационное поле, то в полный поток будут входить дополнительные слагаемые, связанные с архимедовой силой, которые мы пока не учитываем.

Выделим мысленно в рассматриваемой сплошной среде объем  $V$  и найдем баланс числа частиц, входящих и выходящих из него в еди-

ницу времени. Число частиц, проходящих через поверхность  $s$  в течение секунды, очевидно, равно

$$N = - \iint_s \vec{J} ds,$$

где интеграл берется по поверхности  $s$ , окружающей объем  $V$ , за положительное направление вектора внешней нормали выбрано направление от поверхности наружу.

Если  $\partial C / \partial t$  равно изменению числа частиц в единице объема за 1 с, то изменение числа частиц в объеме  $V$  равно

$$\iiint_V \frac{\partial C}{\partial t} dV.$$

Приравнивая изменение числа частиц в объеме  $V$  к числу частиц, в него приходящих, имеем

$$\iiint_V \frac{\partial C}{\partial t} dV = - \iint_s \vec{J} ds.$$

Преобразуя поверхностный интеграл правой части уравнения по формуле Остроградского – Гаусса, имеем:

$$\iiint_V \frac{\partial C}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} dV. \quad (1.1)$$

Ввиду произвольности объема  $V$  получаем

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{J}, \quad (1.2)$$

или, используя выражения для  $\vec{J}$ , находим:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C \vec{v}). \quad (1.3)$$

Если пренебречь зависимостью коэффициента диффузии от концентрации и считать его постоянным, то можно записать:

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) = D \operatorname{div} \operatorname{grad} C = D \Delta C,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Далее используем известную формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}(C \vec{v}) = (\vec{v} \operatorname{grad}) C + C \operatorname{div} \vec{v}.$$

В силу несжимаемости жидкости  $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ . С учетом сказанного окончательно уравнение для концентрации принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \operatorname{grad})C = D\Delta C. \quad (1.4)$$

Это уравнение и является общим уравнением конвективной диффузии в ламинарно движущейся среде. В прямоугольной декартовой системе координат оно запишется следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (1.5)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – соответствующие компоненты скорости движущейся сплошной среды, которые в общем случае являются функциями координат и должны быть определены из гидродинамической задачи. Нетрудно видеть, что с математической точки зрения уравнение конвективной диффузии представляет собой уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами.

Уравнение конвективной диффузии существенно упрощается, если концентрацию  $C$  можно считать не зависящей от времени. В этом случае  $\partial C/\partial t = 0$  и уравнение (1.4) принимает вид

$$(\vec{v} \operatorname{grad})C = D\Delta C. \quad (1.6)$$

Другое существенное упрощение уравнения (1.4) имеет место в случае неподвижной среды, когда  $\vec{v} = 0$  и уравнение (1.4) вырождается в уравнение молекулярной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C. \quad (1.7)$$

Легко заметить, что распределение концентрации в этом случае удовлетворяет такому же уравнению, как и распределение температуры в неподвижной среде, а решения последнего уравнения при различных начально-краевых условиях детально изучались в математической физике в связи с разнообразными задачами теории теплопроводности. Поэтому вид фундаментальных нестационарных решений для уравнения (1.7) в одно-, двух- и трехмерном случаях достаточно хорошо изучен [12, 102, 140].

Иногда приходится рассматривать распределение концентрации вещества, которое изменяется в результате химических, радиоактивных или иных процессов. В этом случае примесь является неконсервативной. Тогда уравнение конвективной диффузии должно быть дополнено членом, учитывающим появление или исчезновение частиц в объеме рассматриваемой среды.



Пусть в некотором элементе объема  $dV$  рассматриваемой среды возникает или исчезает вещество (примесь). Обозначим через  $Q_1(\vec{r})dV$  число частиц, возникающих за 1 с в объеме  $dV$ , находящемся вокруг некоторой точки  $\vec{r}$ . Величину  $Q_1$  называют мощностью источника. Если вещество примеси не возникает, а исчезает, то  $Q_1$  отрицательно.

Вводя величину  $Q_1dV$  в баланс частиц в объеме  $V$ , вместо соотношения (1.1), имеем:

$$\iiint_V \frac{\partial C}{\partial t} dV = - \iint_s \vec{J} ds + \iiint_V Q_1 dV. \quad (1.8)$$

Откуда

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div } \vec{J} + Q_1 \quad (1.9)$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad})C = D\Delta C + Q_1. \quad (1.10)$$

Необходимо подчеркнуть, что  $Q_1$  – величина, имеющая объемный характер. Частицы аэрозолей, исчезающие или возникающие на граничной поверхности, учитываются только граничными условиями. Наличие источников или стоков на граничной поверхности не отражается непосредственно на уравнении диффузии, так как оно отражает баланс числа частиц в объеме сплошной среды. Это очень важное замечание приобретает глубокий смысл в связи с обсуждением проблемы ветрового подъема радиоактивных аэрозольных частиц с поверхности земли.

Из вышеизложенного видно, что в общем случае уравнение конвективной диффузии входит в систему общих уравнений гидротермодинамики сплошной среды, если учитывать баланс не только количества движения и тепла, но и вещества. Поэтому решать и анализировать задачи конвективной диффузии целесообразно с позиций методов гидротермодинамики.

Приведем уравнение конвективной диффузии к безразмерному виду, введя характерный размер  $L$ , на котором происходит основное изменение концентрации, и характерную скорость движения среды  $W$ . Тогда в случае стационарного процесса для консервативной при-

меси ( $Q_1 = 0$ ) можно написать

$$\begin{aligned} & \frac{u}{LW} \frac{\partial C}{\partial \left(\frac{x}{L}\right)} + \frac{v}{LW} \frac{\partial C}{\partial \left(\frac{y}{L}\right)} + \frac{w}{LW} \frac{\partial C}{\partial \left(\frac{z}{L}\right)} = \\ & = \frac{D}{WL^2} \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial \left(\frac{x}{L}\right)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \left(\frac{y}{L}\right)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \left(\frac{z}{L}\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Вводя безразмерные компоненты скорости  $V_x = u/W$ ,  $V_y = v/W$ ,  $V_z = w/W$  и безразмерные координаты  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$ ,  $Z = z/L$ , а также безразмерную концентрацию  $\tilde{C} = C/C_0$ , где  $C_0$  - постоянная начальная концентрация, имеем

$$V_x \frac{\partial \tilde{C}}{\partial X} + V_y \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Y} + V_z \frac{\partial \tilde{C}}{\partial Z} = \frac{D}{WL} \left( \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial Z^2} \right). \quad (1.11)$$

Безразмерное отношение

$$Pe_d = \frac{WL}{D} \quad (1.12)$$

носит название диффузионного числа Пекле. Легко видеть, что  $Pe_d = Re \cdot Sc$ , где  $Re = WL/\nu$  - число Рейнольдса;  $Sc = \nu/D$  - число Шмидта. Левая часть уравнения конвективной диффузии характеризует конвективный перенос вещества вместе с движущейся средой, правая же часть - молекулярную или ламинарную диффузию.

## 1.6. Основное уравнение турбулентной диффузии

При описании процессов диффузии пассивной примеси в турбулентной среде обычно выделяют средние значения концентрации примеси  $\bar{C}$  и пульсационные составляющие  $C'$ , связанные с турбулентным скоростным полем. Этот прием позволяет с помощью операции осреднения по Рейнольдсу перейти от уравнения диффузии для мгновенных концентраций  $C$  к уравнению турбулентной диффузии для осредненных значений концентраций. Пусть  $\bar{C}(x, y, z, t)$  - осредненное значение концентрации пассивной примеси, мигрирующей вместе со сносящим турбулентным потоком. Тогда процесс конвективной турбулентной диффузии некоторого вещества описывается следую-

щим уравнением турбулентного переноса [72, 115]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \\ & = D \left( \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(\overline{u' C'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v' C'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w' C'})}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  – компоненты осредненной скорости; штрих обозначает пульсационную составляющую; черта сверху – осреднение.

Входящие в правую часть уравнения корреляционные моменты  $\overline{v'_k C'}$  между пульсациями скорости и концентрации, как известно, определяют дополнительный турбулентный перенос вещества. В полуэмпирической теории турбулентности обычно используются градиентные модели турбулентности, согласно которым полагают, что турбулентный поток вещества в  $k$ -ом направлении ( $k = 1, 2, 3$ ) равен

$$q_k = -\overline{v'_k C'} = k_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k}, \quad (1.14)$$

где  $k_k$  – коэффициенты турбулентной диффузии. Если учесть, что коэффициент молекулярной диффузии  $D$  для большинства газов составляет  $0.1 \div 1 \text{ см}^2/\text{с}$ , в то время как коэффициент турбулентной диффузии (отношение потока примеси к градиенту концентрации) обычно имеет значение  $10^4 \div 10^5 \text{ см}^2/\text{с}$ , то основное уравнение конвективной турбулентной диффузии при пренебрежении молекулярным переносом по сравнению с турбулентным принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) + Q_1, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  – продольный, горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии соответственно.

В работе А. С. Монина и А. М. Яглома [115] показано, что приведенное полуэмпирическое уравнение конвективной турбулентной диффузии можно использовать для описания поля средних концентраций  $\bar{C}(x, t)$  в момент  $t$ , когда  $t - t_0 \gg T_L$ , где  $T_L$  – лагранжев масштаб времени. В практических задачах, связанных, например, с диффузией примеси в атмосфере или океане, лагранжев масштаб времени имеет значение порядка нескольких секунд, а характерное в этих задачах время  $t \gg T_L$ , поэтому в этом случае можно пользоваться полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии при

соответствующих расчетах. Получаемые при этом решения следует рассматривать как асимптотические при  $t - t_0 \gg T_L$ . Однако отметим одно важное обстоятельство – при таком подходе теория диффузии предполагает, что скорость распространения примеси может быть бесконечно большой. Поэтому при очень больших  $t - t_0$ , т. е. на очень больших расстояниях, результаты расчета могут оказаться недостоверными.

В связи с тем, что рассматриваемая нами примесь пассивна, т. е. поле скоростей  $\vec{v}$  не зависит от распределения концентрации  $\bar{C}$ , уравнение диффузии линейно относительно концентрации.

С точки зрения различных практических приложений большой интерес представляют задачи определения поля концентраций  $\bar{C}(x, y, z, t)$ , создаваемых мгновенным и непрерывным точечным или объемным источником.

При решении прикладных задач наиболее часто используется полуэмпирическая теория турбулентности, в которой основной характеристикой интенсивности переноса или смешения служит коэффициент турбулентной диффузии  $k$ , поэтому в литературе такой подход иногда называют  $k$ -теорией.

## 1.7. Начальные и граничные условия для задач конвективной диффузии и общие подходы к их решению

Поскольку уравнение конвективной диффузии представляет собой уравнение в частных производных второго порядка в общем случае с переменными коэффициентами, то для его решения естественно используются соответствующие методы математической физики. Однако, прежде чем приступить к математическому обсуждению задач теории диффузии, необходимо рассмотреть начальные и граничные условия, которым должна удовлетворять концентрация. Эти условия обычно представляют собой математические формулировки гипотез, основанных на экспериментальных данных. Дополнительно предполагается, что в рассматриваемой области пространства концентрация вещества  $\bar{C}$  является непрерывной функцией координат  $x, y, z$  и времени  $t$  и, кроме того, непрерывны ее первая производная по  $t$  и первые и вторые производные по  $x, y, z$ . Для нахождения единственного решения уравнения конвективной диффузии необходимо определить систему начально-краевых условий. Поскольку дифференциальное уравнение диффузии устанавливает связь между временными и пространственными изменениями концентрации вещества, то для нахождения поля концентраций в рассматрива-

емой области в любой момент времени и в любой точке, т. е. для решения дифференциального уравнения диффузии, надо знать распределение вещества в рассматриваемой области в начальный момент времени (начальное условие), геометрию рассматриваемой области (безграничное, ограниченное или полуограниченное пространство) и закон взаимодействия вещества (примеси) с граничной поверхностью (граничное условие). Совокупность начального и граничных условий обычно называют краевыми условиями.

Начальное условие определяется заданием функции распределения вещества в рассматриваемой области в начальный момент времени, т. е.

$$\overline{C}(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \overline{C}(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (1.16)$$

где  $\varphi(x, y, z)$  – известная функция координат. Во многих задачах граничное условие на бесконечности состоит в том, что концентрация при удалении от источника стремится к нулю (фону)

$$\overline{C} = 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

где  $n$  – расстояние от граничной поверхности.

Условия на граничной поверхности имеют более сложный характер.

Граничное условие первого рода состоит в задании распределения вещества (концентрации) на граничной поверхности в любой момент времени, т. е.

$$\overline{C}(x, y, z, t) \Big|_s = \varphi(x^s, y^s, z^s, t), \quad (1.18)$$

где индекс  $s$  обозначает граничную поверхность. В частном случае  $\overline{C} \Big|_s = \text{const}$  концентрация на протяжении всего процесса диффузии поддерживается постоянной ( $\overline{C} \Big|_s = \text{const}$ ) или равна нулю ( $\overline{C} \Big|_s = 0$ ) – однородное граничное условие первого рода.

Граничное условие второго рода состоит в задании плотности потока вещества на граничную поверхность как функции времени, т. е.

$$- \left( k_n \frac{\partial \overline{C}}{\partial n} \right) \Big|_s = \mu_s(x^s, y^s, z^s, t). \quad (1.19)$$

Простейший случай однородного граничного условия второго рода состоит в постоянстве потока вещества на поверхность

$$- \left( k_n \frac{\partial \overline{C}}{\partial n} \right) \Big|_s = \mu = \text{const}. \quad (1.20)$$

При изучении диффузии газоаэрозольных примесей в атмосфере обычно используют условие поглощения примеси на водной поверхности  $\overline{C}|_s = 0$  и условие отражения на поверхности земли, когда поток вещества на поверхности равен нулю, т. е.  $k_n \partial \overline{C} / \partial n|_s = 0$ , где  $n$  – нормаль к поверхности земли. Возможны и иные граничные условия.

Третий, более общий случай граничных условий имеет вид

$$\left( -k_n \frac{\partial \overline{C}}{\partial n} + \beta \overline{C} \right) \Big|_s = 0, \quad (1.21)$$

где  $\beta$  – параметр взаимодействия примеси с граничной поверхностью.

В случае нестационарного непрерывного источника начально-краевые условия могут иметь вид

$$\overline{C}(x_i, 0) = \varphi(x_i), \quad \left( -k_n \frac{\partial \overline{C}}{\partial n} + \beta \overline{C} \right) \Big|_s = f(t), \quad (1.22)$$

где  $f(t)$  – заданная функция времени.

Дифференциальное уравнение переноса массы (концентрации) совместно с начальными и граничными условиями полностью определяет задачу диффузии. Зная вид источника вещества (точечный, линейный или объемный) и геометрию области диффузии (безграничная или полуграниченная), можно путем решения дифференциального уравнения при заданных начально-краевых условиях найти распределение вещества в любой точке и в любой момент времени, т. е.

$$\overline{C}(x, y, z, t) = \overline{C}(x_i, t).$$

Функция  $\overline{C}(x_i, t)$  должна удовлетворять основному дифференциальному уравнению диффузии и начально-краевым условиям.

Выше было показано, что в общем случае перенос пассивной примеси описывается с помощью уравнения конвективной турбулентной диффузии параболического типа

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\overline{C}) = D\Delta\overline{C} + \nabla(\vec{k}\nabla\overline{C}) + Q_1 \quad (1.23)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \overline{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \right) + Q_1. \end{aligned} \quad (1.24)$$

В турбулентном потоке выделяют осредненные концентрации  $\bar{C}$ , и их определение является основной (хотя и не единственной) прикладной задачей теории турбулентной диффузии.

Аналитическая теория решения этого уравнения при переменных значениях компонентов скорости и коэффициентов диффузии до сих пор не разработана. Имеющиеся в литературе решения посвящены лишь некоторым частным задачам. В случае стационарной задачи ( $\partial C/\partial t = 0$ ) их решение несколько упрощается. Для консервативной (сохраняющейся) примеси  $Q_1 = 0$ . Кроме того, в практических расчетах обычно молекулярной диффузией пренебрегают по сравнению с турбулентной ( $D \ll k_i$ ). Если начальное распределение концентрации или условия ее диффузии обладают симметрией, то уравнение диффузии может быть упрощено, и количество координат в задаче уменьшится до двух или одной.

Общее уравнение конвективной турбулентной диффузии показывает, что распространение примеси в виде концентрации тех или иных веществ осуществляется за счет процесса диффузии и их конвективного переноса сносящим потоком. В принципе, если известны поле скоростей  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  и коэффициенты диффузии  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ , а также начально-краевые условия для концентрации  $\bar{C}$ , то уравнение (1.24) можно решить и найти пространственное и временное распределение концентраций. Принципиальная сложность задачи состоит в том, что в реальных воздушных и водных потоках очень трудно найти поле скоростей  $\bar{v}$  и еще труднее определить коэффициенты турбулентной диффузии  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ .

Учитывая сложность решения общей задачи конвективной диффузии, особый интерес представляют частные задачи нестационарной и установившейся диффузии в неподвижной и движущейся среде. По своей сути они аналогичны задачам нестационарной теплопроводности, решению которых в литературе уделялось много внимания. В этом случае одним из эффективных методов решения уравнения диффузии является метод разделения переменных (метод Фурье), который применим однако лишь для задач диффузии с однородными граничными условиями. Он состоит в том, что решение ищется в виде частных решений, удовлетворяющих однородным граничным условиям.

Рассмотрим, например, уравнение диффузии для концентрации  $\bar{C}$  в виде

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \nabla [k(x_i) \nabla \bar{C}] \quad (1.25)$$

с начальным условием  $\bar{C}(x_i, 0) = \varphi(x_i)$  и однородным граничным условием  $\bar{C}|_s = 0$ .

Частное решение такой задачи представимо в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая – от координат, т. е.

$$\bar{C}(x, y, z, t) = T(t)X(x_i). \quad (1.26)$$

Подстановка выражения (1.26) в (1.25) приводит к уравнениям

$$T'(t) = -\lambda^2 T(t), \quad (1.27)$$

$$\nabla [k(x_i)\nabla X(x_i)] = -\lambda^2 X(x_i), \quad (1.28)$$

где  $\lambda$  – параметр разделения. Решение первого из них сразу находится путем интегрирования

$$T(t) = C_\lambda(\lambda) \exp(-\lambda^2 t). \quad (1.29)$$

Решение второго уравнения в общем виде не получено, но известно много решений для частных случаев.

При постоянном коэффициенте диффузии  $k(x_i) = k = \text{const}$  уравнение (1.28) превращается в уравнение Гельмгольца:

$$k \nabla^2 X(x_i) = -\lambda^2 X(x_i). \quad (1.30)$$

Решение этого уравнения также нетривиально и связано с определенными трудностями. При использовании декартовой прямоугольной системы координат в зависимости от постановки задачи решение выражается через экспоненциальные, тригонометрические и гиперболические функции. В случае круговой цилиндрической системы координат в решении появляются функции Бесселя. Усложнение геометрической формы пространства, где происходит диффузия, и отказ от предположения о постоянстве коэффициента диффузии приводит к дальнейшему усложнению задачи.

В следующих главах будут рассмотрены конкретные задачи нестационарной и установившейся диффузии в неподвижной и движущейся безграничной или полуограниченной среде от точечных, мгновенных или непрерывных, а также от линейных и объемных источников.



## Глава 2

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ

### 2.1. Постановка задачи для точечного источника и выбор начально-краевых условий

В силу сложности задач диффузии целесообразно начать их рассмотрение с простейших случаев, когда среда безгранична, неподвижна и изотропна, а коэффициенты диффузии постоянны. Такие исследования проводились еще Робертсом [213] и затем рядом других исследователей.

Рассмотрим задачу о рассеивании пассивной примеси от непрерывного точечного источника мощностью  $M$ , то есть выбрасывающего  $M$  грамм вещества в секунду (г/с) в безграничную неподвижную среду, например, в атмосферу, когда источник находится на достаточно большом удалении от земли, и влиянием земной поверхности на процесс диффузии можно пренебречь.

Процесс распространения пассивной консервативной примеси в однородном изотропном пространстве с постоянным коэффициентом диффузии  $k$  описывается следующим нестационарным уравнением конвективной диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (2.1)$$

которое в случае неподвижной среды принимает более простой вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = k \Delta C, \quad (2.2)$$

где  $C$  – концентрация примеси в некоторой точке  $P(r)$  в момент  $t$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – расстояние;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Таким образом, в соответствии с постановкой задачи необходимо найти решение следующего уравнения нестационарной диффузии в безграничном пространстве:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \Delta C, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Учитывая, что окружающая источник среда неподвижна и изотропна, естественно допустить, что поступающее из него вещество

будет располагаться симметрично под влиянием механизма диффузии, а изолиниями будут концентрические сферы и, следовательно, концентрация будет зависеть в этом случае только от расстояния  $r$  и времени  $t$ . Поэтому целесообразно рассмотреть частное решение уравнения (2.3), обладающее центральной симметрией относительно некоторой точки  $P_0$ , то есть решение вида

$$C(P, t) = C(r, t),$$

где  $r$  – расстояние между точками  $P$  и  $P_0$ .

В сферической системе координат рассматриваемое уравнение диффузии (2.3) имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right]. \quad (2.4)$$

С учетом свойств симметрии оператор Лапласа в правой части упрощается и уравнение (2.4) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) = \frac{k}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rC). \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение новую переменную  $v = Cr$ , тогда для нее из (2.5) имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad r > 0, \quad t > 0. \quad (2.6)$$

Определив функцию  $v(r, t)$ , легко найти искомую концентрацию из очевидного соотношения

$$C(r, t) = v(r, t)/r. \quad (2.7)$$

Теперь займемся формулировкой начально-краевых условий для  $C$  и  $v$ . Поскольку в начале координат помещен непрерывно действующий точечный источник вещества постоянной мощности  $M$  (г/с), а в остальном пространстве начальная концентрация равна нулю, то

$$C(r, 0) = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Диффузионный поток вещества в единицу времени через сферу  $S_\varepsilon$  с центром в  $r = 0$  и радиусом  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равен  $M$ , то есть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \iint_{S_\varepsilon} k \frac{\partial C}{\partial n} d\sigma \right] = M.$$

Так как нормальная производная  $\partial C/\partial n = \partial C/\partial r$  в силу симметрии постоянна на поверхности  $S_\varepsilon$ , то

$$-k \left. \frac{\partial C}{\partial r} 4\pi r^2 \right|_{r=\varepsilon} \rightarrow M \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

что означает наличие у производной  $\partial C/\partial r$  при  $r = 0$  особенности вида  $\partial C/\partial r \sim M/(4\pi k r)^2$ . Следовательно, сама функция  $C$  при  $r = 0$  должна иметь особенность вида  $C \sim M/(4\pi k r)$ , так, что произведение  $C r = v$  остается ограниченным при  $r = 0$ . Таким образом, необходимая вспомогательная функция  $v$  определяется следующими условиями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad (2.8)$$

$$v(0, t) = \frac{M}{4\pi k} = v_0, \quad (2.9)$$

$$v(r, 0) = 0 \quad r > 0. \quad (2.10)$$

Учитывая, что уравнение (2.8) имеет второй порядок по  $r$ , в качестве второго граничного условия по  $r$  потребуем выполнение естественного условия ограниченности решения на бесконечности, т. е.  $v(\infty, t) \rightarrow 0$ . Однако даже в этом случае решение сформулированной задачи пока не столь очевидно.

## 2.2. Решение вспомогательной задачи с неоднородными условиями

Непосредственное решение задачи (2.8)–(2.10) связано с определенными трудностями. Поэтому рассмотрим следующую вспомогательную задачу для функции  $u$  с неоднородными начально-краевыми условиями, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (2.11)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(r, 0) = \varphi(r), \quad (2.12)$$

где  $\mu(t)$  и  $\varphi(r)$  – известные функции. В частном случае  $\mu(t) = M/(4\pi k) = \text{const}$ ,  $\varphi(r) = u_0 = \text{const}$  или  $\varphi(r) = 0$ .

Решение этой вспомогательной задачи можно представить в виде суммы

$$u(r, t) = u_1(r, t) + u_2(r, t), \quad (2.13)$$

где функция  $u_1(r, t)$  представляет влияние только начальных условий, а функция  $u_2(r, t)$  – влияние только граничного условия. Эти функции можно определить как решения уравнения (2.11), удовлетворяющие условиям

$$u_1(r, 0) = \varphi(r), \quad u_1(0, t) = 0; \quad (2.14)$$

$$u_2(r, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \mu(t). \quad (2.15)$$

Очевидно, что сумма этих функций будет удовлетворять условиям (2.12). Кроме того, нетрудно заметить эквивалентность задачи для  $u_2(r, t)$  и интересующей нас функции  $v(r, t)$ . Найдем сначала решение первой начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}, \quad (2.16)$$

$$u_1(r, 0) = \varphi(r), \quad u_1(0, t) = 0. \quad (2.17)$$

Для ее решения используем метод Фурье. Будем искать ограниченное нетривиальное решение уравнения (2.16) в виде произведения двух функций

$$u_1(r, t) = R(r)T(t). \quad (2.18)$$

Подставляя выражение (2.18) в (2.16), получаем

$$\frac{R''}{R} = \frac{T'}{kT} = -\lambda^2,$$

где  $\lambda$  – параметр разделения ( $-\infty < \lambda < \infty$ ). Отсюда следует

$$T' + k\lambda^2 T = 0, \quad (2.19)$$

$$R'' + \lambda^2 R = 0. \quad (2.20)$$

Решение этих обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условию ограниченности на бесконечности, хорошо известно. Оно имеет вид

$$T(t) = C_\lambda(\lambda) e^{-\lambda^2 k t},$$

$$R(r) = B_\lambda(\lambda) e^{i\lambda r}.$$

Тогда частное решение уравнения (2.16) записываем в форме

$$u_{1\lambda}(r, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 k t + i\lambda r} \quad (2.21)$$

и, следовательно, в силу линейности исходного уравнения общее решение можно записать как суперпозицию частных решений:

$$u_1(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 kt + i\lambda r} d\lambda. \quad (2.22)$$

Требую выполнения начального условия при  $t = 0$ , имеем

$$\varphi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda r} d\lambda.$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (2.23)$$

Подставляя (2.23) в интеграл (2.22) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} u_1(r, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) e^{-\lambda^2 kt + i\lambda r} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt + i\lambda(r-\xi)} d\lambda \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Заметим, что внутренний интеграл в уравнении (2.24) табличный и равен [69]

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt + i\lambda(r-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4kt}}. \quad (2.25)$$

Подставляя выражение (2.25) в (2.24), приходим к интегральному представлению искомого решения:

$$u_1(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (2.26)$$

где

$$G(r, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4kt}}. \quad (2.27)$$

Функция  $G(r, \xi; t)$ , определенная формулой (2.27), по аналогии с теорией теплопроводности является фундаментальным решением одномерного уравнения нестационарной диффузии. Таким образом, решение уравнения (2.16) с начальным условием (2.17) определяется следующим интегралом Пуассона:

$$u_1(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4kt}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.28)$$

Можно показать [140], что решение для  $u_1(r, t)$ , удовлетворяющее второму условию (2.17)  $u_1(0, t) = 0$ , имеет вид

$$u_1(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4kt}} \right] \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.29)$$

Легко видеть, что при  $r = 0$  выражение в квадратных скобках обращается в нуль и  $u_1(0, t) = 0$ .

Рассмотрим частный случай полученного решения, когда  $u_1(r, 0) = u_0$ ,  $u_1(0, t) = 0$ ,  $u_0 = \text{const}$ . Будем иметь:

$$u_1(r, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4kt}} \right] \frac{d\xi}{2\sqrt{kt}}. \quad (2.30)$$

Разбивая интеграл на два слагаемых и вводя переменные

$$\alpha = \frac{\xi - r}{2\sqrt{kt}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + r}{2\sqrt{kt}},$$

получаем:

$$u_1(r, t) = u_0 \Phi \left( \frac{r}{2\sqrt{kt}} \right), \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (2.31)$$

где  $\Phi(z)$  – интеграл ошибок. Функция  $\Phi$  в нуле обращается в нуль, т.е.  $\Phi(0) = 0$ , а при возрастании  $z$  она быстро приближается к предельному значению  $\Phi(\infty) = 1$ , поскольку

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 2.3. Диффузия от непрерывного точечного источника в безграничной неподвижной среде

Обратимся теперь к отысканию функции  $u_2(r, t)$ , фактически совпадающей с интересующей нас функцией  $v(r, t)$ , которая должна удовлетворять уравнению  $\partial u_2 / \partial t = k \partial^2 u_2 / \partial z^2$  и условиям (2.15). Пусть  $\mu(t) = M / (4\pi k) = \text{const}$ . Из вышеизложенного видно, что вспомогательная функция

$$\bar{v}(r, t) = \frac{M}{4\pi k} \Phi \left( \frac{r}{2\sqrt{kt}} \right)$$

удовлетворяет уравнению (2.8) и условиям

$$\bar{v}(r, 0) = \frac{M}{4\pi k}, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

Отсюда следует, что искомая функция  $v(r, t)$  (без черты) равна

$$v(r, t) = \frac{M}{4\pi k} - \bar{v}(r, t) = \frac{M}{4\pi k} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{r}{2\sqrt{kt}} \right) \right], \quad (2.32)$$

так как она удовлетворяет исходному уравнению (2.8) и условиям

$$v(r, 0) = 0 \quad (r > 0), \quad v(0, t) = \frac{M}{4\pi k} = v_0.$$

Таким образом, решение уравнения (2.8), удовлетворяющее условиям (2.9), (2.10), выражается формулой

$$v(r, t) = \frac{M}{4\pi k} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{r}{2\sqrt{kt}} \right) \right] = \frac{M}{4\pi k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (2.33)$$

Следовательно, решение задачи о диффузии примеси от непрерывно действующего точечного источника мощностью  $M$  (г/с), помещенного в начале координат ( $r = 0$ ) в безграничной неподвижной среде, имеет вид

$$C(r, t) = M C_\delta(r, t) = \frac{v(r, t)}{r} = \frac{M}{4\pi k r} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (2.34)$$

где  $C_\delta(r, t)$  – концентрация от источника единичной мощности ( $M = 1$ ). При  $t \rightarrow \infty$  эта формула приводит к установившемуся распределению концентрации:

$$C(r, t) = \frac{M}{4\pi k r}, \quad (2.35)$$

что означает подток вещества к началу координат из источника, расположенного там же.

Большой практический интерес представляет случай диффузии не точечного, а объемного сферического газоаerosольного облака радиуса  $R_0$  с начальной средней концентрацией примеси  $C_0$ , оказавшегося в безграничной атмосфере, например, в результате взрыва снаряда или вследствие аварийного выброса. Пусть начальная концентрация примеси в атмосферном воздухе равна нулю. Тогда можно показать, что в этом случае концентрация на расстоянии  $r$  от центра сферы в момент  $t$  определяется выражением

$$C = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{r-R_0}{2\sqrt{kt}}}^{\frac{r+R_0}{2\sqrt{kt}}} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{\sqrt{kt}}{r} \left[ e^{-\frac{(r-R_0)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(r+R_0)^2}{4kt}} \right] \right\}.$$

Этот результат имеет важное практическое значение.

## 2.4. Диффузия от мгновенного точечного источника в безграничной неподвижной среде

Чтобы перейти к случаю мгновенного источника, рассмотрим непрерывный точечный источник мощностью  $M$ , помещенный в начало координат и непрерывно действующий в течение промежутка времени  $\tau$ . Тогда мгновенный источник будет эквивалентен двум непрерывным источникам мощности  $+M$  и  $-M$ , первый из них включается в момент  $t = 0$ , второй при  $t = \tau$ . Распределение примеси при этом будет выражаться формулой

$$C_\tau(r, t) = M[C_\delta(r, t) - C_\delta(r, t - \tau)]. \quad (2.36)$$

За промежуток времени  $\tau$  выбрасывается количество вещества  $Q = M\tau$  (г), поэтому

$$C_\tau(r, t) = \frac{Q}{\tau}[C_\delta(r, t) - C_\delta(r, t - \tau)].$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$  и считая  $Q$  постоянным, находим

$$C(r, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} C_\tau(r, t) = Q \frac{\partial C_\delta(r, t)}{\partial t}. \quad (2.37)$$

Учитывая выражение (2.34), легко показать, что

$$\frac{\partial C_\delta(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi kr} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \frac{r}{4\sqrt{kt^3}} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi kt})^3} e^{-\frac{r^2}{4kt}}. \quad (2.38)$$



Таким образом, распределение концентрации от точечного мгновенного источника, помещенного в начале координат, дается выражением

$$C(r, t) = \frac{Q}{(2\sqrt{\pi kt})^3} e^{-\frac{r^2}{4kt}}. \quad (2.39)$$

Это решение удовлетворяет условиям

$$C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0, \quad r > 0;$$

$$C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

В таком виде оно было использовано еще Робертсом [213] для описания диффузии клуба дыма, образованного взрывом.

Если же источник находится в точке с координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$ , то в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$  выражение для концентрации, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} C(r, t) &= \frac{Q}{(2\sqrt{\pi kt})^3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4kt}\right) = \\ &= QG(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi kt})^3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4kt}\right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Функция  $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$ , являющаяся фундаментальным решением уравнения нестационарной диффузии, физически представляет собой функцию рассеивания, определяющую концентрацию в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ , вызываемую единичным точечным источником примеси, помещенным в момент  $t = 0$  в точку  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

Нетрудно убедиться в том, что

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 1. \quad (2.42)$$

В самом деле, тройной интеграл (2.42) можно представить в виде произведения трех интегралов, каждый из которых равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{kt}}.$$

Отсюда легко видеть, что распределение концентрации, представленное формулой (2.39) или (2.40), удовлетворяет интегральному условию сохранения

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} C dx dy dz = Q.$$

Соотношение (2.42) и гауссов вид решения уравнения диффузии позволяет трактовать процесс диффузии от точечного мгновенного источника как расплывание массы примеси в облако, описываемое симметричным распределением концентрации с дисперсией  $\sigma^2 = 2kt$ , т. е.

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.43)$$

Из формулы (2.41) видно, что функция  $G$  обладает свойством симметрии

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t; x, y, z), \quad (2.44)$$

являющимся выражением принципа взаимности: действие в точке  $(x, y, z)$  источника, находящегося в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ , равно действию в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$  такого же источника, помещенного в точку  $(x, y, z)$ . Однако относительно переменной  $t$  такая симметрия не имеет места, что является выражением необратимости диффузионных процессов во времени.

В случае неизотропного пространства, когда коэффициенты диффузии в различных координатных направлениях постоянны, но неодинаковы, соответствующее уравнение нестационарной диффузии записывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

а его решение есть

$$C(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = \frac{Q}{8(\pi^3 k_x k_y k_z t^3)^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4k_x t} - \frac{(y-\eta)^2}{4k_y t} - \frac{(z-\zeta)^2}{4k_z t}\right). \quad (2.45)$$

При  $k_x = k_y = k_z$  формула (2.45) переходит в формулу (2.40). В работах Дж. Тейлора [223], а затем А. С. Моница, А. М. Яглома [115] и

других показано, что коэффициенты диффузии в случае анизотропной среды связаны с дисперсиями следующими соотношениями:

$$\sigma_i^2(t) = 2\overline{v_i^2}T_i t = 2k_i t \quad (i = \overline{1,3}).$$

Поэтому поле концентраций от точечного мгновенного источника в безграничной среде с помощью дисперсий будет описываться формулой

$$C(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \times \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \eta)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - \zeta)^2}{2\sigma_z^2} \right], \quad (2.46)$$

где  $k_x, k_y, k_z$  – коэффициенты диффузии в соответствующих направлениях;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – соответствующие дисперсии ( $\sigma_x^2 = 2k_x t, \sigma_y^2 = 2k_y t, \sigma_z^2 = 2k_z t$ ).

## 2.5. Диффузия от нестационарных линейного и плоского источников в безграничной неподвижной среде

Рассмотрим теперь двумерную задачу и определим формулу для концентрации в случае двух измерений. Физически это означает, что мы имеем дело с бесконечным линейным источником, расположенным, например, на прямой параллельно оси  $z$  и проходящей через точку  $(\xi, \eta)$ . Обозначим через  $\overline{Q} = \text{const}$  количество вещества источника, поступившего в окружающую среду с единицы длины источника (г/м). Концентрация от такого источника не будет зависеть от координаты  $z$  и характеризуется своим изменением лишь в плоскости  $(x, y)$ .

Решение для линейного источника производительности  $\overline{Q}$  наиболее просто получается путем интегрирования вдоль линии точечных источников производительности  $\overline{Q} d\zeta$  в точке  $\zeta$ . Тогда распределение примеси в пространстве дается выражением

$$C(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Q} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) d\zeta,$$

где функция рассеивания  $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$  определена формулой (2.41). Подставляя это значение  $G$  и вычисляя интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4kt}} d\zeta = 2\sqrt{kt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2\sqrt{\pi kt},$$

для концентрации от линейного источника получаем

$$C(x, y, t) = \frac{\bar{Q}}{4\pi kt} \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4kt} \right]. \quad (2.47)$$

В случае, если бесконечный линейный источник будет расположен параллельно горизонтальной оси  $y$  и будет проходить через точку  $(\xi, \zeta)$ , то интегрирование будет выполняться по  $\eta$ , а распределение примеси будет описываться соотношением

$$C(x, z, t) = \frac{\bar{Q}}{4\pi kt} \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2}{4kt} \right]. \quad (2.48)$$

Аналогичным образом можно получить решение в случае одномерной задачи, то есть для мгновенного бесконечного плоского источника, параллельного, например, плоскости  $x = \text{const}$  и проходящего через точку  $(\xi, 0, 0)$ . Концентрация такого источника будет зависеть только от координаты  $x$ . Обозначим количество вещества источника с единицы площади через  $\bar{Q}$  (г/м<sup>2</sup>). Тогда, распределяя точечные источники производительности  $\bar{Q} d\eta d\zeta$  по плоскости, путем интегрирования получаем следующее распределение для концентрации от мгновенного бесконечного плоского источника:

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \bar{Q} \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) d\eta d\zeta = \\ &= \frac{\bar{Q}}{2\sqrt{\pi kt}} \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4kt} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Если источник расположен в плоскости  $z = \zeta$ , то соответствующее выражение для концентрации от плоского источника имеет вид

$$C(z, t) = \frac{\bar{Q}}{2\sqrt{\pi kt}} \exp \left[ -\frac{(z - \zeta)^2}{4kt} \right]. \quad (2.50)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция (2.50) определяет значение концентрации в точке  $z$  в момент времени  $t$ , если в начальный момент времени  $t = 0$  в точке  $\zeta$  выделяется количество вещества  $\bar{Q}$  грамм на единицу поверхности.

Действительно, во-первых

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\bar{Q}}{2\sqrt{\pi}} \frac{(z - \zeta)}{2(kt)^{3/2}} e^{-\frac{(z - \zeta)^2}{4kt}},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\overline{Q}}{2\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{(kt)^{3/2}} + \frac{(z-\zeta)^2}{4(kt)^{5/2}} \right] e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4kt}},$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\overline{Q}}{2\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{k}{2(kt)^{3/2}} + \frac{k(z-\zeta)^2}{4(kt)^{5/2}} \right] e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4kt}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}.$$

Во-вторых, количество вещества, находящееся в сечении в момент  $t > 0$ , равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\zeta, t) d\zeta = \frac{\overline{Q}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4kt}} \frac{d\zeta}{2\sqrt{kt}} = \frac{\overline{Q}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \overline{Q},$$

так как  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$  [140].

На основе вышеприведенного анализа легко видеть, что фундаментальное решение одномерного, двумерного и трехмерного уравнения нестационарной диффузии с постоянными и равными коэффициентами турбулентной диффузии ( $k_x = k_y = k_z = k$ )

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \Delta C, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

с начальным условием

$$C(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

записывается в виде

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi kt})^n} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4kt}} d\xi d\eta d\zeta.$$

где  $n = 1, 2, 3$  – размерность задачи.

## 2.6. Нестационарная диффузия радиоактивной или неконсервативной примеси

При расчете концентраций радиоактивных или химически активных примесей необходимо учитывать радиоактивный распад или другие физико-химические превращения. В математической модели процесса диффузии такой учет осуществляется с помощью соответствующего источникового члена  $Q_1$  в уравнении диффузии. Тогда в

этом случае простейший вариант уравнения нестационарной диффузии, как было показано, имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k\Delta C + Q_1. \quad (2.51)$$

Скорость радиоактивного распада, так же, как и химических превращений, обычно принимают пропорциональной концентрации примеси, т. е. полагают  $Q_1 = -\lambda C$ , и тогда задача о диффузии радиоактивной или неконсервативной примеси сводится к решению уравнения вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k\Delta C - \lambda C \quad (2.52)$$

при соответствующих начально-краевых условиях. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$C(x_i, t) = \tilde{C}(x_i, t)e^{-\lambda t}. \quad (2.53)$$

Тогда после подстановки  $C(x_i, t)$  в уравнение диффузии (2.52) для функции  $\tilde{C}(x_i, t)$  получим уже известное нам уравнение нестационарной диффузии обычной пассивной примеси

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = k\Delta \tilde{C}, \quad (2.54)$$

при этом начально-краевые условия для  $\tilde{C}(x_i, t)$  остаются теми же, что и для  $C(x_i, t)$ . Таким образом, решение задачи о диффузии радиоактивной или неконсервативной примеси в рассматриваемом случае легко выражается через решение для обычной пассивной примеси без распада, умноженного на экспоненту вида  $e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda$  определяется через период полураспада рассматриваемого радионуклида  $T_{1/2}$  с помощью соотношения

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{T_{1/2}}.$$

Следовательно, коррекция концентрации в случае, когда происходит процесс радиоактивного распада радионуклидов, осуществляется с помощью соответствующего экспоненциального множителя  $f_1 = \exp(-\lambda t)$ , где  $t$  – рассматриваемое время диффузии.

Аналогичная ситуация имеет место и для более общего случая физико-химических превращений рассматриваемой химически активной примеси. При этом параметр превращения  $\lambda$  может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

В прикладных задачах атмосферной диффузии необходимо учитывать еще один фактор. В случае наличия осадков в виде дождя и снега концентрация в воздухе уменьшается из-за захвата аэрозольных частиц и их переноса на поверхность земли. Этот процесс обеднения облака или струи выброса описывается уравнением диффузии вида  $\partial C/\partial t = k\Delta C - \Lambda C$  и, следовательно, эти эффекты могут быть учтены в выражении для концентрации соответствующим экспоненциальным множителем  $f_2 = \exp(-\Lambda t)$ , где  $\Lambda$  – параметр вымывания, зависящий от размера капель и частиц, их растворимости в воде и т. д.

Выпадения осадков не бывают повсеместными. Обычно они имеют место лишь в определенных регионах. Поэтому коррекцию концентрации за счет вымывания осадками следует проводить лишь для тех площадей, над которыми наблюдались осадки.

Таким образом, концентрация радиоактивной и неконсервативной примеси с учетом двух вышерассмотренных факторов описывается уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k\Delta C - (\lambda + \Lambda)C$$

и определяется выражением

$$C(x_i, t) = e^{-(\lambda + \Lambda)t} \tilde{C}(x_i, t),$$

где  $\tilde{C}(x_i, t)$  есть решение уравнения диффузии без источников члена (2.54).

## Глава 3

# ДИФФУЗИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ БЕЗГРАНИЧНОЙ И ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

### 3.1. Общие положения

В предыдущей главе рассматривались задачи нестационарной диффузии в неподвижной среде. Однако в реальных прикладных задачах, связанных, например, с переносом и рассеиванием промышленных газоаerosольных выбросов, диффузия обычно происходит в сносящем ветровом потоке. Теоретическое изучение процессов конвективной диффузии в движущейся среде в общем случае значительно сложнее и связано с совместным решением следующей системы уравнений: турбулентного движения (Рейнольдса), неразрывности, диффузии, переноса тепла и уравнения состояния:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = \bar{F}_i - \frac{\delta_{ik}}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} = \frac{\partial \overline{v'_k C'}}{\partial x_k} + Q_1, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = \frac{\partial \overline{v'_k T'}}{\partial x_k} + \frac{Q}{c_p}, \quad (3.4)$$

$$\rho = \rho(\bar{T}, \bar{C}) \quad (3.5)$$

при определенных начально-краевых условиях, зависящих от формулировки задачи. В такой постановке задача турбулентной конвективной диффузии оказывается довольно сложной и громоздкой. Поэтому в целях ее упрощения часто допускают, что поле скоростей ветрового потока над ровной поверхностью земли достаточно хорошо может быть смоделировано постоянной скоростью ветра  $W$  и постоянной вертикальной скоростью  $w_g$  гравитационного осаднения элементарных объемов жидкости. При таком подходе обычно выделяется среднее движение ветрового потока, ориентированное вдоль оси  $x$ , и соответствующие компоненты осредненной скорости прини-



маются равными

$$\bar{u} = W = \text{const}, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = w_g = \text{const},$$

и тогда диффузионная задача отделяется от термогидродинамической. При этих допущениях исходное уравнение конвективной турбулентной диффузии в прямоугольной декартовой системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + W \frac{\partial C}{\partial x} + w_g \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + Q_1.$$

Кроме того, если примесь консервативная ( $Q_1 = 0$ ), диффузия установившаяся ( $\partial C / \partial t = 0$ ), а вдоль оси  $x$  она мала по сравнению с конвективным переносом в этом направлении, то уравнение диффузии еще больше упрощается и принимает вид

$$W \frac{\partial C}{\partial x} + w_g \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (3.6)$$

На решении этого уравнения и базируются основные способы прогнозирования рассеивания газоаerosольных выбросов в атмосфере. Напомним, что здесь молекулярной диффузией пренебрегалось по сравнению с турбулентной ( $D \ll k_i$ ), а  $k_y$  и  $k_z$  – коэффициенты турбулентной диффузии вдоль соответствующих направлений. Система координат обычно в этих задачах выбирается так, что ось  $x$  горизонтальна и совпадает с направлением ветра, ось  $y$  горизонтальна и направлена перпендикулярно ветру, а ось  $z$  – вертикальна. Начально-краевые условия для нестационарных источников рассматривались выше. Начально-краевые условия для непрерывных источников в безграничной движущейся среде в соответствии с физической постановкой задачи имеют вид

$$C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y, z \rightarrow \pm\infty, \quad (3.7)$$

$$C = \varphi(y, z) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{или} \quad x = x_0, \quad (3.8)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} WC(x, y, z) dz dy = M. \quad (3.9)$$

Здесь  $M$  – мощность источника;  $\varphi(y, z)$  – заданная функция распределения концентрации в начальном сечении; последнее выражение соответствует интегральному условию сохранения примеси. В частном

случае точечного источника последние два условия с учетом свойств  $\delta$ -функции могут быть также записаны в виде

$$WC(0, y, z) = M\delta(y)\delta(z), \quad (3.10)$$

и, следовательно,

$$\varphi(y, z) = \frac{M}{W}\delta(y)\delta(z). \quad (3.11)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача об установившейся конвективной диффузии в движущейся среде сводится к начально-краевой задаче для параболического уравнения (3.6). В частном случае пассивной примеси, когда вертикальная скорость гравитационного осаждения примеси  $w_g = 0$ , а коэффициенты диффузии равны и постоянны

$$k_y = k_z = k = \text{const}, \quad (3.12)$$

уравнение (3.6) принимает вид

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k\Delta C, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.13)$$

Легко заметить, что если вместо  $x$  ввести переменную  $t = x/W$  при  $W = \text{const}$ , то обнаруживается формальное сходство этой задачи с ранее рассмотренной задачей нестационарной диффузии. Ниже будет рассмотрено решение задачи о конвективной диффузии от мгновенных и непрерывных линейных, точечных и объемных источников, находящихся в движущейся среде, на основе использования фундаментальных решений нестационарной диффузии, полученных в предыдущей главе.

Краевые задачи установившейся диффузии в движущейся среде интересны как с точки зрения развития аналитических методов их решения, так и с практической точки зрения.

### 3.2. Диффузия от непрерывного линейного источника в безграничной движущейся среде

В инженерной практике значительный интерес представляет задача расчета рассеивания загрязняющих веществ в окружающей движущейся среде, поступающих туда от концентрированных мгновенных или непрерывно действующих источников. Рассмотрим простейший случай распространения примеси в безграничной среде от непрерывного линейного источника, расположенного вдоль оси  $y$  перпендикулярно вектору скорости ветрового потока  $W$ , направленного

вдоль оси  $x$  и выбрасывающего через щель шириной  $2b$   $\overline{M}$  грамм вещества с единицы длины в единицу времени ( $\overline{M} \approx 1$  г/(с·м)).

Будем предполагать, что скорость ветра  $\overline{u} = W = \text{const}$ , и коэффициент диффузии постояен  $k_z = k = \text{const}$ . Тогда в рассматриваемом двумерном случае концентрация будет зависеть только от переменных  $x, z$ , и задача о диффузии консервативной примеси ( $Q_1 = 0$ ) от непрерывного линейного источника сводится к решению следующего дифференциального уравнения:

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (3.14)$$

В соответствии с физической постановкой задачи начально-краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} C &\rightarrow 0 && \text{при } z \rightarrow \pm\infty, && x > 0, \\ C &= \varphi(z) && \text{при } -b \leq z \leq b, && x = 0, \\ C &= 0 && \text{при } |z| > b, && x = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Решение уравнения (3.14), удовлетворяющее условиям (3.15), записывается на основании аналогичного решения (2.28) для нестационарной диффузии с помощью замены переменной  $t$  на  $x/W$ , а именно:

$$C(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right] \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (3.16)$$

Рассмотрим частный случай этого решения, когда  $\varphi(z) = \text{const} = C_0$ . Будем иметь

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \int_{-b}^b \exp\left[-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right] d\zeta.$$

Последнее выражение можно преобразовать к более удобному виду, если ввести переменную

$$\frac{\zeta - z}{2\sqrt{kx/W}} = \alpha, \quad d\zeta = 2\sqrt{kx/W} d\alpha.$$

Тогда после перехода к новой переменной получим

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{b+z}{2\sqrt{kx/W}}}^{\frac{b-z}{2\sqrt{kx/W}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha.$$

Или имея ввиду, что подынтегральная функция является четной, находим

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{b+z}{2\sqrt{kx/W}} \right) + \Phi \left( \frac{b-z}{2\sqrt{kx/W}} \right) \right], \quad (3.17)$$

где  $\Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-\alpha^2) d\alpha$  – интеграл ошибок.

Рассмотрим другой частный случай, когда щель бесконечно тонкая и расположена в точке с координатой  $\zeta$ . Функцию распределения  $\varphi(\zeta)$  для такого линейного источника с производительностью  $\overline{M}$  ( $\text{г}/(\text{с}\cdot\text{м})$ ) можно записать с помощью  $\delta$ -функции в следующем виде:

$$\varphi(z) = \frac{\overline{M}}{W} \delta(z - \zeta).$$

Учитывая, что по определению  $\delta$ -функция обладает таким свойством, что

$$\int_a^b f(\zeta) \delta(\zeta - \alpha) d\zeta = f(\alpha)$$

при значениях  $\alpha$ , попадающих в интервал  $(a, b)$ , и

$$\int_a^b f(\zeta) \delta(\zeta - \alpha) d\zeta = 0$$

для других значений  $\alpha$ , где  $f(\zeta)$  – произвольная функция, для концентрации от бесконечно тонкого линейного непрерывного источника в движущейся среде согласно выражения (3.16) имеем:

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi kxW}} \exp \left[ -\frac{(z - \zeta)^2}{4kx/W} \right]. \quad (3.18)$$

Естественно, что в точке  $x = 0$  существует особенность, и решение имеет смысл лишь при  $x > 0$ .

Легко видеть, что вдоль оси  $x$  в рассматриваемом приближении концентрация от линейного источника непрерывно убывает как  $x^{-1/2}$ . При фиксированном расстоянии от источника ( $x = \text{const}$ ) распределение концентрации описывается нормальным законом Гаусса по вертикали с дисперсией  $\sigma_z^2 = 2kx/W$ .

Если начальное распределение  $\varphi$  задано в виде некоторого характерного для струй профиля, который достаточно хорошо аппроксимируется кривой Гаусса с параметром распределения  $\sigma_0$ , т. е.

$$\varphi(\zeta) = \frac{\overline{M}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 W} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (3.19)$$

то, подставив выражение (3.19) в (3.16) и выполнив операцию интегрирования, с помощью табличного интеграла вида [69]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-px^2 + qx) dx = \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{p}, \quad p > 0$$

для концентрации от непрерывного линейного распределенного источника в безграничной движущейся среде, получим

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + 2kx/W)}W} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_0^2 + 2kx/W)}\right). \quad (3.20)$$

Легко видеть, что решение задачи для рассматриваемого случая также может быть представлено в гауссовой форме с дисперсией

$$\sigma_z^2 = \sigma_0^2 + 2kx/W. \quad (3.21)$$

И тогда выражение для концентрации можно записать в следующей канонической форме:

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z W} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right], \quad (3.22)$$

где  $\sigma_z$  определено зависимостью (3.21).

### 3.3. Диффузия от непрерывного точечного и объемного источника в безграничной движущейся среде

Задача о непрерывном точечном источнике пассивной примеси при наличии ветрового потока представляет огромный интерес из-за ее большого практического значения при расчетах загрязнения атмосферы газоаэрозольными выбросами из труб промышленных предприятий и в ряде других случаев.

Рассмотрим трехмерный случай диффузии пассивной примеси, которая происходит от непрерывного точечного источника мощностью  $M$  (г/с) в безграничной среде, движущейся с постоянной скоростью  $W$  в направлении оси  $x$ . Как и прежде, будем предполагать, что

коэффициенты диффузии равны и постоянны ( $k_y = k_z = k = \text{const}$ ), а диффузия вдоль оси  $x$  пренебрежимо мала по сравнению с конвективным переносом ( $k\partial^2 C/\partial x^2 \ll W\partial C/\partial x$ ). При этих предположениях стационарное уравнение конвективной диффузии консервативной примеси ( $Q_1 = 0$ ) принимает вид

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (3.23)$$

В соответствии с постановкой задачи решение этого уравнения должно удовлетворять следующим начально-краевым условиям:

$$\begin{aligned} C(0, y, z) &= \varphi(y, z), \\ C &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y, z \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (3.24)$$

и условию непрерывности

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} WC(x, y, z) dz dy = M, \quad (3.25)$$

или

$$W\varphi(y, z) = M\delta(y)\delta(z). \quad (3.26)$$

Фундаментальное решение уравнения (3.23) при условиях (3.24), как было показано выше, имеет вид

$$\begin{aligned} C(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi kx/W} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y-\eta)^2}{4kx/W} - \frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W} \right] \varphi(\eta, \zeta) d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Если источник точечный и расположен в начале координат ( $\eta = \zeta = 0$ ), то

$$\varphi(y, z) = \frac{M}{W} \delta(y)\delta(z),$$

и в этом частном случае интеграл в (3.27) сразу вычисляется, а выражение для концентрации от непрерывного точечного источника тогда принимает вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi kx} \exp \left( -\frac{(y^2 + z^2)}{4kx/W} \right). \quad (3.28)$$

Если среда анизотропна и коэффициенты диффузии в направлениях  $y$  и  $z$  различны, то легко показать, что соответствующее решение запишется в форме

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi x \sqrt{k_y k_z}} \exp \left[ -\frac{W}{4x} \left( \frac{y^2}{k_y} + \frac{z^2}{k_z} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом приближении концентрация от точечного непрерывного источника убывает вдоль оси  $x$  как  $x^{-1}$ , а ее распределение в  $y$  и  $z$  направлениях описывается нормальным законом Гаусса с дисперсиями  $\sigma_y^2 = 2k_y x/W$ ,  $\sigma_z^2 = 2k_z x/W$ . Если источник находится в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ , то соответствующее решение для концентрации от точечного непрерывного источника имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi(x-\xi)\sqrt{k_y k_z}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{(y-\eta)^2}{4k_y(x-\xi)/W} - \frac{(z-\zeta)^2}{4k_z(x-\xi)/W} \right]. \quad (3.30)$$

Если источник не точечный, а распределенный, и начальное распределение является гауссовым:

$$\varphi(y, z) = \frac{M}{2\pi\sigma_0^2 W} \exp \left[ -\frac{(y^2 + z^2)}{2\sigma_0^2} \right], \quad (3.31)$$

то, подставив выражение (3.31) в (3.27) и выполнив соответствующую операцию интегрирования, для концентрации от непрерывного распределенного источника в безграничной движущейся среде получим

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi(\sigma_0^2 + 2k_y x/W)W} \exp \left[ -\frac{(y^2 + z^2)}{2(\sigma_0^2 + 2k_x x/W)} \right]. \quad (3.32)$$

Можно показать, что в случае анизотропной среды, когда уравнение диффузии с постоянными коэффициентами записывается в форме

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

его решение для объемного источника имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi [(\sigma_0^2 + 2k_y x/W)(\sigma_0^2 + 2k_z x/W)]^{1/2} W} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{y^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_y x/W)} - \frac{z^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_z x/W)} \right]. \quad (3.33)$$

В целях придания решению канонической формы Гаусса удобно ввести соответствующие дисперсии:

$$\sigma_y^2 = \sigma_0^2 + 2k_y x/W, \quad \sigma_z^2 = \sigma_0^2 + 2k_z x/W. \quad (3.34)$$

Тогда выражение для концентрации (3.33) от непрерывного объемного источника с характерным параметром  $\sigma_0$  в анизотропной среде запишется в виде

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi\sigma_y\sigma_z W} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (3.35)$$

Рассмотрим еще аналогичный случай трехмерной диффузии. Однако пусть дополнительно имеется источниковый член  $Q$ , зависящий от координат, т. е.  $Q = f(x, y, z)$ . Тогда основное уравнение диффузии (3.23) будет

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z).$$

Пусть начальные и граничные условия имеют вид

$$C|_{x=0} = \varphi(y, z), \quad C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Тогда можно показать, что фундаментальное решение для концентрации запишется в форме [136]

$$C(x, y, z) = \frac{1}{4\pi k/W(x-\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{W}{4k} \frac{r^2}{(x-\xi)}} \varphi(y, z) dydz - \\ - \frac{1}{4\pi k/W(x-\xi)} \int_0^x \frac{1}{x-\xi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{W}{4k} \frac{r^2}{(x-\xi)}} \frac{f(x, y, z)}{W} dydz \right\} dx,$$

где  $r^2 = (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ .

### 3.4. Диффузия от непрерывного высотного линейного источника в полуограниченной движущейся среде

Обратимся теперь к рассмотрению следующего практически интересного случая, когда источник выбросов находится в полуограниченной движущейся среде и из экологических соображений уменьшения загрязнения окружающей среды расположен на некоторой высоте



над землей, вследствие использования высотных дымовых или вентиляционных труб. Математическая формулировка задачи в этом случае следующая.

Пусть пространство, где происходит диффузия от линейного непрерывного источника, ограничено плоскостью  $z = 0$  и простирается до бесконечности в положительном направлении оси  $z$ . Линейный источник ориентирован вдоль оси  $y$  и приподнят над плоскостью  $z = 0$  на высоту  $\zeta = H$ . Сносящий поток или ветер ориентирован вдоль оси  $x$ .

Основное уравнение конвективной диффузии при отсутствии источников и постоянстве коэффициента диффузии и скорости ветра имеет вид

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad z > 0, \quad x > 0. \quad (3.36)$$

В соответствии с постановкой задачи для решения уравнения (3.36) в рассматриваемом случае нужно задать начальное и граничное условия. Начальное условие, как и прежде, состоит в задании распределения концентрации в начальном сечении:

$$C(0, z) = \varphi(z). \quad (3.37)$$

В частном случае щель источника может быть бесконечно тонкой, т. е.

$$\varphi(z) = \frac{\overline{M}}{W} \delta(z - H). \quad (3.38)$$

Граничные условия для уравнения (3.36) могут быть разных типов в зависимости от характера взаимодействия примеси с поверхностью  $z = 0$ . Здесь будут рассмотрены два практически интересных случая. В первом плоскость  $z = 0$  является водной поверхностью, “мгновенно” поглощающей примесь, и граничное условие будет

$$C(x, 0) = 0. \quad (3.39)$$

Во втором случае, когда плоскость  $z = 0$  является ровной земной поверхностью, идеально отражающей примесь, граничное условие “отражения” имеет вид

$$k \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (3.40)$$

Фундаментальное решение двумерного уравнения (3.36), ограниченное на бесконечности, с начальным условием (3.37) было уже получено в виде

$$C(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (3.41)$$

Решение интересующей нас задачи диффузии от высотного непрерывного источника в полуограниченной среде можно получить на основе этого решения. Ограничимся пока рассмотрением первой краевой задачи с граничным условием первого рода (3.39).

Чтобы удовлетворить граничному условию  $C(x, 0) = 0$ , введем в рассмотрение вспомогательную функцию  $H(x, z)$ , определенную на бесконечной прямой  $-\infty < z < \infty$  и удовлетворяющую уравнению (3.36), а также условиям:

$$H(x, 0) = 0,$$

$$H(0, z) = \varphi(z) \quad \text{для } z > 0.$$

Учитывая вид решения (3.41) для  $C(x, z)$ , определяем функцию  $H(x, z)$  с помощью начальной функции  $\psi(z)$ , совпадающей с  $\varphi(z)$  для  $z > 0$  и являющейся нечетным продолжением  $\varphi(z)$  для  $z < 0$ , т. е.

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{для } z > 0, \\ -\varphi(-z) & \text{для } z < 0, \end{cases}$$

так, что

$$H(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) \psi(\zeta) d\zeta.$$

Тогда, рассматривая значение функции  $H(x, z)$  только в интересующей нас области  $z \geq 0$ , имеем

$$C(x, z) = H(x, z) \quad \text{при } z \geq 0.$$

Пользуясь определением функции  $\psi(z)$  и учитывая свойства интегралов от четных и нечетных функций, можно записать

$$H(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \left[ \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) \psi(\zeta) d\zeta + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) \psi(\zeta) d\zeta \right].$$

Меняя пределы интегрирования в первом интеграле и соединяя оба интеграла вместе, получаем искомое решение, не содержащее вспомо-

гательных функций и удовлетворяющее граничному условию (3.39):

$$C(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \times \int_0^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) - \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4kx/W}\right) \right] \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (3.42)$$

Легко заметить, что при  $z=0$  выражение в квадратных скобках обращается в нуль и, следовательно,  $C(x, 0) = 0$ . Если  $\varphi(z) = \overline{M}/W \delta(z-H)$ , то выражение для концентрации от непрерывного линейного источника, расположенного на высоте  $H$ , удовлетворяющее однородному граничному условию при  $z=0$ , принимает вид

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi kxW}} \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4kx/W}\right) - \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{4kx/W}\right) \right]. \quad (3.43)$$

Рассуждая аналогично, можно показать [140], что если функция  $\varphi(z)$  является четной функцией:  $\varphi(z) = \varphi(-z)$ , то

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{для всех } x > 0.$$

Действительно,

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-\zeta)}{2(kx/W)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) \varphi(\zeta) d\zeta \Bigg|_{z=0} = 0,$$

так как при  $z=0$  подынтегральная функция нечетна, если  $\varphi$  – четная.

Учитывая сказанное, можно показать [140], что решение уравнения диффузии (3.36) с однородным граничным условием второго рода (3.40) представляется в виде

$$C(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kx/W}} \times \int_0^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4kx/W}\right) + \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4kx/W}\right) \right] \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (3.44)$$

Уравнения (3.43) и (3.44) отличаются лишь знаком в квадратных скобках. Легко видеть, что если источник бесконечно тонкий и расположен на высоте  $H$ , то выражение для концентрации от такого непрерывного линейного источника, удовлетворяющее граничному условию “отражения”, имеет вид:

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi kxW}} \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4kx/W}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{4kx/W}\right) \right]. \quad (3.45)$$

Если источник представляет собой не бесконечно тонкую щель, и начальное распределение концентрации  $\varphi(z)$  в ней задано в виде кривой Гаусса с параметром распределения  $\sigma_0$ , т. е.

$$\varphi(z) = \frac{\overline{M}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 W} \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (3.46)$$

то соответствующее решение для концентрации от непрерывного линейного источника в полуограниченной движущейся среде будет

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}[1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\sqrt{2\pi}(\sigma_0^2 + kx/W)W} \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2kx/W)}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2kx/W)}\right) \right]. \quad (3.47)$$

Здесь верхний знак, т. е. плюс в квадратных скобках, соответствует граничному условию отражения (3.40), а нижний знак (минус) – граничному условию поглощения (3.39).

В частном случае, когда коэффициент диффузии прямо пропорционален величине скорости ветра, т. е.  $k = k_0 W$ , выражение для концентрации принимает вид

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}[1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\sqrt{2\pi}(\sigma_0^2 + k_0 x)W} \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_0 x)}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_0 x)}\right) \right]. \quad (3.48)$$

Если ввести дисперсию  $\sigma_z^2 = \sigma_0^2 + k_0 x$ , то выражение (3.48) запишет-

ся в более компактном виде:

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}[1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z W} \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right]. \quad (3.49)$$

### 3.5. Диффузия от непрерывного точечного и объемного источника в полуограниченной движущейся среде

Рассмотрим непрерывный источник примеси мощности  $M$  (г/с), расположенный в некоторой точке с координатами  $(0, 0, H)$  в полупространстве  $z > 0$ . Если примесь легкая ( $w_g = 0$ ) и консервативная ( $Q_1 = 0$ ), а скорость сносящего ветрового потока  $W$  и коэффициенты диффузии постоянны ( $k_y = k_z = k = \text{const}$ ), то, пренебрегая диффузией вдоль оси  $x$ , которая совпадает со средним направлением ветра, по сравнению с конвективным переносом, уравнение диффузии для концентрации записывается в виде

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (3.50)$$

В соответствии с постановкой задачи интересующее нас решение должно удовлетворять начальному условию

$$C(0, y, z) = \varphi(y, z) \quad (3.51)$$

и быть ограниченным на бесконечности, т. е.

$$C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y, z \rightarrow \infty. \quad (3.52)$$

Учет трехмерности процесса диффузии в движущейся среде и наличие ограничивающей поверхности естественно приводит к некоторому усложнению задачи. Однако в рассматриваемой случае постоянных коэффициентов, фундаментальное решение уравнения (3.50), удовлетворяющее начальному условию (3.51) и условиям на бесконечности, легко записывается по аналогии с нестационарной задачей в виде

$$C(x, y, z) = \frac{1}{4\pi kx/W} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4kx/W}\right] \varphi(\eta, \zeta) d\eta d\zeta. \quad (3.53)$$

Рассмотрим сначала случай точечного источника мощности  $M$ , приподнятого над ровной поверхностью земли на высоту  $H$ . Тогда

$$\varphi(y, z) = \frac{M}{W} \delta(y) \delta(z - H). \quad (3.54)$$

В этом случае интегралы в (3.53) легко вычисляются с использованием свойств  $\delta$ -функции и решение для концентрации принимает вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi kx} \exp\left(-\frac{y^2}{4kx/W}\right) \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4kx/W}\right). \quad (3.55)$$

Поскольку источник выброса вещества находится в полуограниченной области, то решение дополнительно должно удовлетворять граничному условию при  $z = 0$ .

Поверхность земли обычно считается непроницаемой поверхностью, а поверхность воды считается идеально поглощаемой поверхностью. Математическим условием для непроницаемой поверхности является равенство нулю потока вещества на ней, т. е.

$$k \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (3.56)$$

а для поглощаемой поверхности – равенство нулю самой концентрации

$$C|_{z=0} = 0. \quad (3.57)$$

Построение решения с такими граничными условиями для линейного источника уже было рассмотрено выше. Используя те же рассуждения, решение задачи диффузии от точечного непрерывного источника в полуограниченной движущейся среде с однородным граничным условием, выражающим условие поглощения, записывается в виде

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi kx} \exp\left(-\frac{y^2}{4kx/W}\right) \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4kx/W}\right) - \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{4kx/W}\right) \right]. \quad (3.58)$$

Нетрудно видеть, что  $C(x, y, z) = 0$  при  $z = 0$ .

Искомое решение для граничного условия второго рода (3.56) можно также построить путем следующих рассуждений. Полуограниченная среда  $z > 0$  заменяется безграничной средой  $-\infty \leq z \leq \infty$ , а непроницаемая граница  $z = 0$  уничтожается, но ее действие учитывается путем рассмотрения не только действительного источника

в точке  $(0, 0, H)$ , но также его отражения относительно плоскости  $z = 0$ , т.е. источника равной мощности в точке  $(0, 0, -H)$ . Тогда искомая концентрация в любой точке в области  $z > 0$  будет равна сумме концентраций от обоих источников, и вследствие симметрии в плоскости  $z = 0$  будет удовлетворяться условие отсутствия потока вещества через плоскость  $z = 0$ . Таким образом, искомое решение для поля концентрации от непрерывного точечного источника в движущейся среде, приподнятого над поверхностью земли на высоту  $H$ , будет определяться суммой концентраций от двух источников:

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi kx} \exp\left(-\frac{y^2}{4kx/W}\right) \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4kx/W}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{4kx/W}\right) \right]. \quad (3.59)$$

Легко видеть, что выражения (3.58) и (3.59), как и в случае линейного источника, отличаются лишь знаками. Очевидно, что решение (3.59) для непрерывного точечного источника в полуограниченной среде обладает необходимыми свойствами, когда  $x, y \rightarrow 0$ , а  $z \rightarrow H$  и удовлетворяет условию сохранения примеси для всех  $x > 0$ .

Если источник выброса не точечный, а распределенный, и начальное распределение концентрации имеет гауссов вид

$$\varphi(y, z) = \frac{M}{2\pi\sigma_0^2 W} \exp\left(-\frac{y^2 + (z-H)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (3.60)$$

где  $\sigma_0$  – параметр распределения, то, подставляя выражение (3.60) в (3.53), после простых вычислений получаем, что распределение концентрации в этом случае описывается следующим выражением:

$$C(x, y, z) = \frac{M[1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{2\pi(\sigma_0^2 + 2kx/W)W} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma_0^2 + 2kx/W)}\right) \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2kx/W)}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2kx/W)}\right) \right], \quad (3.61)$$

причем знак плюс соответствует решению с условием непроницаемости границы, а минус – решению с условием поглощения на границе  $z = 0$ .

В случае анизотропной среды для объемного источника, припод-

нятого на высоту  $H$ , в полуограниченной движущейся среде имеем:

$$C(x, y, z) = \frac{M [1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{2\pi W \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_y x/W} \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_z x/W}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_y x/W)}\right) \times \quad (3.62) \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_z x/W)}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_z x/W)}\right) \right].$$

Если ввести дисперсии и, как раньше, обозначить

$$\sigma_y^2 = \sigma_0^2 + 2k_y x/W, \quad \sigma_z^2 = \sigma_0^2 + 2k_z x/W, \quad (3.63)$$

то выражение для концентрации (3.62) примет уже знакомый гауссов вид

$$C(x, y, z) = \frac{M [1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{2\pi\sigma_y\sigma_z W} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \quad (3.64) \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right].$$

Нетрудно видеть, что для перехода от формул для объемного источника к формулам для точечного источника достаточно положить параметр  $\sigma_0 = 0$ , а чтобы получить формулу для поля приземной концентрации, следует положить  $z = 0$ , и тогда получим хорошо известное выражение

$$C(x, y, 0) = \frac{M}{\pi\sigma_y\sigma_z W} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (3.65)$$

Если примесь радиоактивная, то, как было показано выше, необходимо учесть поправку на радиоактивный распад путем умножения на соответствующую экспоненту. В этом случае формула для концентрации радиоактивной примеси от точечного или объемного непрерывного источника в полуограниченной движущейся среде будет иметь вид

$$C(x, y, z) = \frac{M [1 \pm \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{2\pi\sigma_y\sigma_z W} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \quad (3.66) \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right) \pm \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right) \right] \exp(-\lambda t),$$



где дисперсии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  определены соотношениями (3.63);  $\lambda$  – постоянная распада рассматриваемого нуклида;  $t$  – время после выброса ( $t = x/W$ ).

В заключение отметим, что хотя эти простые решения должны рассматриваться лишь в качестве первого приближения для реальной атмосферной диффузии загрязнений, тем не менее эти формулы часто являются основополагающими в различных инженерных расчетах при прогнозировании рассеивания дыма и газа в атмосфере. При этом обычно используются некоторые “эффективные” значения коэффициентов  $k_y$  и  $k_z$  или дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ .

### 3.6. Нестационарная диффузия от мгновенного точечного источника в безграничной и полуограниченной движущейся среде

В общем случае получить аналитическое решение уравнения нестационарной диффузии (1.24) с произвольными граничными условиями не представляется возможным. Однако для различных идеализированных ситуаций удается построить аналитические решения, которые оказываются полезными как сами по себе, так и при тестировании более сложных решений, полученных с помощью численных методов.

Простейшая ситуация, для которой существует аналитическое решение нестационарного уравнения диффузии в движущейся среде, связана с одномерной нестационарной диффузией примеси в безграничной среде, когда уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + W \frac{\partial C}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

в котором скорость  $W$  и коэффициент диффузии  $k_x = k$  постоянны. Физически это уравнение описывает диффузию, когда примесь поступает в движущуюся в направлении  $x$  среду от нестационарного плоского источника с интенсивностью  $\overline{Q}$  единиц массы с единицы площади. Хорошо известно, что решение этого уравнения имеет вид

$$C(x, t) = \frac{\overline{Q}}{2\sqrt{\pi kt}} \exp [-(x - Wt)^2/4kt].$$

Рассмотрим теперь более общий случай нестационарной трехмерной диффузии пассивной примеси от точечного мгновенного источника, выбросившего  $Q$  грамм вещества (или  $Q$  кюри активности) в безграничную среду, движущуюся с постоянной скоростью  $W$  в

направлении оси  $x$ . Пусть для простоты пока область будет безграничной, и источник расположен в начале неподвижной системы координат  $Oxyz$ , а коэффициенты диффузии во всех трех направлениях пусть будут одинаковы и постоянны ( $k_x = k_y = k_z = k = \text{const}$ ). Тогда для описания процесса рассеивания примеси можно использовать следующее уравнение нестационарной турбулентной диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + W \frac{\partial C}{\partial x} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (3.67)$$

Решение этого уравнения, ограниченное на бесконечности и отвечающее наличию мгновенного точечного источника, будем искать в виде

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi k)^{3/2}} t^\alpha \exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2 + y^2 + z^2}{4kt} \right], \quad (3.68)$$

где  $\alpha$  – неизвестная постоянная. Вычислим соответствующие производные  $\partial C/\partial t$ ,  $\partial C/\partial x$ ,  $\partial C^2/\partial x^2$ ,  $\partial C^2/\partial y^2$ ,  $\partial C^2/\partial z^2$  и подставим их значения в уравнение (3.67). Выполнив затем простые преобразования и приравняв показатели степени при переменной  $t$ , находим, что значение  $\alpha = -3/2$ . Таким образом, искомое решение уравнения (3.67) имеет вид

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2 + y^2 + z^2}{4kt} \right]. \quad (3.69)$$

Из полученного решения для мгновенного источника (3.69) можно получить распределение концентрации от непрерывного точечного источника (3.28). В самом деле, непрерывный точечный источник эквивалентен ряду элементарных точечных источников. Пусть за время  $dt$  источник дает  $Q = M dt$  грамм вещества. Полная концентрация, созданная непрерывным точечным источником мощностью  $M$  г/с за интервал времени от 0 до  $t$ , будет равна соответствующему интегралу по времени от выражения (3.69). Если источник установившийся, т. е. действует неограниченно долго ( $t \rightarrow \infty$ ), то формула для концентрации может быть получена следующим образом.

Введем в рассмотрение соотношение для расстояния  $r$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Тогда выражение (3.69) на интервале времени  $dt$  можно преобразовать к следующему виду:

$$dC(x, y, z) = \frac{M dt}{(4\pi kt)^{3/2}} \exp \left( \frac{Wx}{2k} \right) \exp \left[ -\frac{r^2}{4kt} - \frac{(Wt)^2}{4kt} \right]. \quad (3.70)$$

Введем новую переменную  $\tau^2 = r^2/(4kt)$  и проинтегрируем (3.70) по переменной  $\tau$  от 0 до  $\infty$ . Тогда имеем

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi^{3/2}kr} \exp\left(\frac{Wx}{2k}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\tau^2 - \frac{W^2r^2}{16k^2\tau^2}\right) d\tau.$$

Полученный интеграл относится к числу табличных [69]:

$$\int_0^\infty \exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-2a).$$

Воспользовавшись этим, после простых преобразований находим:

$$C(x, y, z) = \frac{M}{4\pi kr} \exp\left[-\frac{W}{2k}(|r| - x)\right] \approx \frac{M}{4\pi kx} \exp\left[-\frac{W(y^2 + z^2)}{4kx}\right], \quad (3.71)$$

т.е. выражение (3.71) совпадает с (3.28).

В случае анизотропной среды, когда коэффициенты диффузии неодинаковы, исходное уравнение нестационарной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + W \frac{\partial C}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (3.72)$$

Можно показать, что его решение в рассматриваемом случае записывается в форме

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{k_x k_y k_z}} \exp\left[-\frac{(x - Wt)^2}{4k_x t} - \frac{y^2}{4k_y t} - \frac{z^2}{4k_z t}\right]. \quad (3.73)$$

Убедиться в этом можно путем простых вычислений соответствующих производных и их подстановки в исходное уравнение (3.72).

Если мгновенный источник находился в точке с координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$ , то выражение для концентрации запишется соответственно в виде

$$C(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{k_x k_y k_z}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x - Wt - \xi)^2}{4k_x t} - \frac{(y - \eta)^2}{4k_y t} - \frac{(z - \zeta)^2}{4k_z t}\right]. \quad (3.74)$$

Выше уже отмечалось, что среди практических приложений теории турбулентной диффузии значительное место занимают работы,

посвященные диффузии газоаэрозольных выбросов в пограничном слое атмосферы. Специфика этих задач состоит в том, что диффузия физически происходит в полупространстве, ограниченном твердой или жидкой подстилающей поверхностью. Поэтому решение уравнения (3.72), отвечающее наличию мгновенного источника, выбросившего  $Q$  грамм вещества из точки  $P(0, 0, H)$ , приподнятой над ровной поверхностью земли на высоту  $H$ , может быть найдено, как и ранее, и записано в форме

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{k_x k_y k_z}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{(x - Wt - \xi)^2}{4k_x t} - \frac{(y - \eta)^2}{4k_y t} \right] \times \\ \times \left[ \exp \left( -\frac{(z - H)^2}{4k_z t} \right) \pm \exp \left( -\frac{(z + H)^2}{4k_z t} \right) \right]. \quad (3.75)$$

При этом знак плюс в последней квадратной скобке соответствует краевому условию отражения на поверхности земли ( $k_z \partial C / \partial z = 0$  при  $z = 0$ ), а знак минус – краевому условию поглощения ( $C = 0$  при  $z = 0$ ).

Если в этой формуле коэффициенты диффузии, как и выше, выразить через соответствующие дисперсии  $\sigma_i^2 = 2k_i t$ , то формула (3.75) для мгновенного, например, радиоактивного выброса от высотного точечного источника принимает вид

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \times \\ \times \left[ \exp \left( -\frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2} \right) \pm \exp \left( -\frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2} \right) \right] \exp(-\lambda t), \quad (3.76)$$

где  $Q$  характеризует количество вещества или активность источника выбросов в граммах или Кюри (Беккерелях) соответственно.

### 3.7. Диффузия от непрерывных наземных источников в движущейся среде

Выше рассмотрены задачи диффузии, в которых источник выброса вещества находится в безграничной или полуограниченной области. В последнем случае предполагается, что источник приподнят над землей на некоторую высоту  $H$ . Полученные при этом формулы

для поля концентраций как от точечного, так и линейного источников, зависят от степени этой приподнятости  $H$ . Имея эти зависимости, легко перейти к более простому случаю, когда источник находится на уровне земли. При этом предполагается, что поверхность земли ровная и ветровой поток горизонтальный.

Рассмотрим случай наземного непрерывного точечного источника. Практический интерес представляет случай с граничным условием отражения ( $k_z \partial C / \partial z = 0$  при  $z = 0$ ). Тогда, полагая в формуле (3.59)  $H = 0$ , для концентрации от наземного непрерывного точечного источника в движущейся среде имеем

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi kx} \exp\left(-\frac{W}{4kx}(y^2 + z^2)\right). \quad (3.77)$$

Эта формула показывает, что выброс от непрерывного наземного точечного источника расширяется вертикально и горизонтально с удалением от источника. Сравнивая выражение (3.77) с формулой для концентрации от непрерывного точечного источника в безграничной движущейся среде (3.28) легко видеть, что в рассматриваемом случае наземного источника действие непроницаемой границы таково, что поле концентраций в любой точке в два раза больше, чем для источника в безграничной среде.

Совершенно аналогично обстоит дело и с непрерывным наземным линейным источником. Полагая в формуле (3.45)  $H = 0$ , для концентрации имеем

$$C(x, z) = \frac{\bar{M}}{\sqrt{\pi kxW}} \exp\left(-\frac{Wz^2}{4kx}\right). \quad (3.78)$$

Из формулы (3.78) следует, что примесь от наземного линейного источника движется по направлению ветра в виде сильно вытянутого и вертикально расширяющегося облака. Угол расширения зависит от скорости ветра  $W$ .

### 3.8. Нестационарная диффузия конечного облака примеси в полуограниченной движущейся среде

Рассмотрим интересный для практики случай диффузии конечного сферического облака примеси в атмосфере, образовавшегося в результате взрыва, например, снаряда или залпового аварийного выброса. Пусть это облако в начальный момент времени  $t_0 = 0$  заполнено газоаэрозольным веществом, и распределение концентрации в

нем подчинено закону Гаусса с дисперсиями  $S_x, S_y, S_z$ , которые примем одинаковыми  $S_i = S$  и равными  $S = R_0/2$ , где  $R_0$  – эффективный радиус облака, центр которого находится на высоте  $H$  над поверхностью земли. Пусть максимальное значение концентрации  $C_{m0}$  равно  $4/3$  от средней концентрации  $C_0$  в облаке радиуса  $R_0$ . При  $t > 0$  облако оказывается в сносящем ветровом потоке, и концентрация в нем благодаря механизму диффузии становится функцией координат и времени.

При моделировании рассматриваемого нестационарного процесса диффузии облака рассмотрим полуограниченную область. Начало декартовой системы координат  $Oxyz$  расположим на поверхности земли (плоскость  $Oxy$ ), а центр рассматриваемого облака в момент  $t = 0$  имеет координаты  $(0, 0, H)$ . Для описания процесса рассеивания примеси, содержащейся в облаке в области  $z > 0$ , используем трехмерное уравнение нестационарной турбулентной диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \\ = k_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - (\lambda + \Lambda)C. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Здесь  $u, v, w$  – соответствующие компоненты скорости конвективного переноса примеси;  $k_x, k_y, k_z$  – коэффициенты диффузии, которые примем различными, но постоянными;  $\lambda = 0.693/T_{1/2}$ ;  $T_{1/2}$  – период полураспада рассматриваемого нуклида;  $\Lambda$  – постоянная вымывания примеси осадками.

В соответствии с постановкой задачи решение уравнения (3.79) должно удовлетворять следующим начально-краевым условиям:

$$\begin{aligned} C(x, y, z, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x, y, z \rightarrow \infty, \quad k_z \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \\ C(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) = \\ = \frac{Q}{8\pi S^3} \exp \left[ -\frac{x^2}{2S^2} - \frac{y^2}{2S^2} - \frac{(z-H)^2}{2S^2} \right], \end{aligned} \quad (3.80)$$

где  $\varphi(x, y, z)$  – начальное распределение примеси в облаке;  $Q$  – количество выброшенного загрязнителя (радиоактивности), связанное с начальной концентрацией в облаке соотношением  $Q = 4/3 \pi R_0^3 C_0$ .

Введем в рассмотрение новые независимые переменные

$$x_1 = x - u\tau, \quad y_1 = y - v\tau, \quad z_1 = z - w\tau, \quad \tau = t. \quad (3.81)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y_1}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} - u \frac{\partial}{\partial x_1} - v \frac{\partial}{\partial y_1} - w \frac{\partial}{\partial z_1},\end{aligned}\quad (3.82)$$

уравнение (3.79) в новых переменных преобразуется к виду

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = k_x \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y_1^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z_1^2} - (\lambda + \Lambda)C. \quad (3.83)$$

Аналитическое решение такого уравнения рассматривалось выше и имеет вид

$$\begin{aligned}C(x_1, y_1, z_1, \tau) &= \frac{\text{const exp}[-(\lambda + \Lambda)\tau]}{(2\sqrt{\pi\tau})^3 (k_x k_y k_z)^{1/2}} \times \\ &\times \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x_1^2}{4k_x\tau} - \frac{y_1^2}{4k_y\tau} - \frac{(z_1 - H)^2}{4k_z\tau}\right] \times \\ &\times \varphi(x_1, y_1, z_1) dx_1 dy_1 dz_1.\end{aligned}\quad (3.84)$$

Выполнив в (3.84) операцию интегрирования при заданном  $\varphi$  в виде (3.80) и возвращаясь к первоначальным переменным, для концентрации примеси в воздухе получим

$$\begin{aligned}C(x, y, z, t) &= \frac{\text{const exp}[-(\lambda + \Lambda)t]}{\pi^{3/2} [(S^2 + 2k_x t)(S^2 + 2k_y t)(S^2 + 2k_z t)]^{1/2}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(x - ut)^2}{2(S^2 + 2k_x t)} - \frac{(y - vt)^2}{2(S^2 + 2k_y t)} - \frac{(z - H - wt)^2}{2(S^2 + 2k_z t)}\right].\end{aligned}\quad (3.85)$$

Вспомним теперь, что в задачах атмосферной диффузии приближенно принимают, что скорость среды имеет компоненты  $u = W$ ,  $v = 0$ ,  $w = -w_g$ , где  $W$  – скорость ветра в направлении оси  $x$ ,  $w_g$  – вертикальная скорость гравитационного осаждения (подъема) примеси. Кроме того, рассматриваемое облако с примесью находится в полуограниченной области. Учитывая эти замечания, можно показать, что выражение для концентрации, удовлетворяющее граничному условию непроницаемости на поверхности земли, принимает

вид

$$\begin{aligned}
 C(x, y, z, t) &= \frac{\text{const} \exp[-(\lambda + \Lambda)t]}{\pi^{3/2} [(S^2 + 2k_x t)(S^2 + 2k_y t)(S^2 + 2k_z t)]^{1/2}} \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2}{2(S^2 + 2k_x t)} - \frac{y^2}{2(S^2 + 2k_y t)} \right] \times \\
 &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - H + w_g t)^2}{2(S^2 + 2k_z t)} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + H - w_g t)^2}{2(S^2 + 2k_z t)} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Если теперь в формуле (3.86) определить const из начального условия (3.80), а коэффициенты диффузии  $k_i$  заменить дисперсиями  $\sigma_i$  согласно соотношениям Тейлора  $\sigma_i^2 = 2k_i t$ , то распределение концентрации в воздухе в момент времени  $t$  будет определяться выражением

$$\begin{aligned}
 C(x, y, z, t) &= \frac{Q \exp[-(\lambda + \Lambda)t]}{8\pi \left[ 1 + \exp \left( -2\frac{H^2}{S^2} \right) \right]} \times \\
 &\times \frac{\exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2}{2(S^2 + \sigma_x^2)} - \frac{y^2}{2(S^2 + \sigma_y^2)} \right]}{[(S^2 + \sigma_x^2)(S^2 + \sigma_y^2)(S^2 + \sigma_z^2)]^{1/2}} \times \\
 &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - H + w_g t)^2}{2(S^2 + \sigma_z^2)} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + H - w_g t)^2}{2(S^2 + \sigma_z^2)} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Введем в рассмотрение суммарные дисперсии  $\Sigma_x$ ,  $\Sigma_y$ ,  $\Sigma_z$  согласно соотношениям

$$\Sigma_x^2 = S^2 + \sigma_x^2, \quad \Sigma_y^2 = S^2 + \sigma_y^2, \quad \Sigma_z^2 = S^2 + \sigma_z^2. \tag{3.88}$$

Тогда окончательное выражение для концентрации в воздухе примет следующий более компактный вид

$$\begin{aligned}
 C(x, y, z, t) &= \frac{Q \exp[-(\lambda + \Lambda)t]}{8\pi \left[ 1 + \exp \left( -2\frac{H^2}{S^2} \right) \right] \Sigma_x \Sigma_y \Sigma_z} \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2}{2\Sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\Sigma_y^2} \right] \times \\
 &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - H + w_g t)^2}{2\Sigma_z^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + H - w_g t)^2}{2\Sigma_z^2} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$



Дисперсии  $\Sigma_x$ ,  $\Sigma_y$ ,  $\Sigma_z$  зависят от начального размера облака  $R_0$ , связанного с параметром  $S$ , удаления от источника выброса  $x$  и состояния устойчивости атмосферных условий. Они могут быть определены по каким-либо известным в теории атмосферной диффузии полуэмпирическим зависимостям. Например, в форме, которая будет обоснована ниже при рассмотрении струйно-диффузионной модели.

Рассмотренные выше задачи диффузии от линейных, точечных и распределенных источников предполагали простейшую модель атмосферы, которая представляла собой однородную или анизотропную среду с постоянными по высоте скоростью ветра и температурой. В действительности атмосфера не является такой, и ее состояние характеризуется рядом параметров. Поэтому для повышения точности описания процессов рассеивания газоаэрозольных выбросов в атмосфере необходимо учитывать эти дополнительные параметры и факторы, а для этого целесообразно рассмотреть основные особенности и характеристики турбулентной атмосферы, что будет сделано в следующей главе.

## Глава 4

# ОСОБЕННОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ ПРИМЕСЕЙ В ТЕРМИЧЕСКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ

### 4.1. Общий характер ветрового потока и приземный слой атмосферы

Большое влияние на уровень загрязнения атмосферы оказывает скорость ветрового потока. Вследствие этой и ряда других причин проблеме изучения структуры ветрового потока в верхних и нижних слоях атмосферы различными исследователями уделялось значительное внимание. В результате к настоящему времени достаточно полно изучен общий характер и структура полей скорости и температуры в атмосфере.

Движение воздуха в средней тропосфере происходит вследствие наличия градиента давления и вращения Земли. На высоте более 500 м над уровнем земли установившееся движение воздуха близко к геострофическому ветру [104]. В нижних слоях движение более сложное вследствие возмущающего влияния реальной земной поверхности. В этих слоях профиль скорости ветра и его пульсационная структура зависят от силы трения, величина которой определяется характером поверхности земли и распределением плотности по вертикали. Дополнительные трудности возникают за счет наличия местных воздушных течений, не связанных с основным полем давления, особенно ночью в холмистой или горной местности.

Характерной чертой движения воздуха в нижних слоях атмосферы является суточное изменение направления и скорости ветра. В континентальных областях ветер в самых нижних слоях днем достигает максимальной скорости со слабо выраженным пиком около полудня. На высоте порядка 100 ÷ 300 м наблюдается обратный ход с максимумом скорости ночью и минимумом днем. На промежуточных высотах характер изменения более сложный.

Имеющиеся представления о суточном изменении скорости ветра над большими водными акваториями говорят о том, что амплитуда колебания над водой значительно меньше, чем над сушей. На побережье нормальный суточный ход нарушается бризами.

Направление ветра в различных регионах также подвержено суточному изменению. Однако регулярность такого изменения обычно

нарушается локальными явлениями, особенно в ночное время. Когда подстилающая поверхность теплее воздуха, турбулентный поток тепла направлен вверх, и тогда силы плавучести действуют как источник энергии турбулентности. В противоположном случае эти силы плавучести подавляют турбулентность. В конвективных условиях энергия за счет сил плавучести поступает к вихрям больших размеров, поэтому в спектре возмущений начинают преобладать вихри с масштабами, большими, чем в случае нейтральной стратификации.

Таким образом, поток лучистой энергии к земной поверхности, свойство прилипания воздуха и сложная орография обуславливают существование в нижнем слое атмосферы специфических особенностей распределения температуры и скорости воздуха. Этот нижний слой принято называть приземным пограничным слоем атмосферы. Следует отметить, что наряду с этим в атмосфере могут существовать и другие пограничные слои меньших масштабов. Например, пограничный слой, возникающий в воздушном потоке, который переходит с одной подстилающей поверхности (равнина) на другую (водоем, лес), или пограничный слой, связанный с обтеканием отдельного холма или другого препятствия.

Конвективное движение сплошной среды обуславливает конвективный перенос газоаэрозольных выбросов. В интересующем нас классе задач атмосферной диффузии характерно наличие как вынужденной ветровой конвекции, так и свободной, когда движение обусловлено действием сил плавучести в гравитационном поле земли.

Характерной особенностью приземного пограничного слоя является то, что профили метеорологических параметров в нем формируются взаимосвязанно и при установившемся состоянии определяются следующими основными внешними факторами: горизонтальным градиентом давления, притоком солнечной радиации, теплофизическими параметрами подстилающей поверхности, ее шероховатостью, а также температурой, влажностью и скоростью ветра вне приземного слоя. Изменение любого из этих факторов приводит к изменению всех характеристик пограничного слоя атмосферы. Имеющиеся многочисленные опытные данные показывают, что наибольшие градиенты скорости ветра обычно наблюдаются вблизи поверхности земли, а в целом динамическое влияние земной поверхности обнаруживается в среднем до высот порядка  $1.5 \div 2$  км.

К настоящему времени форма профиля скорости ветра вблизи земли изучена многими исследователями при различных метеорологических условиях. Характерной их чертой является то, что при условиях небольшого температурного градиента зависимость  $W$  от  $\log z$  в рассматриваемом инерционном слое линейна, а при других

Табл. 4.1. Характерные величины  $z_0$  и  $v_*$  для естественных поверхностей по Сэттону [138]

Тип поверхности	$z_0$ , см	$v_*$ , м/с
Очень гладкая (вода, лед)	0.001	0.16
Луг с травой (высота до 1 см)	0.1	0.26
Равнина, редкая трава (до 10 см)	0.7	0.36
Густая трава (до 10 см)	2.3	0.45
Редкая трава (до 50 см)	5.0	0.55
Густая трава (до 50 см)	9.0	0.63

условиях значительно отклоняется от прямой линии. При сверхрадиационных градиентах график связи  $W$  с  $\log z$  становится выпуклым по отношению к равновесному случаю, а в период инверсий – вогнутым. Если температурный градиент в приземном слое атмосферы незначительный, т.е. воздух фактически является однородным по плотности, то движение должно быть таким же, как и в лабораторных экспериментах при исследовании потока над плоской поверхностью. Следовательно, профиль естественного ветра можно описывать известным логарифмическим законом для потока над гладкой и шероховатой поверхностью. Однако следует помнить, что большая часть земли покрыта мощной растительностью (высокой травой, посевами хлебов, кустарниками или деревьями), и в этих условиях профиль скорости становится более сложным, и его математическое представление, в зависимости от целей расчета, нуждается в уточнении. К настоящему времени имеется обширный материал, позволяющий оценивать величину динамической скорости  $v_*$  и параметр шероховатости  $z_0$  для разнообразных естественных поверхностей. Так, Сэттоном [138] приводятся данные, представленные в табл. 4.1.

Другие характерные данные по значению параметра шероховатости  $z_0$  для различных типов микрорельефа поверхности представлены в табл. 4.2.

В случае большой по площади водной поверхности распределение скорости ветра может существенно отличаться от вертикального профиля ветра над сушей главным образом из-за образования волн. Еще Россби и Монтгомери [138], рассматривая условия на границе вода–воздух, пришли к заключению, что взаимодействие происходит как через тангенциальное, так и через нормальное напряжение, причем последнее существенно только при сильных ветрах. Для слабых ветров профиль вполне удовлетворительно описывается обычным логарифмическим законом. Для умеренных и сильных ве-

Табл. 4.2. Параметр шероховатости  $z_0$  для различных типов микрорельефа поверхности

Микрорельеф	$z_0$ , см
Снег, газон высотой 1 см	0.1
Скошенная и низкая трава до 15 см	$0.6 \div 2$
Высокая трава до 60 см	$4 \div 9$
Неоднородная поверхность с чередующимися участками травы, кустарником и т. п.	$10 \div 20$
Парк, лес высотой до 10 м	$20 \div 100$
Городские постройки	100

тров поверхность становится аэродинамически шероховатой. Критическая скорость равна примерно  $6 \div 7$  м/с. При скорости больше указанного значения поверхность считается шероховатой с параметром  $z_0 = 0.6 \div 1$  см. В общем случае вопрос структуры ветрового потока над водной поверхностью изучен еще недостаточно.

В задаче о турбулентной диффузии особый интерес представляет пульсационная структура потока. Однако ее измерение в естественных условиях требует особой тщательности и корректности. Анализ такой информации должен учитывать и масштабы турбулентности, и температурные градиенты. Сведения, полученные до сих пор, нуждаются в дальнейшем уточнении и углублении.

Отдельные сооружения, городские здания и т. д. в целом представляют собой препятствия, под влиянием которых скорость ветра в городе, как правило, ослаблена по сравнению с загородной зоной. По мере застройки городов скорость ветра несколько уменьшается. Наиболее значительное ослабление ветра в городе наблюдается вблизи земной поверхности, хотя в целом внутри города распределение скорости ветра, температуры и влажности воздуха отличается большим разнообразием. В городе преобладает направление ветра вдоль улиц. При ветре, дующем в поперечном к улице направлении, скорость ветра на подветренной стороне зданий в  $2 \div 3$  раза меньше, чем на наветренной. Жилые и промышленные здания, изменяя скорость и направление ветра, оказывают большое влияние на перераспределение загрязняющих веществ внутри города.

Изменение скорости ветра с высотой над городом обычно описывается с помощью тех же уравнений и формул, которые получены в гидромеханике для естественных сильно шероховатых поверхностей, в частности для леса. В уравнениях движения в случае таких поверхностей наряду с градиентом давления и силой турбулентного трения

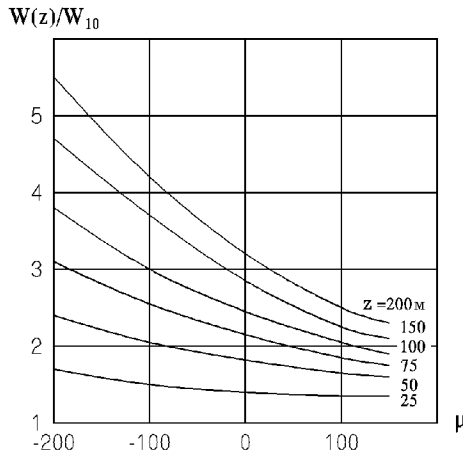


Рис. 4.1. Зависимость относительной скорости ветра от высоты  $z$  и параметра устойчивости  $\mu$  [52]

необходимо учесть силу сопротивления, возникающую при взаимодействии потока с препятствиями. Кроме того, данные наблюдений показывают, что изменения ветра с высотой существенно зависят от термической стратификации атмосферы.

На рис. 4.1 приведена построенная по данным наблюдений в Санкт-Петербурге на телемачте номограмма для определения отношения  $W(z)/W_{10}$  на различных высотах при разных значениях безразмерного параметра

$$\mu = \frac{g}{2fW_{132}} \frac{T_2 - T_{164}}{T_{132}}, \quad (4.1)$$

характеризующего устойчивость атмосферы [52]. Здесь  $T_2$ ,  $T_{132}$ ,  $T_{164}$  — температура воздуха на высоте 2, 132 и 164 м соответственно;  $W_{10}$  и  $W_{132}$  — скорость ветра на высоте 10 м (флюгер) и 132 м;  $g$  — ускорение свободного падения;  $f$  — параметр Кориолиса. Параметр  $\mu > 0$  при падении температуры с высотой и  $\mu < 0$  при инверсионной стратификации.

Согласно существующим физическим представлениям скорость ветра быстро растет с высотой при инверсиях и сравнительно медленно убывает при падении температуры, в том числе и при неустойчивой стратификации. Так (см. рис. 4.1), при  $\mu = -100$  скорость ветра на высоте 150 м по сравнению с таковой на уровне 10 м увели-

чивается примерно в 3.8 раза, в то же время при  $\mu = 100$  на высоте 150 м скорость ветра лишь в 2.2 раза больше  $W_{10}$ .

## 4.2. Уравнения гидротермодинамики для приземного слоя атмосферы

Если говорить строго, то атмосферный воздух представляет собой смесь газов, содержащую множество взвешенных твердых и жидких частиц естественного и антропогенного происхождения. Если в этой смеси все ингредиенты по своему фазовому составу одинаковы, то такую смесь называют гомогенной, а в противном случае – гетерогенной. При теоретическом изучении атмосферной диффузии предполагают, что в элементарном объеме смеси, несмотря на его малость, содержится достаточно большое количество частиц, чтобы было справедливо статистическое осреднение. Поэтому при математическом моделировании гидротермодинамики атмосферы обычно исходят из общих уравнений движения механики сплошной среды. Эти уравнения в общем случае выражают закон изменения количества движения, закон сохранения массы воздуха и водяного пара, закон сохранения энергии, уравнение состояния среды и уравнение переноса концентрации примесей. При этом приток тепла к воздуху часто считают известным как функцию координат и времени.

При изучении движения атмосферного воздуха в качестве характерных динамических переменных используются плотность воздуха  $\rho$ , давление  $p$ , вектор скорости  $\vec{v}$ , а также дополнительные термодинамические переменные: температура  $T$ , внутренняя энергия на единицу массы  $e$ , удельная энтальпия  $S$ .

Рассмотрим основные термодинамические соотношения. В нашем анализе будем предполагать, что воздух является однородным совершенным газом, для которого справедливо следующее уравнение состояния:

$$p = \rho RT.$$

Здесь  $R = c_p - cv$  – газовая постоянная. В реальных газах внутренняя энергия  $e$  является функцией температуры и плотности, т.е.  $e = e(T, \rho)$ , однако для атмосферных процессов, если не рассматривать процессы, связанные с фазовыми превращениями, можно считать, что энергия  $e$  зависит только от температуры, т.е. можно считать, что  $e = e(T)$ .

По определению удельная теплоемкость при постоянном объеме

$c_v$  равна

$$c_v = \frac{de}{dT}, \quad \text{откуда} \quad e = \int_0^T c_v dT + e_0,$$

где  $e_0$  – постоянная, зависящая от выбора начальной точки отсчета температуры и внутренней энергии. Для удобства в нашем классе задач можно принять  $e_0 = 0$ . В обычных задачах гидродинамики (без скачков плотности)  $e = c_v T$ .

Энтальпия или теплосодержание единицы массы жидкости  $S$  определяется следующим образом:

$$S = e + \frac{p}{\rho} = c_v T + \frac{p}{\rho}.$$

Для совершенного газа

$$S = e + RT.$$

По определению удельная теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$  равна

$$c_p = \frac{dS}{dT} = c_v + R.$$

Удельные теплоемкости газов тесно связаны с их молекулярным строением. Их отношение  $\gamma = c_p/c_v$  характеризует сложность внутреннего строения молекул. Численные значения отношений удельных теплоемкостей могут быть получены на основе рассмотрения законов статистической механики.

Выпишем основные уравнения движения сплошной среды, вывод которых можно найти в учебниках по гидродинамике [100, 135].

Условие сохранения массы приводит к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (4.2)$$

которое означает баланс локального изменения плотности  $\rho$  и дивергенции потока массы  $\rho \vec{v}$ . Уравнение (4.2) с помощью понятия полной производной

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

можно представить в другой форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$



Второй закон Ньютона для непрерывной сплошной среды приводит к уравнению движения

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv -\nabla p + \rho \nabla \varphi + \mathcal{F}(\vec{v}), \quad (4.3)$$

которое означает, что произведение массы единицы объема на ускорение равно сумме градиента давления, массовой силы  $\rho \nabla \varphi$  и силы  $\mathcal{F}$ , где  $\varphi$  – потенциал консервативных массовых сил (например, силы тяжести или сил Кориолиса);  $\mathcal{F}$  – неконсервативная сила, которая в нашем случае представляет собой силу трения в жидкости. Для ньютоновских жидкостей, таких как вода и воздух,

$$\mathcal{F} = \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}),$$

где  $\mu$  – коэффициент молекулярной вязкости жидкости или газа.

В интересующем нас классе стратифицированных течений исходные уравнения движения в общем случае содержат член, учитывающий влияние сил Кориолиса. Однако в рассматриваемых локальных моделях атмосферной диффузии этими эффектами пока будем пренебрегать. Поэтому обычно предполагается, что основной массовой силой, действующей на рассматриваемую сплошную среду и производящей работу, является сила тяжести.

Вид уравнений движения показывает, что они квадратично нелинейны и, следовательно, движения одного пространственного масштаба взаимодействуют с движениями других масштабов.

Если плотность жидкости не является постоянной, то уравнения сохранения массы и изменения количества движения представляют собой незамкнутую систему уравнений. Поэтому необходимо дополнительно привлечь к рассмотрению уравнение сохранения энергии или баланса тепла.

Прежде, чем записать уравнение баланса тепла для движущейся частицы, вспомним, что для однородной по плотности (несжимаемой) жидкости тепловой баланс частицы определяется ее внутренней энергией, теплопроводностью, конвекцией тепла посредством течения и возникновения тепла вследствие внутреннего трения. В случае жидкости переменной плотности (сжимаемой) к перечисленным составляющим теплового баланса следует присоединить работу сил давления, связанную с расширением или сжатием рассматриваемого объема жидкости. Вопросы излучения тепла в наших задачах не учитываются ввиду малой разности температур.

Для составления уравнения переноса тепла воспользуемся первым началом термодинамики, которое утверждает, что для любого

процесса

$$dQ = de + dA,$$

где  $Q$  – тепло, подведенное к единице массы;  $A$  – работа, совершенная при изменении объема. Из этого следует, что

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{dA}{dt}. \quad (4.4)$$

Анализ этого соотношения с учетом упоминавшихся выше компонентов теплового баланса приводит к уравнению переноса для тепловой внутренней энергии в виде [134]

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{E}{\rho} + Q_1, \quad (4.5)$$

где  $E = p_{ij} \partial v_i / \partial x_j$  – диссипативная функция;  $p_{ij}$  – напряжения трения в жидкости;  $Q_1$  – тепло, получаемое от внешних источников.

Запишем теперь еще уравнение для энтальпии  $S = e + p/\rho$ . С этой целью прибавим к левой и правой части уравнения (4.5) слагаемое  $d/dt(p/\rho)$ . При этом в правой части уравнения учтем, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}.$$

Тогда, используя уравнение сохранения массы в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0,$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (4.6)$$

Выполнив очевидные преобразования, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{E}{\rho} + Q_1. \quad (4.7)$$

Предполагая далее, что удельная теплоемкость жидкости постоянна и учитывая, что

$$S = c_p T = e + RT = e + (c_p - c_v)T,$$

уравнение (4.7) можно переписать в виде

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{E}{\rho} + Q_1. \quad (4.8)$$

Если пренебречь работой сил давления и вязкой диссипацией, то приходим к уравнению теплопроводности

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q_1. \quad (4.9)$$

Учитывая, что перенос другой скалярной субстанции, такой как концентрация примеси или водяного пара в движущейся жидкости аналогичен переносу температуры, система уравнений гидротермодинамики вязкой ньютоновской стратифицированной жидкости в однородном гравитационном поле записывается в виде [27, 104]

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= -\rho g \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} &= 0, \quad p = \rho R T, \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + E + \rho Q_1, \\ \rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} + v_k \frac{\partial q}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda_1 \frac{\partial q}{\partial x_k} \right) + \rho Q_2, \\ \rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + v_k \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho D \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) + \rho Q_3, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где диссипативная функция

$$E = \mu \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \delta_{ik} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)^2 \right];$$

$\rho Q_i$  – соответствующие источниковые члены ( $i = \overline{1,3}$ ). Основным источником тепла для атмосферы, как уже отмечалось, является лучистая энергия солнца, интенсивность которой должна задаваться на внешней границе приземного слоя атмосферы. Однако ее можно моделировать также эквивалентными внутренними источниками. Для определения потоков лучистой энергии в самой атмосфере необходимо дополнительно привлечь законы распространения лучистой энергии, связанные с поглощением коротковолновой солнечной радиации и излучением и поглощением длинноволновой радиации. Таким

образом, источниковый член в уравнении переноса тепла  $Q_1$  будет содержать три основных слагаемых

$$Q_1 = E_1 + E_2 - E_3,$$

где  $E_1$  – направленный вниз поток длинноволновой радиации;  $E_2$  – поток коротковолновой радиации;  $E_3$  – поток длинноволновой радиации, направленный вверх. В принципе в соответствующей литературе имеются конкретные рекомендации для определения этих потоков [27]. Аналогично обстоит дело и с источниковыми членами  $Q_2$  и  $Q_3$  в уравнениях для переноса концентрации пара и примеси соответственно. Более подробное описание физики и структуры источниковых членов выходит за рамки нашего рассмотрения.

Хотя выписанная система уравнений (4.10) образует замкнутую систему для определения трех компонент скорости ветрового потока, температуры, давления, плотности воздуха, концентрации водяного пара и примеси, ее интегрирование в общем виде связано с огромными трудностями. Решение конкретных задач обычно возможно лишь в определенном приближении. Кроме того, в атмосфере существуют процессы и явления различных типов и масштабов. Одни из них развиваются в весьма ограниченной области с небольшим характерным масштабом времени, а другие имеют большую пространственную протяженность и большие масштабы времени. Существуют, конечно, и процессы с промежуточными масштабами. Чтобы корректно использовать потенциальные возможности системы уравнений, описывающей гидротермодинамику атмосферы, необходимо дополнительно учесть многие факторы и преодолеть определенные трудности при ее численном решении.

Например, известно, что полная система уравнений гидротермодинамики атмосферы кроме важных для атмосферной диффузии процессов, описывает также звуковые, внутренние и внешние гравитационные волны, инерционные волны и т.п. Поэтому численные методы решения этой системы имеют свою специфику и требуют использования очень малых шагов по времени. Не останавливаясь подробно на этих особенностях, подчеркнем, что полная система уравнений (4.10) хотя и обладает большой общностью и универсальностью, но для практических приложений оказывается достаточно сложной. Поэтому при моделировании гидродинамических процессов и явлений в атмосфере обычно пользуются различными гипотезами и допущениями, чтобы в зависимости от масштаба исследуемого процесса упростить исходные посылки и базовую систему уравнений.

Ниже применительно к атмосфере будет предполагаться, что градиенты давления, плотности и температуры малы, т.е. разности

этих величин для характерных расстояний рассматриваемой задачи малы по сравнению с самими величинами  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ . Далее допускаем, что плотность не зависит от флуктуаций давления на данной высоте, а температурные градиенты такие, что позволяют пренебречь изменчивостью коэффициентов вязкости и теплопроводности.

При записи уравнений притока тепла и диффузии примеси в рассматриваемом приближении будем пренебрегать выделением тепла за счет вязкой диссипации и работы сил сжатия, а также эффектами термо- и бародиффузии.

Пусть невозмущенная неподвижная атмосфера характеризуется температурой  $T_0$ , в общем случае зависящей от высоты, а также давлением и плотностью, удовлетворяющими соотношениям равновесия и состояния совершенного газа

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - g\delta_{i3} = 0, \quad p_0 = \rho_0 R T_0. \quad (4.11)$$

Запишем мгновенные значения температуры, давления и плотности в виде

$$p = p_0 + p', \quad T = T_0 + T', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (4.12)$$

причем величины со штрихом  $p'$ ,  $T'$ ,  $\rho'$  будем рассматривать как малые отклонения от  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ . Тогда в соответствии с нашими предположениями уравнение сохранения массы в первом приближении принимает вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -v_i \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} \approx 0, \quad (4.13)$$

т. е. оно такое же, как и для несжимаемой жидкости

Выпишем первое уравнение движения в системе (4.10) в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - g\delta_{3i}. \quad (4.14)$$

Можно показать [27], что с точностью до малых первого порядка оно преобразуется к виду

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{g}{T_0} T' \delta_{3i}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим теперь третье уравнение из системы (4.10). Используя представление (4.12), полагая  $\partial^2 T_0 / \partial x_i^2 = 0$  и пренебрегая членами, малыми по сравнению с основными, находим

$$v_i \frac{\partial T_0}{\partial x_i} + \frac{\partial T'}{\partial t} + v_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} = a \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2} - \frac{g}{R} \delta_{3i} v_i, \quad (4.16)$$

где  $a = \lambda / \rho_0 c_p$  – коэффициент температуропроводности. Если теперь вспомнить соотношение равновесия (4.11), из которого следует, что

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_i} + \frac{g}{R} \delta_{3i} = 0, \quad (4.17)$$

то уравнение (4.16) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} = a \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2}. \quad (4.18)$$

Подводя итог вышесказанному, отметим, что в рассматриваемой модели атмосферы изменения плотности, вызываемые динамическими причинами, пренебрежимо малы, и жидкость приспособляется к давлению на данном уровне. Восходящие и нисходящие движения элементов жидкости сопровождаются изменениями температуры, обусловленными изменениями давления, причем эти изменения являются адиабатическими, и они приводят к выравниванию градиентов температуры. Температурные флуктуации, вызываемые изменениями давления и градиентом температуры, обуславливают появление эффекта плавучести. В конечном счете температурные неоднородности выравниваются в результате действия молекулярных эффектов. Таким образом, согласно данной модели движение воздуха в атмосфере будет описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{g}{T_0} T' \delta_{3i}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + v_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} &= a \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k^2}, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

которая широко известна как приближение Буссинеска. Следует подчеркнуть, что температура  $T'$  фактически отсчитывается от среднего постоянного значения  $T_0$ , а давление  $p'$  есть отклонение от гидростатического давления  $p_0$ , соответствующего постоянной температуре  $T_0$ , и, следовательно, плотности  $\rho_0$ .

Если в атмосферном воздухе содержится какая-либо примесь, то к этой системе уравнений необходимо еще добавить уравнение диффузии для концентрации этой примеси. Тогда полную систему уравнений движения, неразрывности, переноса тепла и диффузии концентрации в приближении Буссинеска можно записать в следующей

векторной форме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}(\beta_T T' + \beta_c C'), \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T' &= a \Delta T', \\ \frac{\partial C'}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) C' &= D \Delta C', \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

В случае турбулентного движения в рассмотренном выше приближении основные уравнения динамики атмосферы для осредненных величин записываются в виде [115, 208]

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial (\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_k} + \frac{g}{T_0} \bar{T}' \delta_{3i},\tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \bar{T}'}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{T}'}{\partial x_k} = a \frac{\partial^2 \bar{T}'}{\partial x_k^2} - \frac{\partial (\overline{T' v'_k})}{\partial x_k},\tag{4.22}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0,\tag{4.23}$$

где  $\overline{v'_i v'_k}$  и  $\overline{T' v'_k}$  – вторые корреляционные моменты, описывающие турбулентный перенос.

Для полной постановки задачи и получения однозначного решения выписанной системы уравнений гидротермодинамики и массопереноса необходимо задать начальные и краевые условия. В общем случае задание начального условия сводится к тому, что при  $t = t_0$  каждая из искоемых функций  $F_i(x, y, z, t)$  известна, т. е.

$$F_i(x, y, z, t)|_{t=t_0} = \varphi_i(x, y, z).$$

Краевые условия на бесконечности обычно определяются физической постановкой задачи, а краевые условия на границе обычно относятся к одному из трех классов: условие Дирихле (первая краевая задача); условие Неймана (вторая краевая задача) и смешанное условие. Выбор конкретных краевых условий определяется типом границ, свойствами поверхностей раздела и т. д. Более углубленный анализ целесообразен при постановке конкретных задач.

Рассмотрим простейший случай установившегося плоскопараллельного течения вдоль оси  $x_1$  однородного по осям  $x_2, x_3$ . При этом

$\overline{v_i} = v(x_3)\delta_{1i}$ , и уравнения (4.21) и (4.22) примут вид

$$\nu \frac{\partial^2 \overline{v_1}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial \overline{v_1' v_3'}}{\partial x_3} = 0, \quad (4.24)$$

$$a \frac{\partial^2 \overline{T'}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial \overline{\theta' v_3'}}{\partial x_3} = 0. \quad (4.25)$$

Выражения (4.24) и (4.25) показывают, что в рассматриваемом приближении полные напряжения  $p_{13} = \mu \partial v_1 / \partial x_3 - \tau_{13}$  и поток тепла  $P = a \partial T / \partial x_3 - H_3$  можно считать постоянными. Если, как обычно, молекулярным переносом пренебречь по сравнению с турбулентным, то этот вывод справедлив и для турбулентных трения  $\tau_{13}$  и потока тепла  $H_3$ . Этой аппроксимацией часто пользуются в практических расчетах при выборе масштабов скорости и температуры в виде

$$\begin{aligned} v_* &= \sqrt{\frac{\tau_{13}}{\rho_0}} && \text{— динамическая скорость,} \\ \theta_* &= -\frac{H_3}{\rho_0 c_p v_*} && \text{— динамическая температура,} \end{aligned} \quad (4.26)$$

где  $H_3$  — вертикальный поток тепла.

### 4.3. Термическая стратификация и устойчивость атмосферы

Когда температура поверхности земли выше, чем температура воздуха, то воздух вследствие теплопроводности нагревается, и его плотность у поверхности земли уменьшается. При наличии гравитационного поля это обстоятельство приводит к появлению архимедовых сил плавучести. В результате система как целая переходит в состояние неустойчивого равновесия. Для суждения о динамическом и термическом состоянии приземного пограничного слоя атмосферы служат параметры устойчивости.

Стратификацию атмосферы называют устойчивой, если ее вертикальный градиент температуры близок к сухоадиабатическому. Сухоадиабатическим градиентом называют такое изменение температуры с высотой, при котором элементарный объем воздуха перемещается в сухой атмосфере по вертикали без теплообмена с окружающей средой. Из уравнения статики атмосферы [104]

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -g \frac{p}{RT}, \quad (p = \rho RT) \quad (4.27)$$

следует, что с увеличением высоты давление уменьшается. Если элементарный объем воздуха по той или иной причине переместится без



теплообмена с окружающей средой на высоту  $dz$ , где ее давление окажется ниже исходного на  $dp$ , то температура его при этом изменится по закону адиабатического расширения.

Изменение температуры с высотой можно представить в виде

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dp}{dz} \frac{dT}{dp}. \quad (4.28)$$

Величина  $dp/dz$  может быть оценена выражением (4.2), а  $dT/dp$  можно определить из уравнения адиабаты. С этой целью запишем первый закон термодинамики в следующем виде:

$$dQ = c_v dT + p dV = c_p dT - V dp. \quad (4.29)$$

Для адиабатического перемещения жидкой частицы теплообмен отсутствует, т.е.  $dQ = 0$  и, следовательно,

$$\frac{dT}{dp} = \frac{V}{c_p}. \quad (4.30)$$

Тогда из уравнений (4.27) и (4.28) следует, что

$$\frac{dT}{dz} = -g\rho \frac{V}{c_p} = -\frac{g}{c_p}, \quad (4.31)$$

так как  $\rho V = 1$ . Для сухого воздуха  $c_p = 1000$  Дж/(кг·К), тогда значение адиабатического градиента будет

$$\gamma_a = -\frac{dT}{dz} = \frac{9.81}{1000} \approx 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C/м.}$$

В этом случае переместившийся элемент воздуха с уровня  $z$  на  $z + dz$  будет при  $dz > 0$  более легким, чем окружающий его воздух, а при  $dz < 0$  более тяжелым тогда и только тогда, когда

$$\frac{dT}{dz} < -\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad (4.32)$$

где  $V$  – удельный объем воздуха. Условие (4.32) является условием неустойчивости состояния покоя температурно-стратифицированной атмосферы. В случае, когда среду, т.е. воздух, можно считать идеальным газом, для которого  $\partial V/\partial T \simeq R/p = V/T$ , критерий неустойчивости принимает вид

$$\frac{dT}{dz} < -\frac{g}{c_p} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{R}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (4.33)$$

Величина  $\gamma_a = (\gamma - 1)/(\gamma) \cdot g/R$  в метеорологии называется адиабатическим градиентом температуры. Для атмосферы этот градиент  $\gamma_a \approx 1 \text{ }^\circ\text{C}/100 \text{ м}$ . Состояние атмосферы, при котором  $(-dT/dz)$  больше, равно или меньше  $\gamma_a$ , называют соответственно устойчивой, безразличной или неустойчивой стратификацией.

Еще один способ представления неустойчивости (4.32) или (4.33) связан с введением вместо обычной температуры  $T$  так называемой потенциальной температуры

$$\theta = T(p_0/p)^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad (4.34)$$

где  $p_0$  – давление на уровне моря. Поскольку для энтропии идеального газа  $c_p \ln \theta = S + \text{const}$ , то ясно, что при адиабатических процессах потенциальная температура не меняется, так что  $\theta$  равно температуре, которую будет иметь воздух, если его адиабатически привести к стандартному давлению  $p_0$ .

Легко видеть, что  $d\theta/dz = dT/dz - \gamma_a$ , поэтому с помощью понятия потенциальной температуры критерий неустойчивости стратифицированной среды (4.7) может быть следующим: состояние покоя будет неустойчивым, если  $d\theta/dz < 0$ , т. е. если потенциальная температура убывает с высотой, и будет устойчивым в противном случае, когда  $d\theta/dz > 0$ .

Иная ситуация наблюдается при неадиабатическом распределении температуры. При отрицательном сверхадиабатическом градиенте температура поднимающегося объема воздуха возрастает по сравнению с температурой окружающей среды, его плотность уменьшается и, следовательно, на него будет действовать сила плавучести, направленная вверх, которая ускорит его подъем. На опускающийся же объем, плотность которого выше окружающей среды, сила плавучести будет действовать вертикально вниз.

При неустойчивых условиях положительная работа сил плавучести приводит к увеличению кинетической энергии турбулентности, и диффузия примеси протекает более интенсивно, так как уровень турбулентности сильно влияет на процессы турбулентного переноса импульса, тепла и вещества.

При градиенте температуры меньше сухадиабатического воздух, перемещающийся вверх, будет иметь температуру ниже окружающей среды. Сила плавучести будет стремиться удержать его на первоначальном уровне. Интенсивность турбулентности при этом подавляется, а интенсивность диффузионных процессов снижается. Атмосферные условия в этом случае называют устойчивыми.

Оценка чисел Рейнольдса для атмосферных движений показывает, что они носят турбулентный характер. Однако в стратифи-

цированной атмосфере, где температура, плотность и скорость движения изменяются в вертикальном направлении, число Рейнольдса уже не является единственным критерием возникновения и развития турбулентности. Анализ уравнения баланса кинетической энергии турбулентности показывает, что режим движения дополнительно зависит от динамического числа Ричардсона

$$\text{Rf} = \frac{g\beta\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}\frac{\partial u}{\partial z}}. \quad (4.35)$$

Как и для числа Рейнольдса, существует критическое значение числа Ричардсона  $\text{Rf}_{\text{кр}}$ . При значениях  $\text{Rf} < \text{Rf}_{\text{кр}}$  интенсивность турбулентных пульсаций, а следовательно, и перенос количества движения, тепла и вещества усиливается, при  $\text{Rf} > \text{Rf}_{\text{кр}}$  – наоборот, ослабевает.

Большие отрицательные значения градиента температуры в приземном слое атмосферы наблюдаются наиболее часто при малооблачной погоде в дневные часы теплого сезона года. В этих случаях температура почвы и воздуха вблизи нее под влиянием солнечной радиации достаточно высокая, а при удалении от поверхности земли температура воздуха быстро падает с высотой: градиент  $\partial T/\partial z$  отрицательный и, как правило, больше  $\gamma_a$ . Такая стратификация, как уже указывалось выше, называется неустойчивой. Число Ричардсона при этом меньше нуля ( $\text{Rf} < 0$ ).

В ночные часы теплого сезона года, а зимой нередко и в течение всех суток, особенно при морозной малооблачной погоде, в приземном слое атмосферы, под влиянием радиационных потерь тепла земной поверхностью, температура воздуха наиболее низкая у земной поверхности, а с ростом высоты увеличивается. Такое распределение температуры по высоте называют инверсионным. При этом градиент  $\partial T/\partial z$  положителен, число  $\text{Rf} > 0$ , интенсивность турбулентности ослабевает и в зависимости от величины  $\text{Rf}$  может полностью исчезнуть.

Многочисленные наблюдения за распределением дыма из труб промышленных предприятий показывают, что поведение струи дыма сильно различается в зависимости от состояния атмосферы. Особенно сильно процесс рассеивания примеси зависит от скорости ветра и условий термической стратификации атмосферы. При малых скоростях ветра или инверсионной стратификации дым распространяется в виде тонкой струи на значительные расстояния. По мере увеличения скорости ветра или перехода от устойчивой стратификации к неустойчивой, струя дыма приобретает извилистый характер, а затем распадается на отдельные клубы дыма. Интересен случай, когда инверсия возникает на определенной высоте от земли в

сравнительно тонком слое воздуха. Интенсивность турбулентности в нем сильно подавлена, и поэтому процессы диффузии через него сильно ослаблены. Визуальные наблюдения за реальными дымовыми струями показывают, что их форма зависит от вертикального профиля температуры атмосферного воздуха. Типичные пять вариантов формы дымовых струй в зависимости от вертикального профиля температуры представлены на рис. 4.2, заимствованном из [9].

**Волнообразная** (рис. 4.2, а) форма факела наблюдается при сверхадиабатическом вертикальном градиенте температуры и свидетельствует о неустойчивом состоянии атмосферы. В этом случае ось факела характеризуется нестационарностью, а факел – большим углом раскрытия. Такая температурная стратификация обычно наблюдается днем при ясной погоде, когда земля интенсивно нагревается солнцем.

**Конусообразная** форма факела (рис. 4.2, б) наблюдается при градиенте температуры близком к адиабатическому и несколько ниже его. Ось факела близка к горизонтальной линии. Состояние атмосферы устойчиво, оно характерно для облачной и ветреной погоды как днем, так и ночью.

**Веерообразная** форма факела (рис. 4.2, в) наблюдается при инверсии температуры. Факел характеризуется малым углом раскрытия в вертикальном направлении и большим в горизонтальном. Такие атмосферные условия характерны для ночного времени, когда температура поверхности земли ниже температуры воздуха. Этому обычно благоприятствуют слабые ветры и снежный покров.

**Приподнятая инверсия**. Изображенная на рис. 4.2, г форма струи реализуется тогда, когда в нижней части атмосферы имеет место инверсионная структура поля температуры, а выше некоторого уровня температура нормальная с отрицательным градиентом. В этом случае зона наибольших концентраций находится на верхней границе инверсионного слоя. Такая форма факела характерна при заходе солнца. Если выбросы попадают выше этого слоя, то это благоприятные условия для рассеивания, так как токсические вещества уходят в верхние слои атмосферы, а их проникновению к земле мешает инверсионный слой.

**Приземная инверсия**. В этом случае (рис. 4.2, д) внизу располагается слой с нормальным отрицательным градиентом температуры, а выше него – инверсионный слой. Такая температурная структура атмосферы обычно встречается утром, когда ночная инверсия рассеивается под действием солнечных лучей. Приземная инверсия обычно неблагоприятна, поскольку она образует как бы крышку, которая препятствует уносу примеси в верхние слои атмосферы.

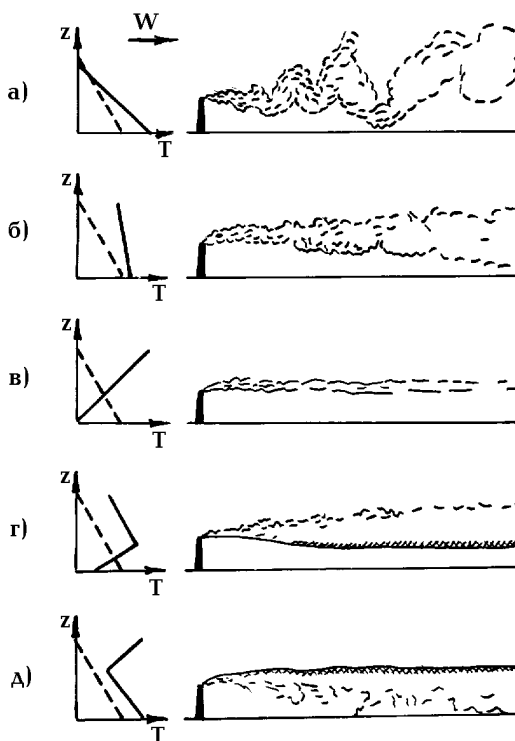


Рис. 4.2. Типичные формы дымовых струй в зависимости от вертикального профиля температуры (штриховая – адиабатические условия) [9]

Инверсионная стратификация ( $\partial T / \partial z > 0$ ) является частным случаем более широкого класса устойчивой стратификации, при которой температура воздуха падает с высотой медленнее, чем температура элементарного объема, адиабатически поднимающегося в атмосфере. Наличие значительного градиента температуры сильно ослабляет вертикальный турбулентный обмен и, как следствие, ослабляет перенос загрязняющих веществ от земной поверхности из приземного слоя в более высокие слои атмосферы. По этой причине при наличии инверсий выбрасываемые токсические вещества устойчиво движутся по этим “инверсионным коридорам” без значительного перемешивания. Такие картины нередко можно наблюдать рано утром перед восходом солнца над районами с печным отоплением. Но с

появлением солнечных лучей слои воздуха прогреваются, происходит потеря устойчивости и видимый благодаря дыму слой начинает рассеиваться. При определенном состоянии атмосферы эти инверсионные слои довольно устойчивы и препятствуют подъему и рассеиванию поднимающихся более легких газов, что приводит к высокому уровню приземных концентраций. Вследствие этого закономерности образования инверсий температуры представляют большой практический интерес. Детально изучить структуру нижнего слоя атмосферы толщиной 300 ÷ 500 м представилось возможным лишь в связи с организацией наблюдений на высотных метеорологических мачтах (Обнинск, Калужская область, высота 301 м), Останкинской (Москва, высота 505 м), Ленинградской, Киевской и других телебашнях.

Все инверсии подразделяются на “приземные” и “приподнятые”. По данным наблюдений в Обнинске инверсионное (аномальное) распределение температуры по высоте наблюдается более чем в половине случаев (в среднем за год 53 %) [52] с достаточно равномерным распределением по сезонам года. Толщина слоев с инверсионной стратификацией изменяется в широких пределах от 40 до 500 м и более с перепадом температур между верхней и нижней границами от десятых долей до 10°С и более. Замечено, что виды инверсий в большом городе (Москва) и в сельской местности (Обнинск) имеют ряд особенностей.

При практических расчетах рассеивания примеси состояние атмосферных условий определяют по уровню устойчивости атмосферы. Различными авторами предложено несколько систем классификации состояния атмосферы по категориям устойчивости. Наиболее известными являются системы Паскуилла [209], Паскуилла – Гиффорда [181], Тернера [227], Уллига [228], Смита [217], Лэна и Черча [200], Клюга [194] и др. При их применении не следует забывать, что классификация погодных условий всегда условна и проводится с использованием тех или иных допущений и моделей атмосферной диффузии. Поэтому не следует произвольно использовать модель расчета рассеивания примеси и систему классификации погодных условий.

#### **4.4. Профиль скорости ветра в приземном слое однородной по температуре атмосферы**

При анализе вертикального профиля скорости ветрового потока в нижних слоях атмосферы для практических приложений полезно рассматривать эти слои как часть развитого турбулентного пограничного слоя около твердой стенки, в котором как сила Кориолиса, так и изменения градиента давления в направлении среднего ветра

пренебрежимо малы. В этом случае в условиях безразличной стратификации вертикальный профиль скорости в основной своей части, как показывают измерения, является логарифмическим. Имеется несколько способов получения этого результата теоретическим путем. Один из простейших способов состоит в следующем. Рассмотрим установившееся движение однородной жидкости вдоль твердой безграничной стенки. Эта задача хорошо известна [115]. Однако для более глубокого понимания дальнейшего материала получим аналитический профиль скорости у твердой стенки. Пусть ось  $x$  направлена вдоль стенки и совпадает с основным направлением движения жидкости, а ось  $z$  – нормально к ней. Тогда, полагая, что

$$u = u(z), \quad v = 0, \quad p = p(z), \quad (4.36)$$

уравнение двумерного турбулентного движения вдоль твердой стенки запишется в виде

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u' v'} = 0 \quad (4.37)$$

или, обозначая турбулентное трение через  $\tau = -\overline{\rho u' v'}$ , имеем

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad (4.38)$$

откуда после интегрирования легко находим, что

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \tau = C_1. \quad (4.39)$$

Постоянную  $C_1$  определим из условия на стенке, где  $\tau = 0$  и, следовательно,

$$C_1 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \tau_w.$$

Подставляя найденное значение постоянной  $C_1$  в уравнение (4.39), получаем

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \tau = \tau_w. \quad (4.40)$$

Основываясь на экспериментальном материале, разделим все течение на две области: пристенный слой, где вязкие напряжения значительно больше турбулентных, и область турбулентного ядра, где турбулентные напряжения много больше вязких. Естественно, что физически существует и переходная зона, где турбулентные и вязкие напряжения сравнимы по величине. Однако размер этой области

мал по сравнению с указанными двумя областями. Рассмотрим движение в области, очень близкой к стенке. В этом случае  $\tau \ll \mu \partial u / \partial z$ , и уравнение (4.40) принимает вид

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_w, \quad (4.41)$$

откуда после интегрирования получаем

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} z + C_2,$$

или после введения динамической скорости  $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$  имеем

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* z}{\nu} + C_2,$$

где  $\nu = \mu / \rho$ .

Постоянная интегрирования  $C_2$  в силу условия прилипания жидкости к стенке ( $u = 0$  при  $z = 0$ ) равна нулю, поэтому профиль скорости в области, близкой к стенке, имеет линейный характер:

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} z \quad \text{или} \quad \frac{u}{v_*} = \frac{v_* z}{\nu}. \quad (4.42)$$

Слой жидкости, в котором выполняется соотношение (4.42), называют вязким подслоем.

Вдали от стенки справедливо соотношение  $\tau \gg \mu \partial u / \partial z$ . Тогда, следуя Прандтлю, т. е. полагая

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2,$$

где  $l$  — длина пути перемешивания, из уравнения (4.40) получаем

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \tau_w. \quad (4.43)$$

Принимая по Прандтлю  $l = \alpha z$ , где  $\alpha$  — постоянная Кармана, равная 0.4, из последнего выражения находим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{z}, \quad (4.44)$$

откуда

$$u = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln z + C_3 \quad \text{или} \quad \frac{u}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln z + C_3, \quad (4.45)$$



т. е. профиль скорости на некотором удалении от стенки имеет логарифмический характер. Этот слой обычно называют логарифмическим ядром пограничного слоя. Постоянную интегрирования  $C_3$  можно определить из условия сращивания этих решений на некотором характерном расстоянии от стенки, равном  $\Delta$ . Следует подчеркнуть, что из выражения (4.44) легко получить следующее интересное соотношение, выражающее безразмерный градиент скорости:

$$\frac{\alpha z}{v_*} \frac{\partial u}{\partial z} = 1, \quad (4.46)$$

которое справедливо для случая термически однородной жидкости. В случае термически стратифицированной среды согласно современным представлениям безразмерный комплекс (4.46) будет уже не константой, а некоторой функцией параметра устойчивости атмосферы. Подробнее этот случай будет рассматриваться ниже.

Если воспользоваться соотношением (4.46), формулой Буссинеска – Прандтля

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.47)$$

и определением динамической скорости  $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ , то для турбулентной вязкости имеем

$$\nu_t = v_*^2 / \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha^2 z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha v_* z. \quad (4.48)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае термически однородной жидкости осредненные характеристики рассматриваемого течения на расстоянии  $z$  от стенки могут зависеть лишь от напряжения трения  $\tau$ , координаты  $z$  и параметров жидкости  $\nu$ ,  $\rho$ . При этом  $\tau$  и  $\rho$  могут входить лишь в комбинации  $\tau/\rho$ , что позволяет ввести масштаб скорости  $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ , называемой динамической скоростью. Поскольку из величин  $v_*$ ,  $\nu$  и  $z$  можно составить единственную безразмерную комбинацию  $v_* z/\nu$ , то, в силу соображений размерности, общий вид зависимости профиля средней скорости  $u(z)$  должен иметь вид

$$u(z) = v_* f\left(\frac{v_* z}{\nu}\right), \quad (4.49)$$

где  $f$  – некоторая функция.

Верхняя граница вязкого подслоя условно может быть определена, например, как такое значение  $z = \Delta$ , при котором  $|\overline{u'w'}| = 0.1 \times \nu \partial u / \partial z$ . Ясно также, что толщина  $\Delta$  при любом ее определении может зависеть только от  $v_*$  и  $\nu$ . Отсюда следует, что  $\Delta = \alpha \nu / v_* = \alpha l_*$ ,

где  $\alpha$  – эмпирический коэффициент, который на основе экспериментальных данных часто принимается равным 5, т. е.  $\Delta = 5\nu/v_*$ .

В области  $z \gg l_* = \nu/v_*$  и где  $\tau \gg \nu(\partial u/\partial z)$ , т. е. в турбулентном ядре течения, закон изменения средней скорости при  $z > l_*$  не должен зависеть от вязкости  $\nu$ , что и подтверждает формула (4.45), которая впервые была получена, по-видимому, Карманом и Прандтлем, а впоследствии на основе других соображений, включая анализ размерностей, она была подтверждена многими авторами [115] в виде

$$u(z) = v_* \left( A \ln \frac{v_* z}{\nu} + B \right) \quad \text{при} \quad z > 5 \frac{\nu}{v_*}. \quad (4.50)$$

Заметим, что постоянную  $A$  часто заменяют на постоянную Кармана  $\varkappa = 1/A$ . Численные значения величин  $\varkappa$  и  $B$  определяют по данным экспериментов, проводимых в гладких трубах, прямоугольных каналах и в пограничном слое на гладких пластинах. Первые пригодные для этой цели измерения профилей скорости и напряжения трения в потоках воды в прямых гладких трубах были проведены Никурадзе (1932), показавшим, что при  $z \geq 30\nu/v_*$  и вплоть до оси распределение скорости хорошо описывается формулой (4.50). Позднее подробные измерения много раз выполнялись для разных типов течений, причем формула (4.50) во всех случаях подтверждалась достаточно надежно, хотя значения коэффициентов  $A$  и  $B$  характеризовались некоторым разбросом. Значительное число данных, относящихся к измерениям в трубах, каналах и пограничном слое пластины, собрано на рис. 4.3, заимствованном из [115] по Кестину и Ричардсону [193]. Из рисунка видно, что при  $z < 5\nu/v_*$  все наблюдаемые значения  $u/v_*$  хорошо укладываются на кривую  $u/v_* = v_* z/\nu$  формулы (4.42), а при  $30\nu/v_* < z < 500\nu/v_*$  на кривую

$$\frac{u}{v_*} = 2.5 \ln \left( \frac{v_* z}{\nu} \right) + 5.1, \quad (4.51)$$

т. е. коэффициенты  $A$  и  $B$  в формуле (4.50) равны  $A = 2.5$  и  $B = 5.1$  и, следовательно,  $\varkappa = 0.4$ .

В промежуточной области, иногда называемой буферной зоной, часто используют дополнительные интерполяционные формулы. Большая часть этих формул имеет чисто эмпирический характер. В работах И. К. Никитина [117] эта проблема решается несколько по-иному. Он, оставаясь в рамках двухслойной модели и опираясь на обширный экспериментальный материал, ввел понятие пристенного подслоя  $\delta$  и предложил ввести поправочную функцию в выражение (4.50), записав его в следующем виде:

$$\frac{u}{v_{*\delta}} = \text{Re}_{*\delta} \left( 1.15 \lg \frac{z}{\delta} + 1.5 - 0.5 \frac{\delta}{z} \right), \quad \text{Re}_{*\delta} = \frac{v_{*\delta} \delta}{\nu}, \quad (4.52)$$

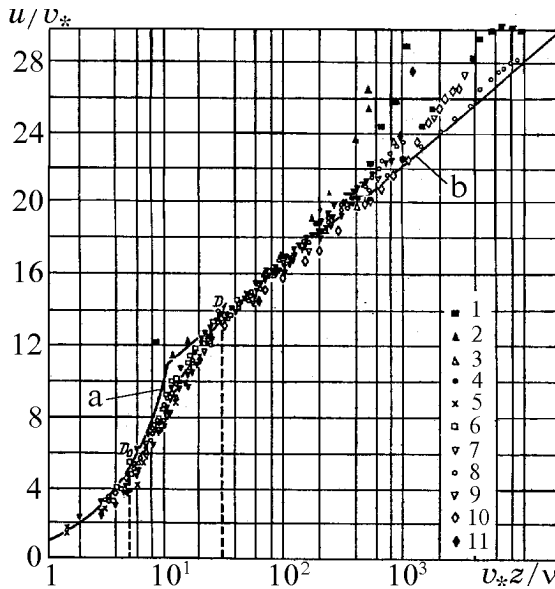


Рис. 4.3. Универсальный безразмерный профиль средней скорости турбулентного течения около гладкой стенки по данным измерений в трубах, каналах и пограничном слое, полученный разными экспериментаторами (по Кестину и Ричардсону [193]):

$$a - u/v_* = v_*z/\nu, \quad b - u/v_* = 2.5 \ln(v_*z/\nu) + 5.1;$$

- 1 - Шубауэр и Клебанов, 2 - Бребнер и Бигли, 3 - Никурадзе,  
 4 - Рейхардт и Моцфельд, 5 - Рейхардт и Шу, 6 - Лауфер,  
 7 - Дейслер, 8 - Ван Дрифт, 9 - Шульц-Грунов,  
 10 - Клебанов, 11 - Фейдж

где  $\delta$  – толщина пристенного подслоя. В соответствии с этой моделью линейный и логарифмический профиль имеют плавное сопряжение без излома [117].

Рассмотренные выше формулы и зависимости справедливы для случая гладкой поверхности, когда средняя высота шероховатости  $z_0$  удовлетворяет условию  $z_0 \leq l_* = \nu/v_*$ . С ростом скорости потока над данной поверхностью или с увеличением ее шероховатости при постоянной скорости реализуется режим течения, при котором действие сил давления и влияние вихрей, возникающих при обтекании элементов шероховатости, преобладают над чисто вязкими напряжениями у поверхности. Поэтому в случае шероховатой стенки профиль скорости усложняется и имеет вид

$$u(z) = v_* f \left( \frac{v_* z_0}{\nu}, \frac{v_* z}{\nu}, \sigma_1, \sigma_2 \dots \right), \quad (4.53)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – безразмерные параметры, характеризующие форму шероховатости и ее распределение на поверхности. Зависимости двухслойной модели, предложенные И. К. Никитиным, благодаря понятию подслоя  $\delta$ , являются универсальными, т. е. они справедливы как для гладкой, так и для шероховатой поверхности. Подробнее об этом можно найти в работе [117].

#### 4.5. Анализ баланса турбулентной энергии в приземном слое стратифицированной атмосферы

Изучение закономерностей распределения скорости и температуры в приземном слое атмосферы представляет большой практический интерес не только в связи с исследованиями по проблеме загрязнения атмосферы различными выбросами, но и с рядом динамических и тепловых задач, возникающих, например, в метеорологии, при проектировании и строительстве различных инженерных сооружений. В случае однородной по плотности атмосферы профиль скорости ветра в основной своей части, как было показано, близок к логарифмическому. Если атмосфера неоднородна по температуре, то вертикальный профиль скорости ветра может заметно отклоняться от логарифмического вследствие действия архимедовых сил плавучести.

Уравнения осредненного турбулентного течения в пограничном слое атмосферы в рамках приближения Буссинеска не содержат в явном виде архимедовой силы плавучести, обусловленной вертикальным градиентом температуры. Поэтому оценить влияние сил плавучести на профиль средней скорости и температуры в стратифицированном пограничном слое атмосферы теоретически не так просто, как это было сделано выше для равновесных условий адиабатической атмосферы.

В связи с этим необходимо привлечь к рассмотрению некоторую дополнительную информацию о турбулентном стратифицированном потоке. Поскольку уравнение баланса турбулентной энергии при наличии вертикального турбулентного потока тепла в поле силы тяжести содержит члены, учитывающие преобразование потенциальной энергии в кинетическую и обратно, то оно является удобным носителем требуемой дополнительной информации при исследовании влияния сил плавучести на профиль скорости и другие характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы.

Рассмотрим кратко энергетику атмосферной турбулентности. В общем случае уравнение баланса для турбулентной энергии  $k = v_i'^2/2$

имеет вид [27, 115]

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = & -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + g\beta\delta_{i3}\overline{v'_i \theta'} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{v'_k \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} + \overline{v'_k k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] - \nu \left( \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где  $\delta_{i3}$  – символ Кронекера, а остальные обозначения общепринятые. Физический смысл отдельных членов этого уравнения хорошо известен [148]. Левая часть уравнения описывает сумму локального и конвективного переносов турбулентности со средней скоростью потока в данной точке. Два первых члена в правой части описывают порождение или генерацию турбулентности при неоднородной средней скорости и наличии термической стратификации. Следующий член уравнения описывает турбулентную диффузию тремя различными механизмами, и последний член описывает вязкую диссипацию турбулентности.

Второй член в правой части уравнения (4.54), т. е.

$$g\beta\delta_{i3}\overline{v'_i \theta'} = B, \quad (4.55)$$

характерен для термически неоднородных турбулентных течений в поле сил тяжести. Он описывает работу архимедовых сил плавучести при турбулентном перемещении элементов жидкости, то есть взаимные превращения кинетической энергии турбулентных пульсаций и потенциальной энергии, обусловленные неоднородностью температуры. Если вертикальная стратификация жидкости устойчива, то вертикальные перемещения турбулентных элементов сопровождаются затратой энергии на работу против архимедовых сил, так что  $B < 0$  вследствие того, что при устойчивой стратификации плотность с высотой убывает. И поэтому пульсация плотности и вертикальной скорости, будут иметь, очевидно, положительную корреляцию. В случае неустойчивой стратификации, наоборот, при вертикальных перемещениях турбулентных элементов работа архимедовых сил совершается за счет потенциальной энергии стратификации и приводит к росту энергии турбулентности. В этом случае  $B > 0$ , а корреляция  $\overline{w'\theta'}$  отрицательна.

В случае атмосферной турбулентности, т. е. воздушной среды, коэффициент теплового расширения воздуха обычно принимают равным  $\beta = 1/T_A$ , где  $T_A$  – температура воздуха в градусах Кельвина.

Объединив стоящие в правой части уравнения (4.54) члены, вы-

ражающие генерацию турбулентности, получим

$$-\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + g \beta \delta_{i3} \overline{v'_i \theta'} = -\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} (1 - \text{Rf}), \quad (4.56)$$

где безразмерный параметр

$$\text{Rf} = \frac{g \beta \delta_{i3} \overline{v'_i \theta'}}{\overline{v'_i v'_k} \partial \overline{v_i} / \partial x_k}. \quad (4.57)$$

называют динамическим числом Ричардсона, которое характеризует влияние термической стратификации на перенос турбулентной кинетической энергии. Если для турбулентного трения и потока теплоты принять гипотезу градиентного переноса

$$-\overline{v'_i v'_k} = -\frac{2}{3} k \delta_{ik} + \nu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right), \quad -\overline{v'_i \theta'} = a_t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \quad (4.58)$$

и подставить выражения (4.58) в (4.57), то приходим к градиентному представлению числа Ричардсона в следующем виде:

$$\text{Ri} = \frac{g \beta \delta_{i3} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}}{\text{Pr}_t \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{k}{\nu_t} \delta_{ik} \right]}, \quad \text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{a_t}. \quad (4.59)$$

Его отличительной особенностью является то, что оно записано для трехмерного течения. Естественно, привычное выражение для числа Ричардсона в двухмерном потоке получается из выражения (4.59) как частный случай.

В условиях атмосферы локальные изменения турбулентной энергии и адвекция для однородной местности малы по сравнению с другими членами уравнения. Поэтому для стационарного случая и горизонтально однородного течения уравнение баланса турбулентной энергии принимает более простой вид:

$$0 = -\overline{u'w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + g \beta \overline{w' \theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{w' \left( \frac{p'}{\rho_0} \right)} + \overline{w' k} - \nu \frac{\partial k}{\partial z} \right] - \varepsilon. \quad (4.60)$$

Здесь через  $\varepsilon$  обозначена скорость диссипации турбулентной энергии. Рассмотрим отдельно каждый член этого уравнения применительно к условиям приземного слоя атмосферы.

Градиент вектора скорости в рассматриваемом горизонтально однородном течении связан с касательным напряжением формулой

Прандтля–Буссинеска

$$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{u'w'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}.$$

В приземном слое атмосферы касательные напряжения часто считаются мало изменяющимися с высотой. Поэтому при безразличной стратификации, когда профиль скорости логарифмический

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln z + B,$$

первое слагаемое уравнения (4.60) определяется выражением

$$-\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = v_*^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{v_*^3}{\alpha z}. \quad (4.61)$$

Рассмотрим второй член выражения (4.60). Вертикальный поток тепла в атмосфере в соответствии с гипотезой градиентного переноса равен

$$H_3 = -\rho c_p \overline{w'\theta'} = a_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (4.62)$$

Однако профиль средней температуры в стратифицированной атмосфере пока неизвестен. Поэтому член  $g\beta\overline{w'\theta'}$ , описывающий скорость продукции конвективной части турбулентной энергии, обусловленный действием сил плавучести, можно определить лишь из уравнения (4.62) через  $H_3$ , т.е.

$$g\beta\overline{w'\theta'} = -\frac{g\beta H_3}{\rho c_p}. \quad (4.63)$$

Следовательно, для оценки порождения турбулентной энергии за счет действия сил плавучести необходимо располагать данными по измерению вертикального теплового потока  $H_3$ , что обычно очень затруднительно. Однако приближенная оценка этого члена может быть получена, как было показано выше, путем умножения слагаемого  $v_*^2 \partial \bar{u} / \partial z$  на число Ричардсона. В самом деле, непосредственно из определения  $Rf$  следует, что

$$g\beta\overline{w'\theta'} = -Rf v_*^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (4.64)$$

Значение этой величины у подстилающей поверхности обычно мало по сравнению с продукцией механической энергии, но в верхней части приземного слоя оба эти члена становятся величинами одного

порядка. При слабом ветре конвективный член может оказаться преобладающим.

Следующий член уравнения баланса турбулентной энергии  $\partial(w'p'/\rho_0)/\partial z$  в атмосфере, по-видимому, не измерялся, но обычно в приземном слое атмосферы им пренебрегают. Измерения спектра давления подтверждают его малость для задач микрометеорологии, однако лабораторные измерения в аэродинамических трубах показывают, что этот член мал всюду за исключением тонкого слоя, непосредственно прилегающего к стенке.

Для оценки последнего слагаемого, описывающего скорость диссипации турбулентной энергии, использовались несколько различных методов. Еще Р. Тейлор (1952) определял характерную величину порождения турбулентной энергии  $P$  выражением (4.61), т.е.  $P = v_*^2 \partial \bar{u} / \partial z$ . А при равновесном режиме турбулентности у поверхности земли диссипация принималась равной  $P$ , т.е.  $\varepsilon = P$ . Затем Р. Тейлор (1958) и А. М. Обухов (1951), а также Болл (1961) определяли величину  $\varepsilon$  по поведению корреляционной функции для компонент скорости ветра в инерционном интервале на малых расстояниях. Имеются и другие способы оценки величины этого слагаемого в уравнении баланса турбулентной энергии [98], включая интегрирование спектра скорости. Что касается величины третьего диффузионного члена уравнения энергии, то здесь существуют различные мнения. По оценке Тейлора (1952) этот член можно считать малым. Однако другие исследователи отмечают случаи, когда он не мал, и, в частности, на больших расстояниях от земли. Многие авторы считают, что в нижних слоях продукция турбулентной энергии превышает диссипацию, при этом избыток энергии передается в верхние слои, где диссипация определяется уже другими механизмами.

Наряду с теоретическими оценками различные члены уравнения баланса турбулентной энергии применительно к атмосфере были также оценены экспериментально, как например, по наблюдениям на 125-метровой башне в Брукхевене. Эти эксперименты широко известны и опубликованы в работе [98]. В целом они подтверждают приведенные выше оценки.

В лабораторных условиях разными исследователями проводились тщательные измерения бюджета (баланса) энергии в турбулентном пограничном слое при безразличной стратификации, которые показали, что при условии, представляющем интерес в метеорологии, когда

$$\frac{v_* z}{\nu} \geq 100,$$

члены, описывающие диффузионный перенос, играют второстепен-



ную роль, так что большая часть локальной продукции энергии турбулентности компенсируется локальной диссипацией. Вероятно подобная картина имеет место и в атмосфере при безразличной стратификации.

При неустойчивом состоянии атмосферы член уравнения, связанный с плавучестью, при изменении высоты меняется несущественно, а порождение турбулентности за счет среднего сдвига пропорционально градиенту средней скорости. Поэтому в нижнем слое атмосферы этот член оказывается доминирующим при любом состоянии устойчивости атмосферы, и, следовательно, можно считать, что структура здесь однородна и подобна структуре безразличной стратификации.

Таким образом, из анализа баланса турбулентной энергии следует, что для термически неоднородных турбулентных течений в поле сил тяжести характерным является наличие такого дополнительного параметра, как динамическое число Ричардсона

$$Ri = \frac{g\beta\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}}. \quad (4.65)$$

Если же воспользоваться соответствующими полуэмпирическими соотношениями для вторых моментов, то из формулы (4.65) получаем следующее выражение для интегрального числа Ричардсона:

$$Ri = -\frac{g\beta\overline{\partial\theta}/\partial z}{Pr_t(\partial\overline{u}/\partial z)^2} = -\frac{g\beta H_3}{\rho_0 c_p v_*^2 (\partial\overline{u}/\partial z)}. \quad (4.66)$$

Очевидно, безразмерная величина  $Ri$  определяет относительный вклад термической конвекции в порождение турбулентной энергии по сравнению с динамическими факторами (передачей энергии от осредненного движения). Ясно так же, что  $Ri < 0$  при  $H_3 > 0$ , т. е. при неустойчивой стратификации, и  $Ri > 0$  при  $H_3 < 0$ , то есть при устойчивой термической стратификации, а при безразличной стратификации  $Ri = 0$ .

#### 4.6. Профиль скорости ветра в приземном слое термически стратифицированной атмосферы

При наличии в атмосфере значительного вертикального градиента температуры влияние архимедовых сил на процессы переноса становится существенным. Поэтому при исследовании такой ситуации появляется необходимость введения дополнительных характерных параметров по сравнению со случаем нестратифицированной атмосферы. В случае однородной атмосферы касательные напряжения

в приземном слое рассматриваются очень часто как слабоизменяющиеся с высотой. В случае стратифицированной атмосферы дополнительно считается, что и вертикальный турбулентный поток тепла  $H_3$  мало изменяется с высотой в приземном слое атмосферы. Конечно, существуют такие условия, когда эти допущения не выполняются, например ночью, когда лучистый поток тепла оказывается существенно нестационарным. Тем не менее гипотеза постоянства трения и потока тепла в пограничном слое атмосферы обычно используется. Вследствие этого в слое воздуха, прилегающем к земной поверхности, можно ввести масштабы скорости  $v_*$ , длины  $L$  и температуры  $\theta_*$ , практически не меняющиеся с высотой. При этом переменные по высоте скорость ветра и температура, нормированные на эти масштабы, удовлетворяют ряду безразмерных соотношений, которые оказываются применимыми для широкого диапазона атмосферных условий.

Учитывая анализ баланса турбулентной энергии и профиль скорости для однородной атмосферы, естественно предположить, что безразмерный сдвиг скорости в основном ядре для термически стратифицированной атмосферы будет не константой, как в случае адиабатической атмосферы (см. выражение (4.46)), а некоторой функцией числа Ричардсона, т. е.

$$\frac{\alpha z}{v_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \varphi_m(\text{Ri}). \quad (4.67)$$

При неадиабатических условиях вертикальный градиент потенциальной температуры также целесообразно представлять в безразмерной форме. Характерный масштаб температуры  $\theta_*$  в этом случае определяется по аналогии с динамической скоростью  $v_*$ , а именно, если  $v_*^2 = \tau_w / \rho = -\overline{u'w'}$ , следовательно  $v_*\theta_* = -\overline{w'\theta'}$ , а потому

$$\theta_* = -\frac{\overline{w'\theta'}}{\alpha v_*} = -\frac{1}{\alpha v_*} \frac{H_3}{\rho_0 c_p}, \quad (4.68)$$

где постоянная  $\alpha$ , как и выше, введена для удобства. При этом аналогом равенства (4.67) для температуры будет служить соотношение

$$\frac{\alpha z}{\theta_*} \frac{\partial \theta_*}{\partial z} = \varphi_n(\text{Ri}). \quad (4.69)$$

В работах А. С. Мони́на и А. М. Обухова [114] при изучении влияния неравновесных условий, т. е. неадиабатичности атмосферы, был введен масштаб длины Мони́на – Обухова

$$L = -\frac{\rho_0 c_p v_*^3 T_A}{\alpha g H_3} \quad (4.70)$$

и безразмерная переменная  $\zeta = z/L$ , где  $z$  – расстояние по вертикали.

Согласно теории Мони́на–Обухова при неадиабатических условиях безразмерный сдвиг скорости ветрового потока в инерционном подслое должен быть функцией безразмерной высоты  $\zeta = z/L$ . При этом

$$\frac{\varkappa z}{v_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi_m(\zeta), \quad \varphi_m(0) = 1. \quad (4.71)$$

Приведенные два подхода и соотношения (4.67), (4.71) указывают на то, что между параметрами  $\text{Ri}$  и  $\zeta$  существует прямая связь. Чтобы показать это, вспомним, что уравнение движения жидкой частицы, отличающейся по температуре от окружающей среды, в проекции на вертикальную ось  $z$  можно записать в виде

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{T'}{T_A}, \quad \beta = \frac{1}{T_A}, \quad (4.72)$$

где  $T' = T - T_0$ ;  $p' = p - p_0$ . Характерной особенностью в этом случае является наличие в уравнении движения величины  $g/T_A$ . Вспомогательные характерные масштабы  $v_*$ ,  $L$ ,  $H_3$  и физические константы  $g$ ,  $\rho_0$ ,  $c_p$ ,  $T_A$ , из указанных шести величин по соображениям теории размерности единственным образом составляется масштаб длины, называемый масштабом Мони́на–Обухова

$$L = -\frac{v_*^3}{\varkappa(g/T_A)(H_3/\rho_0 c_p)}. \quad (4.73)$$

Постоянная Кармана  $\varkappa = 0.4$  здесь введена для удобства. Так как величина  $L$  почти не зависит от высоты, то ее удобно использовать в качестве основного масштаба длины при изучении термически стратифицированных воздушных потоков, что и было сделано А. С. Мониним и А. М. Обуховым [115]. Если для потоков импульса и тепла использовать градиентную модель, т.е. определить их с помощью равенств

$$-\overline{u'w'} = v_*^2 = \nu_t \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (4.74)$$

$$-\overline{w'\theta'} = v_* \theta_* = a_t \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (4.75)$$

а профиль скорости считать логарифмическим, то интегральное число Ричардсона с использованием масштаба  $L$  можно записать в виде

$$\text{Ri} = -\frac{g\beta H_3}{\text{Pr}_t \rho_0 c_p v_*^3 / \varkappa z} = \frac{1}{\text{Pr}_t} \frac{g}{T_A} \frac{H_3}{\rho_0 c_p} \frac{\varkappa z}{v_*^3} = \frac{1}{\text{Pr}_t} \frac{z}{L} = \frac{\zeta}{\text{Pr}_t}. \quad (4.76)$$

Таким образом, безразмерная величина  $\zeta = z/L$  играет ту же самую роль, что и интегральное число Ричардсона, причем при числе Прандтля  $\text{Pr}_t \approx 1$  величины  $\zeta$  и  $\text{Ri}$  совпадают.

В настоящее время анализ профилей скорости и температуры для термически стратифицированной атмосферы достаточно полно изучен экспериментально и с помощью теории подобия Монина – Обухова [115], согласно которой турбулентный перенос в стратифицированном пограничном слое земли полностью определяется тремя величинами: турбулентным напряжением трения, турбулентным потоком тепла по вертикали и параметром  $g\beta = g/T_A$ , характеризующим влияние архимедовых сил плавучести.

Рассмотрим подробнее профиль скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы при наличии термической стратификации. Следуя Монину и Обухову [114, 115], введем безразмерный градиент скорости ветра и температуры соответственно:

$$\frac{\alpha z}{v_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi_m(z/L), \quad (4.77)$$

$$\frac{\alpha z}{\theta_*} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \varphi_n(z/L), \quad (4.78)$$

где  $\varphi_m$  и  $\varphi_n$  – некоторые универсальные функции, причем в случае безразличной стратификации  $\varphi_m(0) = \varphi_n(0) = 1$ . Используя затем соотношения (4.74) и (4.75), для коэффициентов турбулентной вязкости  $\nu_t$  и теплопроводности  $a_t$  можно записать

$$\nu_t = v_*^2 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad a_t = v_* \theta_* \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (4.79)$$

Тогда из соотношений (4.74), (4.75) и (4.79) для безразмерных универсальных функций получаем

$$\varphi_m(z/L) = \frac{\alpha v_* z}{\nu_t}, \quad \varphi_n(z/L) = \frac{\alpha v_* z}{a_t}. \quad (4.80)$$

Откуда

$$\varphi_m(z/L) = \varphi_n \left( \frac{z}{L} \right) \frac{a_t}{\nu_t} = \varphi_n \left( \frac{z}{L} \right) \frac{1}{\text{Pr}_t}. \quad (4.81)$$

Вопрос о величине турбулентного числа Прандтля  $\text{Pr}_t$  для стратифицированной атмосферы изучен пока недостаточно. Обычно предполагают, что это отношение равно единице при стратификации, близкой к безразличной, и уменьшается с ростом числа Ричардсона. Однако из других задач гидромеханики известно, что турбулентное число Прандтля обычно равно  $\text{Pr}_t = 0.7 \div 0.75$ .

Чтобы получить профиль скорости и температуры в условиях стратификации, необходимо знать функции  $\varphi_m(z/L)$  и  $\varphi_n(z/L)$ . При малых значениях  $\zeta$  их можно определить теоретически, а в общем случае лишь экспериментально. Следуя Монинову и Обухову, их можно представить в виде ряда. Поскольку  $\varphi_m(0) = 1$ , то при малых  $\zeta$  получаем

$$\varphi_m(z/L) = 1 + \alpha \frac{z}{L}, \quad (4.82)$$

где  $\alpha$  – постоянная. Подставляя это значение  $\varphi_m$  в (4.77) и интегрируя, находим

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \int \left( \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{L} \right) dz = \frac{1}{\alpha} \left( \ln z + \alpha \frac{z}{L} \right). \quad (4.83)$$

Постоянная  $\alpha$  может быть определена по данным наблюдений при стратификации, близкой к безразличной. Для нахождения  $z/L = \zeta$  необходимо знать вертикальный турбулентный поток тепла, что практически затруднительно. Однако если известны градиенты температуры и скорости ветра, то  $z/L$  определяется. Численные значения постоянной  $\alpha$  для устойчивой и неустойчивой стратификации по данным различных авторов имеют значительный разброс. Большинство полагает, что значение  $\alpha = 3$  при неустойчивой стратификации и  $\alpha = 4.7$  для устойчивой стратификации.

В настоящее время поведение функций  $\varphi_m(z/L)$  и  $\varphi_n(z/L)$  хорошо изучено экспериментально. Опытные данные зависимостей  $\varphi_m$  и  $\varphi_n$  от  $\zeta = z/L$  по материалам различных авторов приведены в работе [9] и хорошо описываются следующими формулами [9]:

$$\varphi_m = 1 + 4.7\zeta, \quad \varphi_n = 0.74 + 4.7\zeta \quad \text{при} \quad \zeta > 0, \quad (4.84)$$

$$\varphi_m = (1 - 15\zeta)^{-1/4}, \quad \varphi_n = 0.74(1 - 9\zeta)^{-1/2} \quad \text{при} \quad \zeta < 0. \quad (4.85)$$

Подставляя эти значения  $\varphi_m$  и  $\varphi_n$  в исходные формулы (4.77) и (4.78) для градиентов, а после интегрирования и для профилей скорости и температуры, при устойчивой стратификации соответственно находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{v_*}{\alpha} \left( \frac{1}{z} + 4.7 \frac{1}{L} \right), \quad \frac{u}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \left( \ln z + 4.7 \frac{z}{L} \right), \quad \zeta > 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \theta_* \left( \frac{0.74}{z} + 4.7 \frac{1}{L} \right), \quad \frac{\theta}{\theta_*} = 0.74 \ln z + 4.7 \frac{z}{L}, \quad \zeta > 0, \end{aligned} \quad (4.86)$$

В случае неустойчивой стратификации имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{v_*}{\alpha z} \left(1 - 15 \frac{z}{L}\right)^{-1/4}, \quad \zeta < 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\theta_*}{z} 0.74 \left(1 - 9 \frac{z}{L}\right)^{-1/2}, \quad \zeta < 0.\end{aligned}\tag{4.87}$$

К сожалению, получить простые выражения для профилей скорости и температуры в этом случае в квадратурах затруднительно.

#### 4.7. Профили скорости ветра и температуры при устойчивой стратификации и в условиях, близких к конвекции

Наиболее детальный анализ характеристик турбулентности выполнен для случая устойчиво стратифицированного пограничного слоя как в лабораторных условиях, так и в натуральных. Для атмосферы он выполнен в нижнем слое высотой  $50 \div 100$  м, где большинство переменных приводится к безразмерному виду путем использования в качестве масштабов высоты  $L$  и локальных потоков. Имеющиеся материалы свидетельствуют о том, что в случае устойчивой атмосферы двухслойная модель профиля скорости ветра, состоящая из линейного и логарифмического участков, хорошо выполняется не только для малых  $\zeta = z/L$ , но и вплоть до значений  $z/L = 0.3$ . Поэтому для устойчиво стратифицированной атмосферы можно использовать простейшие формулы (4.86) для основных характеристик атмосферы [9]. Если же  $z/L$  превышает значение 0.3, то простой связи между  $\varphi_m$  и  $z/L$  не обнаруживается.

В области чисел Ричардсона от 0 до 0.08 систематического различия между  $\nu_t$  и  $a_t$  не выявлено, так что в этом случае профили температуры подобны профилю скорости ветра.

При рассмотрении режима свободной конвекции, под которой понимается такое состояние приземного слоя атмосферы, при котором вертикальным переносом тепла и количества движения, обусловленным механической турбулентностью, т. е. турбулентностью за счет среднего сдвига скорости, можно пренебречь по сравнению с переносом вследствие тепловой конвекции. Это не означает, что турбулентная энергия механического происхождения пренебрежимо мала по сравнению с конвективной. Как отмечалось ранее, свободная конвекция возникает при числах Ричардсона и значении  $\zeta = z/L$ , близких к единице, так что скорости порождения турбулентной энергии за счет среднего сдвига и сил плавучести примерно равны. Однако

турбулентный перенос каждым из этих механизмов оказывается различным вследствие того, что различна структура вихрей в сравниваемых процессах. Вихри, образующиеся за счет работы среднего сдвига, имеют относительно малые размеры, и их структура близка к изотропной по сравнению с вихрями, порождаемыми за счет работы сил плавучести. Конвективной турбулентности свойственны вихри больших размеров и большей степени анизотропности, что обеспечивает более интенсивный вертикальный перенос.

При свободной конвекции динамическая скорость  $v_*$  уже не является характерным масштабом, и поэтому параметр Монина – Обухова  $L$  уже не характеризует профили скорости ветра и температуры. Градиент потенциальной температуры в режиме свободной конвекции является функцией от  $z$ ,  $g/T_A$  и  $H_3/\rho_0 c_p$ . Тогда из соображений размерности следует, что для градиента температуры должно выполняться соотношение

$$\frac{d\theta}{dz} = -C \left( \frac{H_3}{\rho_0 c_p} \right)^{2/3} \left( \frac{g}{T_A} \right)^{-1/3} z^{-4/3}, \quad (4.88)$$

где  $C$  – постоянная. Следовательно, для коэффициента турбулентной теплопроводности

$$a_t = -\frac{H_3}{\rho_0 c_p} \frac{d\theta}{dz} \quad (4.89)$$

в рассматриваемом случае режима свободной конвекции имеем

$$a_t = C^{-1} \left( \frac{g H_3}{\rho_0 c_p T_A} \right)^{1/3} z^{1/3}. \quad (4.90)$$

Отметим, что величина, стоящая в скобках в этой формуле, есть скорость продукции турбулентной энергии за счет сил плавучести. Интегрируя уравнение (4.88), получаем профиль потенциальной температуры в виде

$$\theta = 3C \left( \frac{H_3}{\rho_0 c_p} \right)^{2/3} \left( \frac{g}{T_A} \right)^{-1/3} z^{-1/3} + C_1, \quad (4.91)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования. Для определения постоянной необходимы измерения потока тепла. По данным Пристли [212] ее численное значение близко к 1.07.

Выражение для профиля скорости ветра можно получить следующим образом. Поскольку коэффициент турбулентной вязкости, с

одной стороны, равен  $\nu_t = v_*^2 / (\partial u / \partial z)$ , а с другой —  $\nu_t = a_t \text{Pr}_t$ , то, используя для  $a_t$  выражение (4.90), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*^2}{a_t \text{Pr}_t} = C \frac{v_*^2}{\text{Pr}_t} \left( \frac{gH_3}{\rho_0 c_p T_A} \right)^{-1/3} z^{-1/3}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\frac{u}{v_*} = -3C \frac{v_*}{\text{Pr}_t} \left( \frac{gH_3}{\rho_0 c_p T_A} \right)^{-1/3} z^{-1/3} = -\frac{3C}{\text{Pr}_t} \left( \frac{z}{L} \right)^{-1/3}. \quad (4.92)$$

Поведение  $\text{Pr}_t$  при свободной конвекции пока изучено недостаточно. Если его величина не зависит от  $z$ , то профиль скорости подчиняется закону  $z^{-1/3}$ .

#### 4.8. Механизм переноса турбулентной энергии по спектру при наличии сил плавучести

Рассмотрим кратко причины возникновения турбулентности и ее интенсивность в условиях движения атмосферного воздуха. Обычно местом возникновения начальных флуктуаций в ламинарном потоке являются области с наибольшими градиентами скоростей, которые имеют место вблизи твердых поверхностей. Для определенного вида профилей скорости и температуры амплитуда этих флуктуаций со временем возрастает, что приводит к появлению в потоке вихревых образований. Затем эти вихри, двигаясь по случайным траекториям, становятся причиной беспорядочных флуктуаций скорости и других физических характеристик или скалярных субстанций потока.

Из опытных данных следует, что развитая турбулентность характеризуется не дискретными значениями масштабов вихрей и частот флуктуаций, а непрерывным спектром масштабов и частот. Поскольку количество вихрей большого масштаба обычно лимитируется размерами потока (в данном случае размерами приземного слоя атмосферы), а размеры малых вихрей ограничены процессами диссипации вследствие вязкости, то кривая распределения спектральной плотности турбулентности должна иметь экстремум. На рис. 4.4 представлена типичная кривая спектрального распределения плотности энергии турбулентности  $E(k)$  от волнового числа  $k$ , где выделены три области. Область  $a_1$  больших или анизотропных вихрей, в которой происходит главное поступление энергии турбулентности от энергии основного движения. Здесь диссипация мала, и стационарность достигается благодаря установившемуся распаду больших ви-



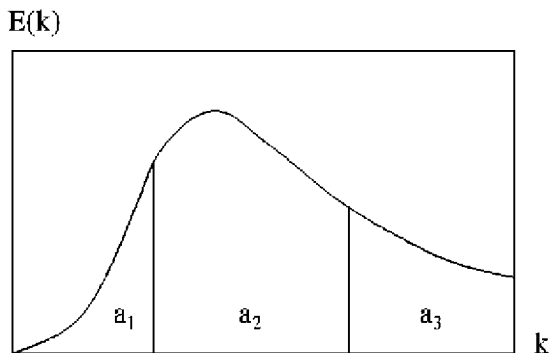


Рис. 4.4. Типичное распределение спектральной плотности турбулентной энергии от волнового числа

хрей на малые и соответствующему потоку энергии турбулентности в области малых масштабов.

Область  $a_2$  – так называемая инерционная или промежуточная область. В ней порождение и диссипация энергии турбулентности малы по сравнению с энергией турбулентности, связанной со спектральными переходами.

Область  $a_3$  характеризуется диссипацией энергии турбулентности благодаря вязкости.

Чтобы проанализировать спектральный баланс полной энергии турбулентности без разделения по компонентам, примем допущение о стационарности и однородности турбулентности в уравнении баланса энергии (4.54). Тогда, предполагая дополнительно, что тепло не переносится ни вдоль потока, ни поперек него, приходим к уравнению для так называемой модели однородной турбулентности. В этом случае нетрудно заметить, что нелинейные диффузионные члены уравнения баланса энергии описывают инерционные эффекты или эффект растяжения вихрей пульсационными скоростями, и они ничего не вносят в полную энергию, а их роль ограничивается перераспределением энергии между волновыми числами. Переходя к пространству волновых чисел, еще А. Н. Колмогоров [92] высказал мысль о том, что в спектре имеется значительная область высоких волновых чисел, в которой отсутствует поступление энергии извне. Поскольку энергия на своем пути от низких волновых чисел многократно переходит от одних вихрей к другим, естественно предположить, что влияние анизотропности источников питания не будет сказываться на энергии в рассматриваемой области малых масштабов, которая должна стремиться к изотропному состоянию. При этом силы давления стре-

мятся перераспределить энергию между различными компонентами. Это свойство, называемое локальной изотропностью, хорошо подтвердилось экспериментальными данными Бэтчелора [43] и других исследователей. Можно ожидать, что анизотропность имеет место, пока размеры вихрей примерно совпадают с масштабами, определяемыми градиентом скорости и термической структурой. Вихри меньших размеров с меньшими временными масштабами приобретают способность быстрее перераспределять энергию между компонентами и становятся более близкими к изотропным.

Из этих рассуждений следует, что спектральный перенос, обусловленный градиентом средней скорости, действует только в области анизотропии, так как если размеры вихрей достигают изотропной области, то их вклад становится равным нулю. Спектральный же перенос за счет градиента пульсационной скорости сохраняется и в изотропной области. Изложенные соображения и анализ взаимных спектров, описывающих порождение энергии, позволяют при больших числах Рейнольдса сформулировать следующую общую картину баланса энергии в термически стратифицированной среде. Энергоснабжение происходит на низких волновых числах за счет градиента скорости и температурного градиента, причем последний в зависимости от знака может служить и причиной стока энергии. Спектр здесь анизотропен. Распад вихрей, вызываемый средней скоростью растяжения, служит фактором передачи энергии от нижнего к верхнему концу анизотропного участка. Инерционные силы, связанные с растяжением вихрей, вследствие градиента пульсационных скоростей переносят энергию от низких волновых чисел анизотропного участка к более высоким. С ростом волнового числа под влиянием сил давления спектр становится более изотропным, а энергоснабжение уменьшается. При достаточно больших числах Рейнольдса существует область волновых чисел, в которой практически отсутствуют как энергоснабжение, так и диссипация. При этом имеет место только инерционный перенос. При еще более высоких волновых числах включается диссипация. В области, где играют роль только инерционный перенос и диссипация, спектр может рассматриваться как изотропный.

Для определения формы спектра в области изотропии А. Н. Колмогоров [92] предположил, что в изотропной области достаточно больших волновых чисел спектры, вообще говоря, должны быть функциями только скорости диссипации энергии и коэффициента кинематической вязкости. Таким образом, спектр  $E(k)$  будет функцией только от  $k$ ,  $\nu$ ,  $\varepsilon$ . Причем в простейшем случае, когда порождение и

диссипация равны, имеем

$$\varepsilon = -v'_1 v'_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} (1 - \text{Rf}).$$

Следуя теории размерности, из величин  $\nu$  и  $\varepsilon$  можно составить масштабы длины и скорости:

$$l = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad V = (\nu\varepsilon)^{1/4}.$$

Величина  $l$ , носящая название микромасштаба Колмогорова, характеризует размеры вихрей, в которых, в основном, осуществляется диссипация. В атмосфере до высот порядка 100 м значение  $l \sim 1$  мм. Вычисленное по этим масштабам число Рейнольдса близко к единице. Таким образом,  $l^{-1}$  представляет собой волновое число, вблизи которого диссипация является наибольшей, и спектр круто падает с ростом  $k$  в результате вырождения малых вихрей.

В равновесном интервале соображения размерности приводят к следующей форме спектра:

$$E(k) = V^2 l E_l(k, l) = (\nu^5 \varepsilon)^{1/4} E_l \left[ k (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \right], \quad (4.93)$$

где  $E_l$  — некоторая универсальная функция.

Если число Рейнольдса достаточно велико, то может существовать значительный интервал волновых чисел, в котором доминирует только инерционный перенос энергии ко все более малым вихрям. А. Н. Колмогоров предположил, что в этом инерционном интервале спектр не зависит от вязкости  $\nu$  и, следовательно, должен иметь форму

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (4.94)$$

где  $\alpha$  — универсальная постоянная ( $\alpha \simeq 1.4$ ).

Спектр температурных флуктуаций во многом аналогичен спектру флуктуаций скорости. Если выполнить энергетический анализ для соответствующих корреляционных функций, то обнаружится, что энергоснабжение и анизотропность наблюдается на низких частотах. С ростом волнового числа происходит уменьшение энергоснабжения и увеличение анизотропности переноса. При достаточно больших числах Пекле и Рейнольдса также существуют инерционный интервал, в котором масштабы температурных флуктуаций становятся все меньше в результате инерционного переноса, и, наконец, интервал диссипации, в котором молекулярные эффекты размывают температурные флуктуации наименьших масштабов.

Однако имеется и отличие, связанное с тем, что температурное поле не подвергается растяжениям само по себе, а переносится полем

скорости. Поэтому, хотя инерционные интервалы этих двух полей могут частично перекрываться, они не обязательно будут совпадать, если только число Прандтля не равно единице.

Если ввести микромасштаб для температурного поля  $l_\theta$ , то как показали С. Корсин и А. М. Обухов, при числах Прандтля, не сильно отличающихся от единицы,

$$l/l_\theta = \text{Pr}_t^{3/4}.$$

Для воздуха  $\text{Pr}_t \cong 0.7$ . В области пересечения инерционных интервалов, где термическая и вязкая диссипация несут существенны, можно ожидать, что трехмерный температурный спектр  $E_\theta(k)$  будет зависеть только от  $k$ ,  $\varepsilon$  и

$$\varepsilon_\theta = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\overline{\partial\theta'}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial\theta'}}{\partial x_j} \approx -\frac{\partial\theta}{\partial x_3} \overline{v_3'\theta'}.$$

Тогда единственно возможная форма спектра имеет вид

$$E_\theta = \beta \varepsilon_\theta \varepsilon^{1/3} k^{-5/3}, \quad (4.95)$$

который впервые был получен С. Корсиним [169]. Постоянная  $\beta$  должна быть близка к единице. Все сказанное по поводу температурного спектра применимо также и к другой скалярной субстанции, типа пассивной примеси, в области волновых чисел, где отсутствует динамическое взаимодействие.

## Глава 5

# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАСSEИВАНИЯ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ

### 5.1. Общие замечания

Проблема атмосферной диффузии примеси теоретически может быть рассмотрена на основе двух подходов. С помощью статистической теории, использующей Лагранжев способ описания динамики частиц в турбулентном потоке, и с помощью полуэмпирической теории турбулентности, использующей Эйлеров способ описания динамики примеси. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства, недостатки и ограничения. При эйлеровом описании приходится сталкиваться с трудностями замыкания не только уравнений движения (Рейнольдса), определяющих поле скорости, но и уравнения диффузии. При решении проблемы замыкания, связанной с определением вторых корреляционных моментов, обычно используется модель градиентного переноса, которая предоставляет возможность решения полной системы рассматриваемых уравнений и позволяет рассчитать поле концентраций в пространстве и времени. Однако, хотя этот подход и кажется весьма эффективным, он не решает проблему полностью из-за того, что для его применения необходимо знать коэффициенты турбулентной диффузии, которые удается надежно оценить лишь для некоторых частных случаев. В проблеме же атмосферной диффузии эти коэффициенты являются сложными функциями координат и времени. Поэтому расчет диффузии примеси в окружающей среде не может быть сведен к некоторой однозначно сформулированной задаче математической физики, а обязательно требует привлечения тех или иных эмпирических гипотез и допущений. По этой причине, несмотря на наличие многочисленных публикаций и имеющийся обширный материал по проблеме атмосферной диффузии примеси, практически до сих пор отсутствует завершенная теория рассеивания примеси и единая физико-математическая модель, способная объяснить и учесть все многочисленные аспекты проблемы переноса и диффузии в атмосфере химических и радиоактивных газоаэрозольных веществ.

В прикладных расчетах для определения поля концентраций загрязняющих веществ реальные источники выбросов обычно моделируют точечными, линейными или плоскими источниками. Простейшей моделью, позволяющей определить поле концентраций от непрерывно действующего или мгновенного источника, требующей мини-

мального набора входных данных, является Гауссова модель для точечного источника, которая широко известна и в различных модификациях часто используется в практических расчетах [10, 15, 70, 110, 138, 145, 156].

Для прогнозирования полей концентрации по модели Гаусса необходимо сначала определить каким-либо способом эффективную высоту  $H$ , где расположен фиктивный точечный источник, и дисперсионные параметры рассеивания примеси  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . Наиболее ранним и достаточно традиционным способом их определения являются широко известные рекомендации Паскуилла – Гиффорда. В последнее время в моделях расчета атмосферной диффузии примеси при определении параметров дисперсии наряду с простейшими метеорологическими характеристиками предполагается использование и более сложных масштабных параметров пограничного слоя атмосферы, таких как динамическая скорость, корреляционные функции скоростей, спектр турбулентности, масштаб Монина – Обухова, масштаб вертикальной конвективной скорости, число Ричардсона и т. п. В общем случае выбор модели зависит от цели расчета и наличия входной информации.

Математическое моделирование распространения примеси в локальном и в региональном или глобальном, т. е. в “большом” масштабе имеет свою специфику. Прежде всего, уточним термин “большой масштаб”. В задачах атмосферной диффузии крупномасштабными следует считать такие движения, на которые существенное влияние может оказывать вращение Земли. Важной мерой влияния вращения является число Россби, определяемое следующим образом. Пусть  $L$  есть характерный пространственный масштаб движения примеси. Время, требующееся для перемещения на расстояние  $L$  элементарного жидкого объема, движущегося со скоростью  $W$ , равно  $L/W$ . Если этот отрезок времени существенно меньше периода вращения Земли, то процесс рассеивания не будет испытывать влияния вращения Земли в течение времени  $L/W$ . Таким образом, можно предположить, что вращение станет существенным для переноса примеси при условии, что  $L/W \geq \Omega^{-1}$  или  $\mathcal{E} = W/(\Omega L) < 1$ . Здесь  $\Omega$  – угловая частота вращения Земли. Безразмерный параметр  $\mathcal{E}$  обычно называют числом Россби. Он служит основой для оценки масштаба движений. Для крупномасштабных движений становятся существенными силы Кориолиса.

При исследовании процессов атмосферной диффузии в больших мезометеорологических масштабах обычно обращаются к довольно сложным моделям, основанным на численном решении начально-краевых задач для уравнений гидротермодинамики атмосферы в рамках

Эйлера описания движения примеси или на решении задачи Коши для траекторных дифференциальных уравнений движения клуба примеси в рамках лагранжевой модели. При таком подходе важное место отводится моделированию процессов турбулентного обмена в пограничном слое атмосферы, что приводит к необходимости использования специфических данных радиозондирования метеорологических параметров, данных с синоптических карт, данных наземных наблюдений и т. д. Эти вопросы численного моделирования атмосферных процессов представляют собой самостоятельное научное направление и выходят за рамки нашего рассмотрения. Подробнее они изложены, например, в работах В. В. Пененко и А. Е. Алояна [127], В. В. Акименко [4], С. А. Довгого, В. А. Прусова, О. В. Копейка [73].

Ниже будут рассмотрены некоторые, наиболее ранние, модели, предложенные различными исследователями для описания турбулентной диффузии в приземном слое атмосферы в локальном масштабе.

## 5.2. Статистический способ описания диффузии. Теория Тейлора

Прежде всего обратимся к рассмотрению статистического способа описания процесса диффузии. Хорошо известно, что основное уравнение диффузии может быть выведено в рамках лагранжева способа описания процесса диффузии из предположения, что каждая индивидуальная диффундирующая частица (жидкий объем) движется случайным образом, причем ее координаты меняются со временем по закону марковского случайного процесса. Такой вывод приводит к следующей статистической интерпретации коэффициентов диффузии:

$$k_i = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_i^2(t)}{dt}, \quad \sigma_i(t) = \overline{[x_i(t) - x_i(0)]^2}, \quad (5.1)$$

где  $x_i(t)$  – абсцисса диффундирующей частицы в момент  $t$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Отсюда видно, что коэффициент диффузии  $k_i$  определяется через дисперсию координаты диффундирующей частицы  $\sigma_i(t)$ , которая зависит от времени.

В статистических теориях турбулентности для характеристики структуры поля турбулентного потока обычно используются корреляции между различными составляющими пульсационной скорости. Например, удобной характеристикой турбулентности является лагранжева корреляционная функция поля скорости

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v'_i v'_{it}}}{v_i'^2} \quad \text{или} \quad R_L(\tau) = \frac{\overline{v'_i(t) v'_i(t + \tau)}}{\sqrt{\overline{v_i'^2(t)}} \sqrt{\overline{v_i'^2(t + \tau)}}}, \quad (5.2)$$

где  $v'_i(t) = dx_i(t)/dt$ ;  $R_L(\tau)$  – коэффициент корреляции между составляющей скорости  $v'_i(t)$  жидкой частицы в момент времени  $t$  и той же величиной по истечении промежутка времени  $\tau$ . Масштаб турбулентности при этом определяется соотношением

$$L = v'_i \int_0^{\infty} R_L(\tau) d\tau, \quad (5.3)$$

а характерное время – величиной

$$T = \int_0^{\infty} R_L(\tau) d\tau. \quad (5.4)$$

Различные корреляционные функции в общем случае могут принимать значения в промежутке от 0 до 1.

Реальный турбулентный поток состоит из множества разнообразных вихрей с различным диапазоном скоростей и размеров. Учет этих факторов осуществляется с помощью спектральной функции турбулентности  $E(k)$ , которая описывает распределение турбулентной энергии в зависимости от волнового числа  $k$ , показывающего число волн на единицу длины. Питание пульсационного движения происходит от среднего движения каскадным механизмом переноса энергии от больших вихрей к меньшим. Диффузионные свойства турбулентного движения при лагранжевом способе описания подробно исследовались Дж. Тейлором [223] и другими авторами [115, 148].

Рассмотрим произвольную жидкую частицу, которая в момент времени  $t_0$  находится в начале подвижной декартовой системы координат, связанной с осредненным движением. Проследим за движением этой частицы в поле турбулентного потока. Совершенно очевидно, что под действием беспорядочных турбулентных пульсаций скорости  $v'$  через промежуток времени  $t$  эта частица будет находиться на некотором расстоянии

$$Y(t) = \int_{t_0}^t v'(\tau) d\tau$$

от начальной точки. Координата  $Y$  является случайной величиной, и ее флуктуации могут быть описаны отдельно для каждого промежутка времени. Если рассматривается большое число случаев, то по истечении того же промежутка времени частицы окажутся хаотично распределенными как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Среднее значение отклонения  $\bar{Y}$  равно нулю вследствие



равновероятности положительных и отрицательных составляющих скорости  $v'$ . Но частицы не обязательно возвращаются в свою начальную точку, и поэтому среднеквадратическое значение отклонения  $\sqrt{\overline{Y^2}}$  отлично от нуля и является функцией времени диффузии. Определим изменение значения  $\overline{Y^2}$  по следующей очевидной формуле:

$$\frac{d}{dt}\overline{Y^2} = 2\overline{Y} \frac{d\overline{Y}}{dt} = 2\overline{v'Y}. \quad (5.5)$$

Из определения коэффициента корреляции (5.2) имеем соотношение

$$\overline{v^2} \int_0^t R_L dt = \int_0^t \overline{v'v'_t} dt. \quad (5.6)$$

Правая часть этого уравнения может быть записана в виде

$$\int_0^t \overline{v'v'_t} dt = \overline{v' \int_0^t v'_t dt} = \overline{v'Y}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\overline{Y^2} = 2\overline{v'Y} = 2\overline{v'^2} \int_0^t R_L dt. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) показывает, что дисперсия  $\overline{Y^2}$  есть функция  $\overline{v'^2}$ ,  $R_L$  и времени  $t$  и представляет собой уравнение одномерной диффузии жидкой частицы. В трехмерном случае оно дает проекцию распространения частиц на ось  $y$ .

Рассмотрим два частных случая. В первом считаем, что время диффузии  $t$  велико по сравнению с характерным временем  $T$ , т. е.  $t/T \gg 1$ . Тогда интеграл в правой части уравнения (5.7) имеет определенное предельное значение  $\tilde{T}$  и, следовательно, среднеквадратическое значение отклонения определится уравнением

$$\frac{d}{dt}\overline{Y^2} = 2\overline{v'^2}\tilde{T}. \quad (5.8)$$

Откуда следует, что

$$\overline{Y^2} = 2\overline{v'^2}\tilde{T}t \quad \text{или} \quad \sqrt{\overline{Y^2}} = \sqrt{2\overline{v'^2}\tilde{T}}\sqrt{t}. \quad (5.9)$$

Во втором случае, для интервала времени  $t$ , которое мало по сравнению с характерным временем  $T$ , т. е. когда  $t/T \ll 1$ , величина

коэффициента корреляции приближенно равна единице для всего промежутка интегрирования. Вследствие этого из уравнения (5.7) следует

$$\frac{d}{dt} \overline{Y^2} = 2\overline{v'^2}t,$$

и, следовательно, в этом случае значение среднеквадратичного отклонения будет

$$\overline{Y^2} = \overline{v'^2}t^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{\overline{Y^2}} = \sqrt{\overline{v'^2}}t,$$

Таким образом, для больших промежутков времени дисперсия  $\overline{Y^2}$  пропорциональна  $t$  в первой степени, а для малых времен диффузии дисперсия  $\overline{Y^2}$  пропорциональна квадрату времени  $t^2$ . Для других промежуточных случаев, включая  $t \sim T$ , величина интеграла в правой части уравнения (5.7) зависит от формы корреляционной кривой  $R_L(\tau)$ , и, следовательно, дисперсия в соответствии с (5.7) определяется выражением

$$\overline{Y^2}(t) \approx \sigma_i^2(t) = 2\overline{v_i'^2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} R_L(\tau) d\tau. \quad (5.10)$$

Эта важная формула для стандартного отклонения  $\sigma_i^2$ , характеризующего распределение примеси в турбулентном потоке, была получена Тейлором в 1921 году. Если в выражении (5.10) произвести интегрирование по частям, то можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} R_L(\tau) d\tau &= \tau_1 \int_0^{\tau_1} R_L(\tau) d\tau \Big|_0^t - \int_0^t \tau_1 R_L(\tau_1) d\tau_1 = \\ &= t \int_0^t R_L(\tau) d\tau - \int_0^t \tau R_L(\tau) d\tau = \int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, вместо (5.10) имеем

$$\sigma_i^2(t) = \overline{Y^2}(t) = 2\overline{v_i'^2} \int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau. \quad (5.11)$$

Это соотношение было получено Кампе де Ферье [148, 190]. Оно связывает дисперсии примеси с дисперсией скорости ветрового потока. В свое время еще Тейлор показал, что если ввести в рассмотрение

лагранжеву функцию энергетического спектра  $E_L(n)$ , то коэффициент корреляции  $R_L(\tau)$  и спектральная функция связаны между собой преобразованием Фурье:

$$R_L(\tau) = \frac{1}{v'^2} \int_0^{\infty} E_L(n) \cos 2\pi n \tau dn. \quad (5.12)$$

Подставив выражение (5.12) в (5.11) и проведя некоторые преобразования, получим следующую спектральную форму для дисперсии:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(t) &= 2 \int_0^{\infty} E_L(n) dn \int_0^t (t - \tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \approx \\ &\approx t^2 \int_0^{\infty} E_L(n) \frac{[\sin(\pi n t)]^2}{(\pi n t)^2} dn. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из нее следует, что при изучении процесса рассеивания примеси со статистических позиций важное место занимают временные масштабы и спектр энергии турбулентности. Сомножитель  $H(n, t) = [\sin(\pi n t)/(\pi n t)]^2$  ограничивает влияние высоких частот при  $t \geq (\pi n)^{-1}$ . Поскольку при малых  $t$  функция  $H(n, t) \simeq 1$ , то из соотношения (5.13) следует, что с ростом  $t$  вклад высокочастотных пульсаций в турбулентном спектре уменьшается, и при больших  $t$  диффузия примеси определяется низкочастотными вихрями, а при  $t \rightarrow \infty$

$$\sigma^2(t) \rightarrow \pi E_v^L(0)t = 2\sigma_v^2 t T_L, \quad (5.14)$$

где  $T_L$  – лагранжев масштаб времени [41].

Чтобы воспользоваться выражением (5.10) для расчета дисперсий  $\sigma_i^2$ , необходимо знать параметры турбулентности  $\overline{v_i'^2}$  и  $R_L(t)$ . Если предположить, что энергии лагранжевых и эйлеровых турбулентных полей скорости равны друг другу, то  $\overline{v_i'^2}$  можно найти непосредственно из измерений на метеорологической мачте или с помощью теории пограничного слоя атмосферы. Задачу определения  $R(t)$  решить столь же легко не удается. Поэтому Гиффорд [177], а также Хей и Паскуилл [208] предположили подобие лагранжевых  $R_L(t)$  и эйлеровых  $R_E(t)$  корреляционных функций или энергетических спектров  $E_L(n)$  и  $E_E(n)$ , что эквивалентно

$$R_L(\beta t) = R_E(t), \quad n E_L(n) = \beta n E_E(\beta n).$$

где масштабный множитель  $\beta$  определяется как отношение лагранжева и эйлерова масштабов времени:

$$\beta = T_L/T_E.$$

Гипотеза о подобии формы эйлеровых и лагранжевых характеристик проверялась на основе результатов нескольких экспериментов, в которых турбулентные пульсации одновременно измерялись на метеорологической башне (эйлерова система отсчета) и с помощью плавущего в воздушном потоке уравновешенного баллона (лагранжева система отсчета). Измерения подтвердили правомочность гипотезы подобия. Согласно упрощенной теории и данным, приведенным у Паскуилла [208], параметр

$$\beta_i = \frac{a}{\sqrt{v_i'^2/W}},$$

где  $W$  – средняя скорость турбулентного потока. Значение постоянной  $a$  по имеющимся данным примерно равно  $a = 0.6$ , следовательно,  $\beta \approx 2$  для ПСА в дневное время,  $\beta \approx 4$  при безразличной стратификации и  $\beta \approx 10$  при устойчивой. Если  $\beta$ ,  $R_E$  и  $E_E$  известны, то с помощью соотношений (5.13) и (5.14) можно оценить требуемые лагранжевы характеристики  $R_L$  и  $E_L$ .

Паскуилл показал [208], что, используя определение энергетического спектра, выражение (5.10) можно также преобразовать к виду

$$[\sigma_y^2]_{T_s, t} = [\overline{v'^2}]_{\tau, 0} t^2 \int_0^{\infty} E_L(n) \left[ 1 - \frac{\sin^2(n\pi T_s)}{(n\pi T_s)^2} \right] \left[ \frac{\sin^2(n\pi t)}{(n\pi t)^2} \right] dn,$$

где  $T_s$  – время отбора проб;  $t$  – время диффузии;  $\tau$  – время достаточно большое для того, чтобы включить в  $v'^2$  основную часть энергетического спектра турбулентности. При использовании эйлерова спектра  $E_L(n)$  следует заменить на  $E_E(n)$  и разделить временную переменную на  $\beta$  в множителях, содержащих синусы. Эти формулы описывают фильтры, которые эффективно подавляют турбулентные флуктуации с временными масштабами, меньшими времени диффузии  $t$  и большими времени отбора проб  $T_s$ . Следовательно, спектральное окно соответствует периодам от  $t$  до  $T_s$ . Таким образом, согласно статистической теории задача определения дисперсий сводится к использованию спектров пульсаций скорости ветра для получения упрощенных соотношений, удобных для практических расчетов, которые затем анализируются и подправляются на основе сравнения с данными измерений.

В практических расчетах часто используются простейшие оценки для дисперсий, например,

$$\sigma^2(t) = \overline{(v_t'^2)} t^2. \quad (5.15)$$

Если ввести в рассмотрение стандартное отклонение угловых флуктуаций направления скорости ветра согласно соотношению

$$\sigma_{\theta y}^2 = (\overline{v_i'^2}) / W^2,$$

и вспомнить, что скорость ветра  $W = x/t$ , то из соотношения (5.15) для дисперсии примеси имеем

$$\sigma_i^2(t) = \sigma_{\theta i}^2 x^2. \quad (5.16)$$

Позднее при рассмотрении струйно-диффузионной модели будет показано, что это только часть дисперсии, которая обусловлена механизмом крупномасштабной составляющей турбулентности, то есть большими вихрями.

Другой практический способ определения дисперсии связан с приближенной аппроксимацией коэффициента лагранжевой корреляции экспоненциальной функцией вида

$$R_L(t) = \exp\left(-\frac{t}{T_L}\right), \quad T_L = \int_0^T R_L(\tau) d\tau. \quad (5.17)$$

Тогда, подставляя выражение (5.17) в (5.10), после соответствующих преобразований имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= 2\overline{v'^2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right) d\tau = \\ &= 2\overline{v'^2} T_L^2 \left[ \frac{t}{T_L} + 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_L}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Уравнение (5.18) является важной практической формулой для расчета дисперсий в современных моделях атмосферной диффузии [187], которые обычно записываются в виде

$$\sigma_{y,z}^2 = 2\sigma_{v,w}^2 T_{Ly,z}^2 \left[ \frac{t}{T_{Ly,z}} + 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_{Ly,z}}\right) \right], \quad (5.19)$$

где  $\sigma_v^2 = \overline{v'^2}$ ;  $\sigma_w^2 = \overline{w'^2}$ .

Использование соотношения (5.19) при наличии данных о спектре турбулентности в пограничном слое атмосферы позволяет получить оценки для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ .

### 5.3. Гауссова модель диффузии примеси и формулы Сэттона

Несмотря на важность и содержательность лагранжевых и эйлеровых характеристик турбулентности в большинстве практических расчетов используются более простые модели диффузии. В научной литературе и практике инженерных расчетов загрязнения воздуха наиболее широко используется так называемая гауссова модель рассеивания примеси. В основе этой модели лежат полученные выше выражения для распределения концентрации, найденные путем аналитического решения уравнения турбулентной диффузии при постоянных скорости ветра  $W$  и коэффициентах диффузии  $k_y$  и  $k_z$ . Достаточно общее выражение для концентрации от непрерывного точечного источника мощностью  $M$  без учета влияния земной поверхности при средней скорости ветра  $W$  получено теоретически (см. выражение (3.35)) в форме двумерного выражения Гаусса

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi W \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right),$$

которое и составляет основу гауссовой модели атмосферной диффузии. Стандартная гауссова формула для распределения концентрации от непрерывного точечного источника, расположенного на высоте  $H$  над поверхностью земли, с граничными условиями отражения на поверхности земли получена в главе 3 и имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi W \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\}, \quad (5.20)$$

в которой  $M$  – мощность непрерывного источника;  $W$  – расчетная скорость ветра;  $H$  – эффективная высота источника;  $y$  – расстояние в поперечном к ветру направлении;  $z$  – высота над уровнем земли;  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  – дисперсии или эмпирические параметры рассеивания, в общем случае зависящие не только от расстояния до источника  $x$ , но и от состояния атмосферной устойчивости. Практически эти параметры в гауссовой модели оцениваются на основе экспериментальных данных, полученных при различных метеорологических условиях. Важно отметить, что формула Гаусса описывает процесс диффузии примеси лишь приближенно. Однако в практическом отношении приведенная формула (5.20) для расчета поля концентрации очень удобна. Она применима при кратковременном выбросе из точечного источника.

С помощью функции рассеивания эта формула для поля концентрации записывается в форме

$$C(x, y, z) = MG(x, y, z), \quad (5.21)$$

где функция рассеивания  $G(x, y, z)$  равна

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_z W} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\}. \quad (5.22)$$

При непрерывном продолжительном выбросе осредненное значение концентрации в модели Гаусса согласно [70, 156] определяется по формуле

$$C_{ij}(x, y, z) = \frac{M\eta_i}{(2\pi)^{3/2}x} \sum_j \frac{w_j}{\sigma_{y,j}\sigma_{z,j}\overline{W}_j} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_{y,j}^2}\right) \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_{z,j}^2}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_{z,j}^2}\right] \right\}, \quad (5.23)$$

где индекс  $j$  указывает на значение величины при  $j$ -ой категории устойчивости атмосферы;  $w_j$  – повторяемость  $j$ -той категории устойчивости за время осреднения;  $\eta_i$  – параметр, характеризующий повторяемость направлений ветра по румбам розы ветров. У поверхности земли ( $z = 0$ ) выражение для концентрации заметно упрощается

$$C_{ij}(x, y, z) = \frac{2M\eta_i}{(2\pi)^{3/2}x} \sum_j \frac{w_j}{\sigma_{y,j}\sigma_{z,j}\overline{W}_j} \times \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_{y,j}^2}\right) \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_{z,j}^2}\right). \quad (5.24)$$

Поле средних концентраций, учитывающих нестационарность ветра по направлению, получают путем осреднения в каждом секторе и суммирования расчетов, выполненных для каждого румба розы ветров.

После выброса примеси в атмосферу ее интегральное содержание в облаке может изменяться за счет трех основных механизмов: радиоактивного распада, гравитационного осаждения примеси на поверхность земли и за счет вымывания осадками. Эти три процесса в

гауссовой модели обычно называют факторами или функциями истощения облака  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  и  $F_3(x)$  соответственно. Величины  $F_i(x)$  носят характер поправочных функций. Функция истощения облака выбросов в результате радиоактивного распада определяется по формуле

$$F_1(x) = \exp(-\lambda x/W),$$

где  $\lambda$  – постоянная радиоактивного распада.

Функция истощения облака в результате процессов вымывания осадками определяется по формуле

$$F_3(x) = \exp(-\Lambda x/W),$$

где  $\Lambda$  – постоянная вымывания осадками.

Функция истощения облака вследствие сухого гравитационного оседания определяется по формуле

$$F_2(x) = \exp \left[ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w_g}{W} \int_0^x \frac{1}{\sigma_z} \exp \left( -\frac{H^2}{2\sigma_z^2} \right) d\xi \right],$$

где  $H$  – эффективная высота выброса;  $w_g$  – скорость гравитационного оседания.

С учетом этих факторов формула для концентрации  $C(x, y, z)$  имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{MF_1(x)F_2(x)F_3(x)}{2\pi\sigma_y\sigma_zW} \exp \left( -\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right) \times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}. \quad (5.25)$$

Многие годы формулы (5.20) и (5.25) составляли основу приближенных оценок поля концентраций от наземных и высотных непрерывных точечных источников. Сложность проблемы здесь состоит в способе определения эффективной высоты  $H$  и дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , о которых речь будет идти ниже.

В свое время для учета температурной стратификации атмосферы Сэттон [138] предложил аппроксимировать корреляционную функцию  $R(t)$  степенной формулой:

$$R(t) = \left( 1 + \frac{t}{T_i} \right)^n, \quad (5.26)$$



где  $T_i$  – некоторое характерное время. Тогда при больших  $t$  для дисперсии имеет место соотношение

$$\sigma_i^2(t) = \frac{C_i^2}{2}(Wt)^{2-n}, \quad (5.27)$$

где  $C_i$  – эмпирические коэффициенты;  $n$  – показатель, зависящий от стратификации атмосферы.

На этой основе Сэттон предложил приближенные формулы для расчета концентрации загрязнений от точечных и линейных источников. В случае высотных источников Сэттон, ориентируясь на экспериментальные данные, рекомендует считать коэффициенты  $C_i$  зависящими от высоты источника  $H$ . Эти формулы являются модификацией формул Гаусса.

В случае непрерывного точечного источника в безграничной среде формула для расчета концентрации по Сэттону имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{2M}{\pi C_y C_z W x^{2-n}} \exp \left[ -x^{n-2} \left( \frac{y^2}{C_y^2} + \frac{z^2}{C_z^2} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Если же аналогичный точечный источник находится в полуограниченной среде и расположен в точке  $(0, 0, H)$ , то эта формула имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{\pi C_y C_z W x^{2-n}} \exp \left( -\frac{y^2}{C_y^2 x^{2-n}} \right) \times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z-H)^2}{C_z^2 x^{2-n}} \right] + \exp \left[ -\frac{(z+H)^2}{C_z^2 x^{2-n}} \right] \right\}. \quad (5.29)$$

Формула для приземной концентрации от точечного источника получается из (5.29) при  $z = 0$ , т. е.

$$C(x, y, 0) = \frac{2M}{\pi C_y C_z W x^{2-n}} \exp \left( -\frac{y^2}{C_y^2 x^{2-n}} \right) \exp \left( -\frac{H^2}{C_z^2 x^{2-n}} \right). \quad (5.30)$$

В случае линейного непрерывного источника длиной  $2b$

$$C(x, y, z) = \frac{M}{(\pi C_z W x^{1-n/2})^{1/2}} \exp \left( -\frac{z^2}{C_z^2 x^{2-n}} \right) \times \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{b-y}{C_y x^{1-n/2}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{b+y}{C_y x^{1-n/2}} \right) \right], \quad (5.31)$$

где  $\operatorname{erf}$  – функция ошибок. В случае безграничного линейного непрерывного источника

$$C(x, z) = \frac{2M}{(\pi C_z W x^{1-n/2})^{1/2}} \exp \left( -\frac{z^2}{C_z^2 x^{2-n}} \right). \quad (5.32)$$

Распределение примеси от мгновенного точечного источника производительностью  $Q$  согласно модели Гаусса описывается выражением вида (3.74), которое с помощью дисперсий

$$\sigma_x^2 = 2k_x t, \quad \sigma_y^2 = 2k_y t, \quad \sigma_z^2 = 2k_z t \quad (5.33)$$

записывается в форме

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\sqrt{8\pi^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z}} \times \exp \left[ -\frac{(x - Wt - \xi)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \eta)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - \zeta)^2}{2\sigma_z^2} \right]. \quad (5.34)$$

Для расчета поля концентраций от мгновенного точечного источника Сэттон предложил использовать следующее соотношение:

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{\pi^{3/2} C_x C_y C_z (Wt)^{3(2-n)/2}} \times \exp \left[ -(Wt)^{n-2} \left( \frac{x^2}{C_x^2} + \frac{y^2}{C_y^2} + \frac{z^2}{C_z^2} \right) \right], \quad (5.35)$$

где  $n$  – некоторое число, связанное с формой профиля ветра и состоянием атмосферы. Нетрудно видеть, что если

$$n = 1, \quad C_x^2 = C_y^2 = C_z^2 = C^2 = \frac{4k}{W}, \quad (5.36)$$

то соотношение (5.35) совпадает с решением уравнения диффузии при постоянных скорости ветра и коэффициенте турбулентной диффузии  $k$ .

В целом сопоставление формул Сэттона с различными эмпирическими данными о диффузии в атмосфере [15] показывает, что хотя формулы Сэттона весьма неточно описывают реальные лагранжевы корреляционные функции, тем не менее их удается удовлетворительно согласовать с имеющимися эмпирическими данными о диффузии, если только значительно расширить интервал допустимых значений  $n$  и допустить, что не только параметры  $C_i$ , но и  $n$  могут принимать различные значения по различным направлениям ( $n \sim n_i$ ). В этом случае число неопределенных параметров в формулах теории Сэттона оказывается настолько большим, что всегда имеется возможность согласовать расчеты с полевыми наблюдениями.

#### 5.4. Обзор моделей по оценке начального подъема газоаэрозольных выбросов в атмосферу

Характер распространения и диффузии примесей в атмосфере зависит от большого числа факторов, включающих начальные условия выбросов, продолжительность выбросов, метеорологические условия, температурную стратификацию атмосферы и т.д. В режиме нормальной эксплуатации выбросы радиоактивных газов и аэрозолей от АЭС обычно происходят в форме непрерывной струи, а залповые или аварийные выбросы могут происходить в форме облака подобного тому, которое наблюдается при ядерном взрыве. Имеются различные модели схематизации этих выбросов. Остановимся на непрерывном выбросе.

Существующие модели атмосферной диффузии, включая гауссову модель, априори предполагают, что процесс рассеивания примеси происходит в общем случае из фиктивного точечного источника, расположенного на некоторой эффективной высоте  $H = H_0 + \Delta H$ , где  $H_0$  – высота трубы;  $\Delta H$  – подъем выбросов за счет начального импульса и сил плавучести. Анализу оценки этой высоты подъема  $\Delta H$  посвящена обширная литература. Трудность определения высоты начального подъема газоаэрозольных выбросов связана с тем, что она зависит от большого числа факторов, включающих начальные условия выбросов, их продолжительность, метеорологические условия, термическую стратификацию атмосферы и т.д. Предпринималось много попыток создать расчетную схему исследуемого процесса подъема выбросов.

Простейшие оценки  $\Delta H$  основаны на использовании некоторых результатов теории распространения турбулентных струй в неподвижной однородной по температуре атмосфере и нахождении эмпирических связей между  $\Delta H$  и различными факторами. Для однородных условий, когда отсутствуют различия в температурах между струей и окружающей средой, еще из первых работ по теории струи В. Толмина, а также Г. Н. Абрамовича [3] следовало, что вертикальная скорость  $w \sim w_0 z^{-1}$ , где  $w_0$  – начальная скорость подъема. Тогда, очевидно, что при наличии сносящего потока  $\Delta H \sim w_0/W$ , где  $W$  – скорость ветрового потока. Такая формула без специального обоснования была использована П. И. Андреевым [7]:

$$\Delta H = 3.8R_0 \frac{w_0}{W}, \quad (5.37)$$

где  $R_0$  – радиус трубы;  $W$  – скорость ветра на высоте флюгера.

В работе [108] приводятся экспериментальные данные Раппа и др. о подъеме струи аммония в аэродинамической трубе, на основа-

нии которых выведена формула, аналогичная (5.37):

$$\Delta H = 3R_0 \frac{w_0}{W}. \quad (5.38)$$

Очевидным недостатком этих формул является их эмпиризм и то, что они не учитывают возможный перегрев примеси.

Чисто тепловой подъем примеси от точечного источника без учета действия динамических факторов исследовался Я. Г. Зельдовичем [80] и рядом других авторов. Было получено, что для конвективных условий  $w$  убывает обратно пропорционально  $z^{1/3}$ . Очевидно, можно заключить, что  $\Delta H$  уменьшается обратно пропорционально  $W^3$ .

Сэттон [138] предположил, что ось нагретой струи в сносящем потоке совпадает с траекторией частицы, составляющие скорости которой  $w$  по вертикали и  $W$  по горизонтали. Он принял далее, что вертикальное расстояние  $z$  можно заменить на криволинейное расстояние  $s$  по оси струи от источника до этой высоты. Тогда из результатов Шмидта следует  $w = w_1 s^{1/3}$ , где  $w_1$  – некоторая постоянная. За начальный подъем  $\Delta H$  принималась высота  $z$ , где угол наклона к горизонту равен  $10^\circ$ . В настоящее время известны [15, 70, 74] более сложные эмпирические соотношения по определению  $\Delta H$ .

Для определения эффективной высоты широко используются фотографии дымового факела в естественных и лабораторных условиях. Одна из первых формул, построенная в результате обработки снимков факела от трех труб ядерного реактора в Оак-Ридже (США), была получена Холландом [15]. Он дополнил указанное выше соотношение типа Раппа и др. членом, учитывающим тепловую мощность источника  $Q_T$  и получил, что

$$\Delta H = 3.0 \frac{w_0 R_0}{W} + 4 \cdot 10^{-5} \frac{Q_T}{W}, \quad (5.39)$$

где  $\Delta H$  и  $R_0$  в метрах;  $Q_T$  берется в кал/с,  $w_0$  и  $W$  – в м/с. В дальнейшем оказалось, что для согласования формулы Холланда с результатами наблюдений нужно умножить  $\Delta H$  на коэффициенты, изменяющиеся от 0.4 до 2.1.

Бозанке [159] один из первых получил экспериментальные данные о подъеме дымовых факелов примерно на расстоянии 250 м от труб. Впоследствии Бозанке с соавторами развили довольно громоздкую полумэмпирическую схему определения  $\Delta H$ . Опытная проверка этой схемы показала, что она пригодна лишь только для малых расстояний от источника, а для достаточно больших расстояний дает сильно заниженные значения.

Оригинальные опыты по определению начального подъема были проведены в районе двух небольших английских электростанций. Вместе с выбросами из труб, высота которых составляла 80 и 130 м, выпускались уравновешенные шары, наполненные водородом. Наблюдения за ними велись с помощью дальнометров до расстояний примерно 1 ÷ 2 км. В результате обработки полученных данных Лукас и др. [199] получили эмпирическую формулу

$$\Delta H = \alpha_1 \frac{Q_T^{1/4}}{W}. \quad (5.40)$$

Коэффициент  $\alpha_1$  для одной станции оказался равным 600, а для другой 760 м<sup>2</sup>·Мвт<sup>-1/4</sup>/с, если  $Q_T$  в Мвт. Эта формула проверялась рядом авторов, которые получили разные значения  $\alpha_1$ .

Обширный материал наблюдений за дымовым факелом в Швеции представлен в работе Брингфелта [164]. В 70 сериях наблюдений продолжительностью от 1/2 и 1 часа фотографировались факелы более чем от 30 дымовых труб, а также фиксировалось распределение температуры и скорости ветра с высотой. Эти данные широко использовались различными авторами для проверки предложенных формул. Обзор ряда других исследований по определению начального подъема содержится в работах Бригса [162] и Ченади [171].

Существенный шаг в построении теории распространения струи в неподвижной атмосфере сделали Пристли и Болл [128]. Для описания поля скорости и температуры в осесимметричной струе при ряде предположений ими было получено решение системы уравнений движения, неразрывности и энергии. Согласно этому решению на оси струи скорость движения  $v_m$  и температура перегрева  $\theta_m$  выражаются формулами

$$v_m = \left( \frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z^3} \right)^{1/3}, \quad \theta_m = \frac{C_1}{z^2} \left( \frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z^3} \right)^{-1/3}, \quad (5.41)$$

где  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – некоторые постоянные, определяемые из физических свойств струи. Работы Пристли в дальнейшем развивались рядом других авторов.

Мортон [205] для описания динамики струи с учетом ее плавучести использует несколько иные уравнения, чем Пристли. Он основывается на уравнениях сохранения массы, изменения количества дви-

жения и плавучести, т. е. принимает, что

$$\frac{d}{dz} (\pi b^2 v_m) = 2\pi \alpha b v_m, \quad (5.42)$$

$$\frac{d}{dz} (\pi b^2 v_m \Delta \rho) = 2\pi \Delta \rho b v_m,$$

где  $\Delta \rho$  – разность плотностей воздуха в струе и окружающем воздухе;  $\alpha$  – эмпирическая постоянная. При этом полагается так же, как у Пристли, что  $b = Cz$ , где  $C$  – некоторая константа.

Фокс [175], исследуя струю при неустойчивой стратификации и полагая, что изменения основных параметров струи автомодельны, получил, что  $C$  не является постоянной и выражается соотношением

$$C = \alpha_1 + \alpha_2 \text{Fr}^{-2}, \quad (5.43)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – постоянные;  $\text{Fr} = v_0^2/gR_0 \sqrt{\frac{\Delta T}{T_A}}$  – термическое число Фруда.

Ченади [170] из соображений размерности ввел величину  $F_T = gv_0 R_0 \Delta T/T_A$  и на основании обработки опытных данных получил, что  $\Delta H = 250 F_T/W^3$ . М. Е. Берлянд [15], рассмотрев вертикальную подогретую струю, получил следующее выражение для осевой скорости  $v_m$ :

$$v_m^3 = \frac{v_0^3 R_0^3}{C_1^3 z^3} + 3g \frac{Q_T}{2\pi C_1^2 T_A} \left( \frac{1}{z} + \frac{R_0^3}{C_1^3 z^3} \right), \quad (5.44)$$

где  $v_0$  – начальная скорость выброса в устье трубы;  $R_0$  – радиус трубы;  $\Delta T = T_0 - T_w$  – начальный перегрев;  $Q_T = \pi R_0^2 v_0 \Delta T$ ;  $T_A$  – температура воздуха в Кельвинах.

В результате обобщения зависимостей Пристли и Бола им предложена следующая формула для определения начального подъема выброса:

$$\Delta H = 1.5 \frac{v_0 R_0}{W} \left( 2.5 + \frac{3.3gR_0 \Delta T}{T_A W^2} \right), \quad (5.45)$$

или

$$\frac{\Delta H}{R_0} \approx \frac{3.8}{u} + 5 \frac{\text{Ri}_0}{u}, \quad (5.46)$$

где  $u = W/v_0$  – параметр сносящего потока;  $\text{Ri}_0 = gR_0 \Delta T/(T_A v_0^2)$  – начальное число Ричардсона;  $W$  – скорость ветра на характерной высоте.

В работах [162] и [108] для определения  $\Delta H$  из соображений размерностей исследуются две стадии развития струи в зависимости от

расстояния до источника. На первой из них, относящейся к малым  $z$ , полагается, что расширение струи обусловлено, в основном, скоростью ветра и мощностью теплового источника. На второй стадии поведение струи определяется условиями турбулентного обмена в атмосфере. Изменение радиуса струи с высотой описывается соотношением с двумя эмпирическими постоянными, из которого следует, что на бесконечности подъем струи ограничен. Последняя величина принимается за  $\Delta H$ , формула для которой имеет вид

$$\Delta H = 3R_0 \frac{v_0}{W} + 400 \frac{F_T}{W^3}. \quad (5.47)$$

Эта формула получена путем суммирования приведенных формул Раппа и Ченади с несколько измененным значением коэффициента в последней. Следует отметить, что коэффициент 400 в ней, как и коэффициент 250 в формуле Ченади, весьма завышен и не соответствует опытным данным. Бригс приводит формулы для определения высоты подъема факела  $\Delta H$  в случае инверсии температуры, согласно которым при наличии ветра

$$\Delta H = 2.6 \left( \frac{F_T}{W^3} \right)^{1/3}, \quad (5.48)$$

а при штиле

$$\Delta H = 5.1 F_T^{1/4} \left( \frac{g}{T_A} \frac{\partial T}{\partial z} \right)^{-3/8}. \quad (5.49)$$

В литературе имеются и другие подходы для определения величины  $\Delta H$ . В [15] для нейтральных условий предельный подъем струи определяется по формуле

$$\Delta H = 3 \frac{v_0 d_0}{W} \left( 2.5 + 3.3 \frac{g d}{2W^2} \frac{\Delta T}{T_W} \right), \quad (5.50)$$

где  $W$  – скорость ветра на высоте флюгера. В [121] рекомендованы следующие формулы:

для нейтральных условий

$$\Delta H = 3 \frac{v_0 d}{2W} + 400 \frac{F_T}{W^3}; \quad (5.51)$$

для устойчивых при ветреной погоде

$$\Delta H = 1.5 S^{-1/6} \left( \frac{v_0 d}{2\sqrt{W}} \right)^{2/3} + 2.6 \left( \frac{F_T}{WS} \right)^{1/3}; \quad (5.52)$$

Табл. 5.1. Значения эмпирических параметров  $A$  и  $\varepsilon$  для различных категорий устойчивости [91]

Параметр	Категория устойчивости					
	A	B	C	D	E	F
$A$	2.65	2.13	1.6	1.08	0.88	0.68
$\varepsilon$	-0.16	-0.09	0.04	0.11	0.14	0.19

для устойчивых условий при штиле

$$\Delta H = 5.1F_T^{1/3}S^{3/8}, \quad S = \frac{g}{T_A} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (5.53)$$

где  $W$  – скорость ветра на высоте выброса;  $S$  – параметр устойчивости;  $\partial \theta / \partial z$  – градиент потенциальной температуры (разница измеренного и адиабатического градиента температуры) °C/м.

Для различных категорий устойчивости по Паскуиллу можно принять:

$$S = \begin{cases} 8.7 \cdot 10^{-4} & \text{для категории E;} \\ 1.75 \cdot 10^{-3} & \text{для категории F;} \\ 2.45 \cdot 10^{-3} & \text{для категории G.} \end{cases} \quad (5.54)$$

В работе [91] предложено  $\Delta H$  вычислять по следующей эмпирической формуле, применимой для значений тепловой мощности в диапазоне от  $7 \div 7.5 \cdot 10^4$  кВт:

$$\Delta H = A(2.6\sqrt{Q_h/W_h} - 0.029(v_0 d/W_h)), \quad (5.55)$$

где  $A$  – безразмерный параметр, зависящий от категории состояния атмосферы А–F (табл. 5.1);  $Q_h$  – тепловая мощность источника в кВт;  $W_h$  – скорость ветра на высоте  $h$ , м/с;  $v_0$  – начальная скорость выброса газов из трубы;  $d$  – внутренний диаметр трубы. При этом скорость ветра на высоте  $h$  связана со скоростью ветра на высоте флюгера  $W_\phi$  соотношением

$$W_h = W_\phi [(h^\varepsilon - z_0^\varepsilon) / (10^\varepsilon - z_0^\varepsilon)],$$

где  $\varepsilon$  – безразмерный параметр, зависящий от категории устойчивости. Его значения приведены в табл. 5.1.

Хороший анализ состояния вопроса о высоте подъема факела над устьем газоотводящих труб приведен в работе Э. П. Волкова [54]. Им на основе обобщения экспериментов, проведенных в аэродинамической трубе, рекомендуется формула для высоты и для траектории



факела, которые затем проверялись на большом натурном материале для Каширской, Костромской и Запорожской ГРЭС. Всего с помощью различных средств измерения было построено около 500 траекторий факела при удалении от трубы на  $5 \div 6$  км.

К сожалению, требуемой универсальности для соответствующих параметров факела получить не удается. Определение высоты подъема факела по его траектории в первую очередь наталкивается на неопределенность выбора степени горизонтальности факела.

В целом следует отметить, что методы расчета и рекомендуемые формулы для высоты подъема дымового факела при устойчивой безразличной и неустойчивой стратификациях нуждаются в уточнении. Г. А. Бригс (1979) разработал так называемую модель “обрушения”, в которой предполагается, что подъем факела заканчивается, когда внутренняя скорость диссипации турбулентности в факеле  $\varepsilon$  становится равной внешней скорости диссипации

$$1.5w^3/\Delta H = \varepsilon, \quad (5.56)$$

где  $w$  – вертикальная скорость на оси;  $\Delta H$  – подъем факела над источником.

В случае перегретой примеси по Бригсу  $H = H_0 + \Delta H$ , где

$$\Delta H = 1.6 \frac{F^{1/3}}{W}; \quad (5.57)$$

$H_0$  – высота трубы;  $F$  – начальный поток плавучести, определяемый по формуле

$$F = (g/T_0)w_0r_0^2(T_0 - T_W),$$

(здесь  $T_0$  – температура выбросов;  $T_W$  – температура окружающего воздуха на высоте  $H_0$ ;  $w_0$  – вертикальная скорость выбросов;  $r_0$  – радиус устья трубы).

При безразличной стратификации Г. А. Бригс (1975) предположил, что соотношение  $\varepsilon = v_*^3/\alpha z$  применимо для всего пограничного слоя атмосферы. Если при этом воспользоваться определениями

$$dx = udt, \quad w = dz/dt,$$

то можно получить следующие уравнения для эффективной высоты подъема факела:

$$\Delta H = 1.3 \frac{F}{Wv_*^2} \left( 1 + \frac{H_0}{\Delta H} \right)^{2/3}. \quad (5.58)$$

Для аппроксимации решения этого уравнения Бригс предложил формулу

$$\Delta H = 1.54 \left( \frac{F}{Wv_*^2} \right)^{2/3} H_0^{1/3}.$$

В случае конвективных условий Бригс рекомендует использовать следующее соотношение для диссипации:  $\varepsilon = 0.25gTw'\theta'_0$ . Результирующая эффективная высота подъема факела при этом рассчитывается по формуле

$$\Delta H = 3 \left( \frac{F}{W} \right)^{3/5} \left( \frac{g}{T} \frac{w'\theta'}{w'\theta'} \right)^{-2/5}.$$

По мнению исследователей эту формулу нельзя считать вполне надежной, поскольку в конвективных условиях данные наблюдений за подъемом факела мало пригодны для проверки ее применимости.

В работе [156] приводятся следующие рекомендации по оценке начального подъема выброса.

**Для высоких труб**, высота которых в  $2 \div 2.5$  раза выше окружающих сооружений, высота  $\Delta H = H - H_0$  для нейтральных и неустойчивых условий атмосферы может быть определена с использованием следующего выражения:

$$\Delta H = 1.44D_i \left( \frac{w_0}{W} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_i} \right)^{1/3} - C, \quad (5.59)$$

где  $w_0$  – начальная скорость выброса;  $W$  – скорость ветра;  $x$  – расстояние по ветру;  $D_i$  – внутренний диаметр трубы. Величина

$$C = 3 \left( 1.5 - \frac{w_0}{W} \right) D_e$$

является корректирующим фактором понижения для  $w_0 < 1.5W$  (здесь  $D_e$  – внешний диаметр трубы).

В другом случае

$$\Delta H = 3 \frac{w_0}{W} D_e. \quad (5.60)$$

Для расчетов выбирают меньшее из значений, полученных с помощью формул (5.59) и (5.60).

Для устойчивых условий результат расчета по формуле (5.59) сравнивается с

$$\Delta H = 4 \left( \frac{F_m}{S} \right)^{1/4},$$

$$\Delta H = 1.5S^{-1/6} \left( \frac{F_m}{W} \right)^{1/3}$$

и выбирается наименьшее значение из трех. В этих выражениях поток плавучести и параметр устойчивости определяются как

$$F_m = w_0^2 \left( \frac{D^2}{2} \right)^2,$$

$$S = \frac{g}{T_w} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial z} \right).$$

Здесь  $T_w$  – температура окружающего воздуха в Кельвинах;  $\partial \theta / \partial z$  – градиент потенциальной температуры.

**Для коротких труб** с высотой  $H_0 < 2 \div 2.5$  высоты соседних сооружений в первом приближении величину  $\Delta H$  при  $w_0 \geq 5W$  можно определять по формуле (5.59). Если  $w_0/W < 1$  или неизвестно, то следует положить источник наземным. Если  $w_0/W \sim 1 \div 1.5$ , то следует использовать смешанную модель: часть времени – подъем выброса, а остаток времени – с поверхности земли.

Приведенный обзор моделей по оценке начального подъема выбросов свидетельствует об отсутствии их теоретической строгости и универсальности. Это связано прежде всего с использованием концепции фиктивного точечного источника, расположенного на некоторой высоте  $\Delta H$ , из которого, согласно гауссовой модели, начинается диффузионный процесс. Однако в реальных условиях выбросы происходят из объемных источников типа труб в сносящий ветровой поток. Вблизи от источника они рассеиваются по законам струйного смешения и лишь только тогда, когда скорость в струе сравнивается со скоростью ветрового потока, начинает доминировать атмосферная диффузия. Этот процесс рассеивания выброса непрерывен и, строго говоря, в модели Гаусса он моделируется некорректно.

Ниже, в следующей главе будет представлена так называемая струйно-диффузионная модель рассеивания примеси в атмосфере, согласно которой расчет диффузии примеси в атмосфере ведется не из точечного источника, расположенного на фиктивной высоте  $\Delta H$ , а из физического источника типа трубы с конечной начальной скоростью выброса и начальным перегревом.

## 5.5. Классификация категорий устойчивости атмосферы

При современном уровне развития теории атмосферной диффузии практически расчеты рассеивания примеси выполняются с учетом эффектов температурной стратификации атмосферы. Такой учет исторически основывался на понятиях категорий устойчивости

Табл. 5.2. Категории устойчивости атмосферы по Паскуиллу [145]

Скорость ветра на высоте 10 м, м/с	Днем инсоляция			В ночное время облачность	
	интенсивная	умеренная	слабая	сплошная $\geq 4/8$ облачного покрова	$\leq 3/8$ облачного покрова
$W < 2$	A	A-B	B	—	—
$2 \leq W < 3$	A-B	B	C	E	F
$3 \leq W < 5$	B	B-C	C	D	E
$5 \leq W < 6$	C	C-D	D	D	D
$6 \leq W$	C	D	D	D	D

атмосферы. Классы устойчивости устанавливаются в зависимости от градиента температуры, скорости ветра, облачности и инсоляции. В настоящее время предложено несколько систем классификации метеорологических условий. Широко известны системы Паскуилла [209], Паскуилла – Гиффорда [181], Тернера [227], Улига [228], Смита [217], Лэна и Черча [200], Ключа [194] и др. При их применении следует помнить, что всякая классификация носит условный характер, поэтому системы классификации и рекомендуемые формулы различных авторов не всегда совместимы.

Наиболее широкое распространение в прикладных расчетах получила схема классификации погодных условий (стратификации атмосферы) Паскуилла [209], согласно которой используется шесть категорий устойчивости, распределенных по возрастанию степени устойчивости атмосферы от А до F: А – предельно неустойчивая, В – умеренно неустойчивая, С – слегка неустойчивая, D – нейтральная, E – слегка устойчивая, F – умеренно устойчивая. Позднее для сильно устойчивой атмосферы была добавлена категория G. Другие системы классификации погодных условий не всегда соответствуют категориям устойчивости Паскуилла, однако обычно они могут быть связаны с ними. К настоящему времени широко известны следующие способы классификации категорий устойчивости атмосферы.

**1. Способ Паскуилла – Гиффорда.** Он основан на измерении скорости ветра на высоте 10 м и качественной оценке инсоляции в дневное время и облачности в ночной период (ночь – время за час до захода солнца и час после восхода). Определение категорий устойчивости производят согласно табл. 5.2.

Табл. 5.3. Соотношение между категориями устойчивости по Паскуиллу и средним вертикальным градиентом температуры в слое воздуха 10 ÷ 60 м [70]

Категория устойчивости	Градиент температуры, °C на 100 м
A	-1.9
B	от -1.9 до -1.7
C	от -1.7 до -1.5
D	от -1.5 до -0.5
E	от -0.5 до 1.5
F	> 1.5

Табл. 5.4. Категория устойчивости по вертикальному градиенту температуры  $\theta = \Delta T / \Delta z$  и скорости ветра  $W$  по измерениям на высоте 20 ÷ 120 м [145]

Скорость ветра, м/с	$\theta \leq -1.5$	$-1.4 < \theta < -1.2$	$-1.1 < \theta < -0.9$	$-0.8 < \theta < 0$	$0.1 < \theta < 2$	$\theta > 2$
$W < 1$	A	A	B	C	F	F
$1 \leq W < 2$	A	B	B	D	F	F
$2 \leq W < 3$	A	B	C	D	E	F
$3 \leq W < 5$	B	B	C	D	D	E
$5 \leq W < 7$	C	C	D	D	D	E
$7 \leq W$	D	D	D	D	D	D

При определениях  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  для категорий А–В и т. д. следует использовать среднее значение для А и В.

**2. Учет вертикального градиента температур.** Здесь предполагается учет среднего вертикального градиента температуры между двумя уровнями в окружающей атмосфере. Способ основан на измерении среднего градиента температуры в слое воздуха 10 ÷ 60 м над уровнем земли [181]. Соотношение между категориями устойчивости по Паскуиллу и средним вертикальным градиентом температуры приведено в табл. 5.3.

При высоких выбросах более точен высотный способ, основанный на учете вертикального градиента температуры и скорости ветра (на высоте 20 и 120 м) (см. табл. 5.4). Наряду с высотными используется “приземный” способ [70], применяемый при выбросах

Табл. 5.5. Связь между категориями устойчивости по Паскуиллу и параметром  $B_2$  [108]

Категория устойчивости	параметр $B_2$ , $^{\circ}\text{C}/(\text{м/с})^2$
A	$< -0.03$
B	от $-0.03$ до $-0.005$
C	от $-0.005$ до $-0.001$
D	от $-0.001$ до $0.001$
E	от $0.001$ до $0.01$
F	от $0.01$ до $0.05$
G	$> 0.05$

на высоте до 20 м. В этом случае измеряется разность температур  $\Delta T$  на уровнях 4 и 1 м и скорость ветра  $W$  на уровне 2 м. При этом определяется параметр

$$B_2 = 0.07 \Delta T / W.$$

Соответствие категорий устойчивости и параметра  $B_2$  приведено в табл. 5.5.

**3. Измерение баланса приходящей и уходящей солнечной радиации.** В этом случае предполагается непосредственное измерение или радиационного баланса, или потока приходящей солнечной радиации (с измерением облачности). Соответствие результатов актинометрических измерений, облачности и скорости ветра на высоте 10 м над уровнем земли и категориями устойчивости приведено в табл. 5.6. В табл. 5.7 приведены данные, связывающие приходящую солнечную радиацию и степень облачности с категориями устойчивости.

**4. Учет стандартных данных сетевых метеостанций.**

Этот метод, по-видимому, в наибольшей степени применим для практических расчетов, так как не требует организации каких-либо специальных измерений. Согласно этому методу определяют скорость ветра на высоте 10 м. Днем определяют величину приходящей солнечной радиации, ночью – общую облачность в баллах, а затем по табл. 5.6 и 5.7 определяют категорию устойчивости. Если на ближайшей метеостанции измерений не производят, то величину приходящей солнечной радиации  $A$  ( $\text{мВт}/\text{см}^2$ ) вычисляют по соотношению

$$A = a A_0,$$

Табл. 5.6. Классификация категорий устойчивости по приходящей солнечной радиации  $R_d$  и полному радиационному балансу в ночное время  $R_n$ , ланглей/ч [145]

Скорость ветра $W$ на 10 м, м/с	Категории устойчивости					
	В дневной период			В ночной период		
	при $R_d \geq 50$	при $50 > R_d \geq 12.5$	при $12.5 > R_d$	при $R_n > -1.8$	при $-1.8 \geq R_n > -3.6$	при $-3.6 \geq R_n$
$W < 2$	A	B	D	D	—	—
$2 \leq W < 3$	A-B	B	D	D	E	F
$3 \leq W < 4$	B	C	D	D	D	E
$4 \leq W < 6$	C	C	D	D	D	D
$6 \leq W$	C	D	D	D	D	D

Табл. 5.7. Модифицированная таблица классификации категорий устойчивости по приходящей солнечной радиации  $R_d$  и степени облачности, ланглей/ч [145]

Скорость ветра $W$ на 10 м, м/с	Категории устойчивости					
	В дневной период			В ночной период		
	при $R_d \geq 50$	при $50 > R_d \geq 12.5$	при $12.5 > R_d$	Днем и ночью при нижней облачн. от 0.8 до 1.0	Ночью при верх. облачн. от 0.5 до 1.0 нижней от 0.5 до 0.7	Ночью при облачн. от 0 до 0.4
$W < 2$	A	B	D	D	—	—
$2 \leq W < 3$	A-B	B	D	D	E	F
$3 \leq W < 4$	B	C	D	D	D	E
$4 \leq W < 6$	C	C	D	D	D	D
$6 \leq W$	C	D	D	D	D	D

где  $a$  – фактор ослабления коротковолновой солнечной радиации облачностью

$$a = 1 - 0.175N - 0.0341N^2 - 0.00245N^3,$$

$N$  – общая облачность по десятибалльной системе;  $A_0$  – солнечная радиация при безоблачном небе, мВт/см<sup>2</sup>. Ее значения приведены в

Табл. 5.8. Зависимость суммарной радиации при безоблачном небе  $A_0$  от высоты солнца над горизонтом, мВт/см<sup>2</sup> [87]

Периоды	Высота солнца, угл. град.								
	0	5	10	15	20	25	30	35	40
холодн. период (есть снег)	2.02	7.38	15.7	25.5	35.1	44.8	56.6	64.7	74.4
теплый период (нет снега)	1.01	5.56	12.9	21.2	29.6	38.1	46.8	55.0	63.2

табл. 5.8 для разной высоты солнца  $h_0$  и времени года [87]. Высоту солнца в зависимости от времени суток, сезона и широты можно определить по соответствующим номограммам.

В последние годы за рубежом для определения классов устойчивости по данным ежечасных стандартных метеорологических наблюдений о значениях перечисленных выше параметров на сети метеостанций используется подпрограмма STAR для ЭВМ. Согласно требованиям Комиссии по атомной энергии США в качестве характеристик устойчивости следует применять измеренный на метеорологической мачте вертикальный градиент температуры. Наличие различных рекомендаций в этом вопросе послужило толчком к разработке в 1977 г. субсидированного Американским метеорологическим обществом рабочего руководства по схемам классификации устойчивости [182]. Его авторы рекомендуют использовать в качестве характеристик устойчивости более репрезентативные параметры пограничного слоя атмосферы, такие как число Ричардсона  $Ri$  и безразмерные параметры  $h/L$  или же  $fL/v_*$ , где  $L$  – масштаб Монина – Обухова. Бригс и Макдональд [163] заново проанализировали значения  $\sigma_z$ , полученные ранее, и нашли, что во всех случаях  $\sigma_z$  наиболее тесно связаны с масштабом Монина – Обухова  $L$ .

В работе [214] выполнено сопоставление нескольких схем классификации режима турбулентности и обнаружено множество расхождений в получаемых результатах. Авторы нашли, что на практике затруднительно использовать даже такой параметр, как число Ричардсона, так как оно зависит от вертикальной координаты. Поэтому, разработанная Агентством по охране окружающей среды США подпрограмма STAR нашла широкое практическое применение,



поскольку входным информационным массивом для нее являются такие легко измеряемые параметры, как скорость ветра и облачность.

Следует отметить, что пока использованы не все возможности для анализа и обобщения уже полученных экспериментальных данных по определению параметров устойчивости. Так А. Венкатрам [229] проанализировал данные, полученные в экспериментах в Прери-Грасс, Канзасе и Миннесоте, и обнаружил, что при устойчивой стратификации существует простая связь между обуховским масштабом длины  $L$  и динамической скоростью:

$$L = Av_*^2,$$

где  $A = 1.1 \cdot 10^3 \text{ с}^2 \cdot \text{м}^{-1}$ . Таким образом, приближенно значение  $L$  можно определить и без организации дорогостоящих измерений потока тепла с ограничивающей поверхностью.

## 5.6. Определение параметров дисперсий примеси $\sigma_y$ и $\sigma_z$

При выполнении практических расчетов, когда географическое расположение источника выбросов определено, для данной площадки и данного климатического региона выбирается подходящая модель атмосферной диффузии и определяются классы устойчивости атмосферы за расчетный период. Если, например, выбрана гауссова модель, то прежде, чем применить ее для расчета приземных концентраций, необходимо определить значения таких диффузионных параметров, как дисперсии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  в зависимости от расстояния до источника вниз по потоку и от состояния устойчивости атмосферы. Существует несколько способов оценки их значений, однако универсального метода пока не существует. Следует заметить, что обычно способ определения  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  зависит от целей проводимого расчета. В некоторых случаях оказывается обязательной информация о турбулентной структуре ветрового потока, включая энергетический спектр. Если же эти характеристики отсутствуют, то дисперсии определяют по тем или другим эмпирическим формулам, полученным путем сопоставления результатов измерения концентраций примеси в воздухе от реальных источников с результатами расчетов по формулам гауссовой модели рассеивания с использованием той или иной системы классификации погодных условий. При этом естественно, что для различных регионов и условий выбросов получаются разные результаты, так как универсальность отсутствует.

В связи с вышеизложенным различными исследователями предложено множество способов определения дисперсий  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и схем клас-

сификации устойчивости атмосферы. Однако большинство специалистов в области физики пограничного слоя атмосферы при проведении практических расчетов придерживаются рекомендаций Паскуилла – Гиффорда [145, 181].

Первоначально сигма-кривые Паскуилла – Гиффорда были представлены графически, что полностью соответствовало духу того времени, когда основным носителем информации были нанесенные на бумагу графики. Сегодня же расчеты полей концентрации даже по гауссовой модели целесообразно выполнять с помощью современных вычислительных средств, поэтому для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  предпочтительно иметь аналитические формулы с целью удобства их программирования. Г. А. Бригс [9] объединил кривые Паскуилла – Гиффорда, администрации долины р. Теннесси и брукхейвенские кривые, использовал теоретические асимптотики для  $\sigma$  и получил совокупность формул, приведенных в [9]. Формулы даны отдельно для условий городской застройки и сельской местности. Они применимы для расстояний от источника менее 10 км, времен отбора проб примерно 20 мин. и значений параметра шероховатости примерно 3 см в сельской местности и 1 м в городе.

В кругу специалистов и особенно в США сигма-кривые являются предметом непрерывной дискуссии, поскольку они играют важную роль при проведении предусмотренных законодательством расчетов. Имеется множество примеров ошибочного использования этих кривых вне диапазона их применимости по расстояниям от источника, времени отбора проб и т. п. Упомянувшиеся формулы Бригса на расстояниях от источника, больших 10 км, дают  $\sigma_y \sim x^{1/2}$ , что явно не согласуется с значениями, полученными экспериментально для больших  $x$ . Поэтому для больших  $x$  иногда пользуются другими формулами, например, предложенными Гиффордом [179], которые лучше описывают поведение  $\sigma_y$ . В условиях сложного рельефа эти формулы также приводят к расхождению с данными наблюдений. Подробно влияние сложного рельефа будет обсуждаться ниже в главе 9.

Другие формулы для дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , заслуживающие внимания в данном кратком рассмотрении, предложены Ирвиним [189], который на основании таблиц Паскуилла для  $\sigma_y$  получил следующую аналитическую аппроксимацию:

$$\sigma_y = \sigma_{\theta} x S_y \begin{cases} S_y = (1 + 0.031x^{0.46})^{-1} & \text{при } x < 10^4 \text{ м,} \\ S_y = 33x^{-1/2} & \text{при } x \geq 10^4 \text{ м.} \end{cases} \quad (5.61)$$

В работе [173] на основе формул Г. Пановского предложены сле-

Табл. 5.9. Значение верхней границы  $\sigma_z^{\max}$  для различных категорий устойчивости, м [230]

Параметр	Категория устойчивости					
	А	В	С	Д	Е	Ф
$\sigma_z^{\max}$ , м	1600	920	640	400	220	100

дующие соотношения для горизонтальной и вертикальной дисперсий:

$$\sigma_y = \sigma_\varphi f_y(t/\tau_L) = \sigma_v t f_y(t/\tau_L),$$

$$\sigma_z = \sigma_\psi f_z(t/\tau_L) = \sigma_w t f_z(t/\tau_L),$$

где  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_\psi$  – стандартные отклонения направления ветра по горизонтали и вертикали соответственно (в радианах);  $f_y$  и  $f_z$  – эмпирические функции. В работах [210] и [198] предложен вид этих функций. Они носят сложный характер и не являются универсальными.

Применительно к расчету распространения радиоактивных выбросов на АЭС чаще всего используются эмпирические соотношения Смита–Хоскера [70], согласно которым поперечную  $\sigma_y$  и вертикальную  $\sigma_z$  дисперсии при непрерывных кратковременных выбросах рассчитывают по следующим эмпирическим формулам:

$$\sigma_y(x) = C_3 x / \sqrt{1 + 0.0001x}; \quad (5.62)$$

$$\sigma_z(x) = \begin{cases} f(z_0, x)g(x) & \text{при } f(z_0, x)g(x) \leq \sigma_y^{\max}, \\ \sigma_z^{\max} & \text{при } f(z_0, x)g(x) > \sigma_y^{\max}, \end{cases} \quad (5.63)$$

где  $\sigma_z^{\max}$  – предельное значение  $\sigma_z$  для данной категории устойчивости;  $z_0$  – параметр шероховатости. Функции  $f(z_0, x)$  и  $g(x)$  рассчитывают по формулам

$$f(z_0, x) = \begin{cases} \ln [C_1 x^{d_1} (1 + C_2 x^{d_2})] & \text{при } z_0 > 10 \text{ см}, \\ \ln [C_1 x^{d_1} / (1 + C_2 x^{d_2})] & \text{при } z_0 \leq 10 \text{ см}, \end{cases} \quad (5.64)$$

$$g(x) = a_1 x^{b_1} / (1 + a_2 x^{b_2}). \quad (5.65)$$

Значения  $z_0$  приведены в табл. 4.2,  $\sigma_{\max}$  – в табл. 5.9. Остальные значения коэффициентов и параметров, входящих в вышеприведенные соотношения, даны в табл. 5.10 и 5.11. Однако все эти зависимости учитывают лишь ряд особенностей процесса рассеивания примеси в приземном слое атмосферы и не являются универсальными.

Табл. 5.10. Коэффициенты, используемые при расчете вертикальной  $\sigma_z$  и горизонтальной  $\sigma_y$  дисперсий [70]

Категория устойчивости по Паскуиллу	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$c_3$
A	0.112	1.06	$5.38 \cdot 10^{-4}$	0.815	0.22
B	0.13	0.95	$6.52 \cdot 10^{-4}$	0.75	0.16
C	0.112	0.92	$9.05 \cdot 10^{-4}$	0.718	0.11
D	0.098	0.889	$1.35 \cdot 10^{-3}$	0.688	0.08
E	0.0609	0.895	$1.96 \cdot 10^{-3}$	0.684	0.06
F	0.0638	0.783	$1.36 \cdot 10^{-3}$	0.672	0.04

Табл. 5.11. Коэффициенты функции  $f(z_0, x)$ , модифицирующие значения  $\sigma_z$  при различной шероховатости  $z_0$  [70]

Высота шероховатости $z_0, \text{см}$	$c_1$	$d_1$	$c_2$	$d_2$
1	1.56	0.0480	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0.45
4	2.02	0.0269	$7.76 \cdot 10^{-4}$	0.37
10	2.73	0	0	0
40	5.16	-0.00957	$5.38 \cdot 10^{-2}$	0.225
100	7.37	-0.098	$2.33 \cdot 10^{-4}$	0.60
400	11.7	-0.128	$2.18 \cdot 10^{-5}$	0.78

Так, в дневное время при конвективных условиях значения дисперсий зависят от конвективного масштаба скорости  $w_*$  и высоты слоя перемешивания  $H_z$ . Многие специалисты, пользовавшиеся сигма-кривыми, возражали против быстрого роста по  $x$  кривой  $\sigma_z$  для класса устойчивости А, первоначально рекомендованной Паскуиллом и Гиффордом. Эта кривая получена по данным лишь нескольких измерений в довольно ограниченном диапазоне расстояний от источника. Ее нельзя экстраполировать в точки, удаленные от источника более чем на 1 км. Пересмотренная Бригсом кривая  $\sigma_z$  для класса А более реалистична.

В недавних исследованиях по диффузии в пограничном слое атмосферы несколько авторов независимо получили следующую простую формулу для оценки дисперсий [9]:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0.6 w_* \frac{x}{W}. \quad (5.66)$$

Табл. 5.12. Значения коэффициентов  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $b_y$ ,  $b_z$  и показателя степени  $m$  для различных классов устойчивости [165]

	$a_y$	$a_z$	$b_y$	$b_z$	$m$
A	0.235	0.796	0.311	0.711	0.53
B	0.297	0.796	0.382	0.711	0.40
C	0.418	0.796	0.520	0.711	0.33
D	0.586	0.796	0.700	0.711	0.23
E	0.826	0.796	0.950	0.711	0.16
F	0.946	0.796	0.321	0.711	0.10
G	1.043	0.698	0.819	0.669	0.33

В работе Н. Г. Гусева и В. А. Беяева [70] рекомендуются аналитические формулы вида (5.62) – (5.65).

В рекомендациях МАГАТЭ [156, 157] при выполнении практических расчетов для дисперсий используются следующие степенные формулы:

$$\sigma_y = a_y x^{b_y}, \quad \sigma_z = a_z x^{b_z},$$

где  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $b_y$ ,  $b_z$  – эмпирические коэффициенты, зависящие от класса устойчивости атмосферы и, согласно работе [165], определяемые по табл. 5.12. В этой схеме скорость ветра на высоте  $H$  определяется степенной формулой  $\overline{W}(H) = W(z_1)(H/z_1)^m$ , где  $z_1$  – фиксированная высота;  $m$  – показатель степени, зависящий от класса устойчивости и приведенный в табл. 5.12.

В последние годы многие исследователи определяют дисперсии примеси  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  через среднеквадратичные значения флуктуаций скорости ветра  $\sigma_v$ ,  $\sigma_w$  и Лагранжев временной масштаб  $T_L$  с помощью следующих соотношений:

$$\sigma_y^2 = 2\sigma_v^2 T_{Ly}^2 (t/T_{Ly} - \exp(-t/T_{Ly}) + 1),$$

$$\sigma_z^2 = 2\sigma_w^2 T_{Lz}^2 (t/T_{Lz} - \exp(-t/T_{Lz}) + 1).$$

Имеются и другие формулы расчета дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  для разных условий рассеивания и времени осреднения. Одни из них справедливы для ровной степной местности, а другие обобщаются на случай сложной орографии и учета ряда других факторов. Более подробно различные модели для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  и условия их применимости обсуждаются в работе [145].

Приведенный обзор и выполненный анализ этих и других источников показывает, что существующий разброс экспериментальных

данных по этому вопросу настолько велик, не говоря уже о его качественной разнородности, что очень затруднительно отдать научно-обоснованное предпочтение какой-либо из приведенных аппроксимаций. Наш подход к этому вопросу будет изложен ниже при описании струйно-диффузионной модели.

### 5.7. Аналитические методы решения уравнения турбулентной диффузии с переменными коэффициентами

Рассмотрим исходное уравнение турбулентной диффузии в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + Q, \end{aligned} \quad (5.67)$$

где  $Q$  – член, описывающий внутренние источники примеси. Теории атмосферной диффузии, базирующиеся на аналитических и численных решениях этого уравнения при различных допущениях относительно коэффициентов диффузии  $k_i$ , часто в литературе называют  $k$ -теориями [70, 108].

Если задать соответствующие начальные и граничные условия, а также поле скорости  $v_i$  и коэффициенты диффузии  $k_i$ , то на основе этого уравнения можно, в принципе, предсказать, как будет изменяться концентрация  $C(x, y, z, t)$  в пространстве и во времени.

Однако практически задать эти величины как функции координат и времени и при этих значениях решить уравнение турбулентной диффузии оказывается довольно сложно. Вследствие этого аналитические решения уравнения турбулентной диффузии возможны лишь при значительных упрощениях реальных условий рассеивания примеси в атмосфере. Наиболее простой случай установившейся диффузии, для которого найдено аналитическое решение, получается для безграничной среды при постоянной скорости ветра ( $u = W$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ ) и изотропной турбулентности ( $k_x = k_y = k_z = k = \text{const}$ ). Для этого случая решение уравнения турбулентной диффузии подробно рассматривалось в главе 3, и для точечного источника получено следующее выражение для концентрации:

$$C = \frac{M}{4\pi kx} \exp \left( -\frac{W}{4k} \frac{(y^2 + z^2)}{x} \right), \quad (5.68)$$

где  $M$  – мощность источника выбросов. Если же область распространения примеси полуограниченная и источник выбросов расположен

на некоторой высоте  $H$ , то формула для расчета поля концентрации в рассматриваемом случае принимает вид

$$C = \frac{M}{4\pi kx} \exp \left[ -\frac{W(y^2 + (z - H)^2)}{4kx} \right]. \quad (5.69)$$

Решение, удовлетворяющее краевому условию отражения примеси от ограничивающей поверхности  $k\partial C/\partial z|_{z=0} = 0$  для точечного приподнятого источника, как показано выше, имеет вид

$$C = \frac{M}{4\pi kx} \exp \left( -\frac{Wy^2}{4kx} \right) \times \\ \times \left\{ \exp \left[ -\frac{W(z - H)^2}{4kx} \right] + \exp \left[ -\frac{W(z + H)^2}{4kx} \right] \right\}. \quad (5.70)$$

В практических задачах особый интерес представляет распределение концентрации примеси на уровне Земли ( $z = 0$ ), которое из формулы (5.70) определяется выражением

$$C = \frac{M}{2\pi kx} \exp \left[ -\frac{W(y^2 + H^2)}{4kx} \right]. \quad (5.71)$$

Во многих случаях наибольший интерес представляют максимальные концентрации. Из выражения (5.71) видно, что максимальные приземные концентрации находятся на оси факела, т. е. при  $y = 0$  и, следовательно,

$$C_{\max} = \frac{M}{2\pi kx} \exp \left( -\frac{WH^2}{4kx} \right). \quad (5.72)$$

Тогда продольная координата точки максимума концентрации на земной поверхности  $x_m$  находится из условия  $\partial C_{\max}/\partial x = 0$ . Выполнив соответствующее дифференцирование, получим

$$x_m = \frac{WH^2}{4k}. \quad (5.73)$$

Если коэффициент турбулентной диффузии  $k$  выразить через турбулентную вязкость  $\nu_t$ , а ее принять по Прандтлю, то для  $k$  имеем следующую оценку:

$$k = \frac{\nu_t}{Sc_t} = \frac{\alpha_1 HW}{Sc_t}. \quad (5.74)$$

Подставляя выражение (5.74) в (5.73), для координаты  $x_m$  находим

$$x_m = \frac{Sc_t}{4\alpha_1} H, \quad (5.75)$$

где  $Sc_t$  – турбулентное число Шмидта, примерно равное  $0.7 \div 0.75$ ;  $\alpha_1$  – эмпирическая постоянная, равная  $\alpha_1 = 0.0076$ . Следовательно,  $k \approx 0.01HW$ ,  $x_m \approx 25H$  и, соответственно,

$$C_m \approx \frac{0.235M}{WH^2}. \quad (5.76)$$

Таким образом, в данном простейшем случае при заданных  $M$ ,  $W$  и  $H$  аналитически определяются максимальное значение концентраций  $C_m$ , ее удаление от источника  $x_m$  и характер распределения концентрации примеси у поверхности земли  $C(x, y)$ . Однако расчеты полей концентрации по этим формулам показывают, что хотя в целом при соответствующем выборе констант они правдоподобно описывают поле средних концентраций от точечных источников, приподнятых на высоту  $H$ , но количественные результаты плохо согласуются с экспериментальными данными, полученными при полевых наблюдениях диффузии в приземном пограничном слое атмосферы.

Одна из причин этого расхождения, которую отмечают многие авторы, состоит в том, что в реальной атмосфере скорость ветрового потока и коэффициенты диффузии не постоянны, как предполагалось выше, а являются функциями координат и времени. Кроме того, процесс рассеивания диффузии тесно связан с климатическими и метеорологическими условиями. Вторая, более существенная причина, по нашему мнению, связана с влиянием на процесс рассеивания нестационарных крупномасштабных когерентных структур и флуктуаций величины и направления скорости ветра, которые, вообще говоря, коэффициенты диффузии не учитывают. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться позднее при рассмотрении струйно-диффузионной модели, а сейчас обратимся к рассмотрению частных аналитических решений уравнения турбулентной диффузии с переменными коэффициентами.

Попытки обобщить модель диффузии на случай, когда  $W = W(z)$  и  $k_z = k_z(z)$ , предпринимались многими исследователями, причем, поскольку решение уравнения диффузии с переменными коэффициентами наталкивается на значительные математические трудности, то эти попытки породили довольно обширную литературу. Основные результаты, полученные в этой области, нашли отражение в монографиях А. С. Моница и А. М. Яглома [115], Д. Л. Лайхмана [97], М. Е. Берлянда [15], Н. Л. Бызовой [40], Н. Л. Бызовой, Е. К. Гаргера и В. Н. Иванова [41], Р. В. Озмидова [122], С. С. Зилитинкевича [81] и др.

Зависимость коэффициентов диффузии и скорости ветра от координат и времени в гауссовой модели игнорировалась. В рамках



$k$ -теорией эту зависимость можно учесть, однако при этом сразу возникают принципиальные трудности получения аналитического решения. Поэтому при решении часто вводится ряд допущений. Обычно предполагают стационарность процесса диффузии во времени и пренебрегают диффузией в направлении ветра по сравнению с конвективным переносом ( $k_x = 0$ ).

В литературе чаще всего рассматривается случай стационарного и однородного турбулентного движения, направленного вдоль оси  $x$ , имеющего среднюю скорость  $u = W$ . Робертс [213], по-видимому, был первым, кто получил решение уравнения диффузии для линейного источника мощностью  $\overline{M}$  при  $W$  и  $k_z$ , изменяющихся с высотой по степенному закону

$$W = W_1(z/z_1)^m, \quad k_z = k_{z1}(z/z_1)^n. \quad (5.77)$$

М. Е. Берлянд [15] подробно и всесторонне исследовал проблему атмосферной диффузии. В частности, он получил решение уравнения турбулентной диффузии для модели Швеца – Юдина, когда

$$\begin{aligned} W &= W_1 \frac{\lg z/z_0}{\lg z_1/z_0}, \\ k_y &= k_0 W, \\ k_z &= k_1(z/z_1) \quad \text{при } z \leq h, \\ k_z &= k_1(h/z) \quad \text{при } z > h. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Рассмотрим подробнее случай распределения концентрации  $C(x, z)$  от стационарного линейного источника, расположенного на высоте  $H$  вдоль оси  $y$ , перпендикулярно направлению ветрового потока, который совпадает с осью  $x$ , и производящего  $\overline{M}$  единиц массы примеси за единицу времени на единицу длины.

В рассматриваемом стационарном двухмерном случае в общем уравнении диффузии можно опустить члены, содержащие операторы  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial y$ . Кроме того, можно пренебречь слагаемым, описывающим продольную диффузию  $k_x \partial^2 C/\partial x^2$  по сравнению с конвективным переносом  $W \partial C/\partial x$ , и тогда задача о диффузии примеси сводится к решению следующего уравнения:

$$W(z) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_z(z) \frac{\partial C}{\partial z} \right]. \quad (5.79)$$

Начально-краевые условия для непрерывного линейного источника мощностью  $\overline{M}$  (г/с·м) обсуждались ранее и принимаются в виде:

$$C \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (5.80)$$

$$k_z \frac{\partial C}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow 0, x > 0, \quad (5.81)$$

$$C(0, z) = \frac{\overline{M}}{W(H)} \delta(z - H) \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (5.82)$$

Если скорость ветра  $W(z) = W_1(z/z_1)^m$  и коэффициент диффузии  $k_z(z) = k_1(z/z_1)^n$  (здесь  $W_1$  и  $k_1$  – значения скорости и коэффициента диффузии на фиксированной высоте  $z_1 = 1$  м;  $m$  и  $n$  – постоянные), то сформулированная начально-краевая задача имеет следующее аналитическое решение [15, 97, 115]:

$$C(x, z) = \frac{\overline{M}(Hz)^{\frac{1-n}{2}}}{(m-n+2)k_1x} \times \quad (5.83)$$

$$\times \exp \left[ -\frac{W_1(z^{m-n+2} + H^{m-n+2})}{(m-n+2)^2 k_1 x} \right] K_p \left[ \frac{2W_1(Hz)^{\frac{m-n+2}{2}}}{(m-n+2)^2 k_1 x} \right],$$

где  $K_p$  – функция Бесселя мнимого аргумента индекса  $p = -(1-n)/(m-n+2)$ .

Рассмотрим еще один простейший случай вертикальной нестационарной диффузии примеси в неподвижной среде от плоского источника с коэффициентом диффузии, зависящим от вертикальной координаты  $z$ . Концентрация примеси в этом случае описывается уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_z(z) \frac{\partial C}{\partial z} \right]. \quad (5.84)$$

Соответствующие краевые условия в случае мгновенного плоского источника, выбросившего  $\overline{Q}$  грамм (Кюри) вещества с единицы площади, расположенного на высоте  $H$  от земли в момент  $t = t_0$ , при условии “отражения” примеси от поверхности земли имеют вид

$$C(0, z) = \overline{Q} \delta(z - H), \quad k_z \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad C(z, t) \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.85)$$

Решение уравнения диффузии (5.84) при различных формах задания вида функции  $k_z = k_z(z)$  рассматривались Д. Л. Лайхтманом, А. С. Мониным и многими другими авторами.

Для случая линейной функции, когда  $k_z = k_1 z$ , решение задачи (5.84) – (5.85) имеет вид [15, 115]

$$C(z, t) = \frac{\overline{Q}}{k_1(t-t_0)} \exp \left( -\frac{z+H}{k_1(t-t_0)} \right) I_0 \left[ \frac{2\sqrt{Hz}}{k_1(t-t_0)} \right], \quad (5.86)$$

где  $I_0$  – символ функции Бесселя от мнимого аргумента.

В случае наземного источника ( $H = 0$ ) формула (5.86) для концентрации заметно упрощается и принимает вид

$$C(z, t) = \frac{\overline{Q}}{k_1(t - t_0)} \exp \left[ -\frac{z}{k_1(t - t_0)} \right]. \quad (5.87)$$

Обобщение этой задачи на случай, когда приземный слой атмосферы характеризуется инверсией, рассматривалось в работе Ф. Т. Ньюстадта [206]. Постановка задачи при этом следующая. Предполагается, что в момент  $t = 0$  действует мгновенный площадный источник мощностью  $\overline{Q}$ , а приземный слой атмосферы характеризуется инверсией. Если через  $h(t)$  обозначить высоту приземного слоя и предположить, что градиент плотности в инверсионном слое таков, что турбулентный поток вещества через него равен нулю, то задача сводится к решению одномерного нестационарного уравнения диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (5.88)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} k_z \frac{\partial C}{\partial z} &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = h, \\ C(0, z) &= \overline{Q} \delta(z - H) \quad \text{при} \quad t = 0, \end{aligned} \quad (5.89)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака;  $H$  – высота источника над землей ( $H < h$ ). Коэффициент турбулентной диффузии определялся по формуле

$$k_z(z) = C_1 U z (1 - z/h), \quad (5.90)$$

где  $U$  – масштаб скорости;  $C_1$  – эмпирическая константа. В случае нейтрального пограничного слоя атмосферы этот масштаб скорости  $U$  принят равным динамической скорости  $U = v_*$ . Многие исследователи считают, что профиль (5.90) дает реалистическое описание  $k(z)$  в приземном слое атмосферы.

Большой практический интерес представляет случай, когда  $h$  и  $U$  являются функциями времени:

$$U = U(t), \quad \frac{dh}{dt} = \alpha C U(t). \quad (5.91)$$

Ограничимся случаем, когда  $h(t)$  – неубывающая функция, т. е.  $\alpha \geq 0$ .

Введем в рассмотрение безразмерную координату и время

$$\zeta = \frac{z}{h(t)}, \quad \tau = \int_{t_0}^t \frac{CU(t')}{h(t')} dt'. \quad (5.92)$$

Из выражений (5.91) и (5.92) следует, что

$$h = h_0 \exp(\alpha\tau), \quad (5.93)$$

где  $h_0 = h(t_0)$ .

В новых переменных  $\zeta$  и  $\tau$  уравнение (5.88) преобразуется к виду

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \alpha\zeta \frac{\partial C}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \zeta(1-\zeta) \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right]. \quad (5.94)$$

Дифференциальный оператор в правой части уравнения (5.94) в литературе известен и приводит к рассмотрению таких специальных функций, как полиномы Якоби. Разложение в ряды этих функций позволяет получить следующее решение интересующей нас задачи:

$$C(t, z) = \overline{\overline{Q}}G(H, t_0; z, h), \quad (5.95)$$

где

$$G(H, t_0; z, t) = \frac{(1-\zeta)^\alpha}{h_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + \alpha + 1) P_n^{(\alpha, 0)}(2\zeta_H - 1) \times \\ \times P_n^{(\alpha, 0)}(2\zeta - 1) \exp\{-(n+1)(n+\alpha)(\tau - \tau_0)\}, \quad (5.96)$$

при этом  $\tau_0 = \tau(t_0)$ ,  $\zeta_H = H/h_0$ . Заметим, что, согласно (5.92)  $\tau(t_0) = 0$ , однако оно здесь сохранено в записи для общности.

Полиномы Якоби хорошо изучены и имеют ряд важных свойств. Одно из них связано со следующим рекуррентным соотношением:

$$2(n+1)(n+\alpha+1)(2n+\alpha)P_{n+1}^{(\alpha, 0)}(x) = \\ = (2n+\alpha+1)\{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)x + \alpha^2\}P_n^{(\alpha, 0)}(x) - \\ - 2n(n+\alpha)(n+\alpha+2)P_{n-1}^{(\alpha, 0)}(x), \\ P_0^{(\alpha, 0)}(x) = 1.$$

В случае, когда  $\alpha = 0$  и  $h(t) = \text{const}$ , полиномы Якоби вырождаются в полиномы Лежандра. В этом случае решение принимает вид

$$C(t, z) = \frac{\overline{Q}}{h} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) P_n \left( 2\frac{H}{h} - 1 \right) P_n \left( \frac{z}{h} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -n(n+1) \frac{cv_* t}{h} \right\} \right], \quad (5.97)$$

где  $P_n$  – полиномы Лежандра;  $H$  – высота источника. Для случая  $h \rightarrow \infty$  из выражения (5.97) следует простое аналитическое решение

$$C(t, z) = \frac{\overline{Q}}{cv_* t} \exp \left( -\frac{z}{cv_* t} \right). \quad (5.98)$$

Анализ рассмотренных частных примеров показывает, что в общем случае явное аналитическое решение стационарных и нестационарных задач теории турбулентной диффузии в полупространстве  $z > 0$  с переменной по высоте скоростью ветра  $W(z)$  и переменными  $k_y$  и  $k_z$  до сих пор не получено. Поэтому при практическом решении задач этого класса о рассеивании примеси в атмосфере от непрерывных и мгновенных, точечных или линейных источников необходимо использовать те или иные приближенные приемы или прямые расчеты с помощью численных методов.

## 5.8. Численные методы решения уравнения турбулентной диффузии

Выше отмечалось, что аналитическое решение задачи диффузии при определении эволюции поля концентрации от стационарных и нестационарных источников примеси с переменными коэффициентами диффузии и сложными распределениями полей скорости и температуры в атмосфере практически невозможно из-за сложности решения основного уравнения конвективной турбулентной диффузии. Однако современный уровень развития вычислительной техники и численных методов решения уравнений в частных производных в принципе позволяет преодолеть эти трудности. В настоящее время для краевых задач интересующего нас класса разработаны различные численные методы их решения и эффективные алгоритмы, обладающие устойчивостью и быстрой сходимостью.

В наиболее сложных трехмерных численных моделях, основанных на решении полного уравнения турбулентной диффузии, может

быть использовано трехмерное поле ветра. Такие модели целесообразно использовать для учета эффектов бароклинности, неоднородной подстилающей поверхности и в ряде других случаев.

Рассмотрим уравнение турбулентной диффузии для осредненных концентраций  $C(x, y, z, t)$  следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + W \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - (\lambda + \Lambda)C. \end{aligned}$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных параболического типа с переменными коэффициентами. Обычно численное решение какой-либо задачи математической физики состоит из двух частей: дискретизации, т.е. способа построения конечномерной модели, представляющей собой некоторую систему алгебраических уравнений, и метода решения этой системы уравнений.

Этап дискретизации задачи связан с переходом от области непрерывного изменения аргумента к области его дискретного изменения. Обоснование корректности такого перехода связано с доказательством устойчивости разностной схемы и сходимости решения разностной задачи к дифференциальной, а также с получением оценок погрешности аппроксимации. Учитывая требования соблюдения баланса (тепла, массы) по основным переменным, целесообразно применять консервативные однородные разностные схемы, основанные на использовании интегро-интерполяционного метода.

Для нестационарного случая решение сеточных уравнений обычно находится на последовательности временных интервалов. При этом могут использоваться прямые или итерационные методы, явные, неявные и смешанные схемы, например, схема Кранка – Николсона [140].

Несмотря однако на то, что общая схема казалась бы ясна, практическое построение эффективного алгоритма решения, обеспечивающего получение результата за минимальное время с приемлемой точностью, является далеко нетривиальной задачей и требует от программиста определенных профессиональных навыков.

Выбор того или иного конкретного численного метода определяется многими объективными и субъективными факторами, к числу которых относятся особенности данного класса задач, требования, предъявляемые к численному решению: размер расчетной области, точность, быстрота получения решения, количество вариантов рас-

чета, возможности имеющейся вычислительной техники, а также научные традиции.

Для численного решения рассматриваемого класса задач турбулентной диффузии часто применяется метод дискретизации, обычно именуемый методом сеток. Этот метод является в настоящее время наиболее распространенным, апробированным и надежным. Сущность метода состоит в следующем. В области изменения независимых переменных вводится сетка – дискретная совокупность узловых точек. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются сеточные функции, значения которых задаются в узловых точках сетки. Дифференциальные уравнения с соответствующими краевыми условиями заменяются приближенными сеточными уравнениями, связывающими значения искомых функций в узлах сетки.

Одной из разновидностей метода сеток является метод конечных разностей. Он состоит в замене производных в дифференциальных уравнениях конечно-разностными соотношениями. Основные конечно-разностные формулы для частных производных могут быть получены при помощи разложения в ряды Тейлора, полиномиальной аппроксимации, интегрального метода или метода контрольного объема. Все четыре метода вывода конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений в частных производных могут привести к одинаковым разностным выражениям. Это обнадеживает и укрепляет доверие ко всем этим методам. Но в каждом из них имеется некоторая свобода действий, так как выбор метода для вывода конечно-разностного аналога дифференциального уравнения определяет этот аналог не единственным образом.

Для более глубокого понимания общих положений, о которых шла речь выше, рассмотрим ряд частных случаев решения уравнения диффузии. Пусть первая модельная задача ограничена двумерным случаем и формулируется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W \frac{\partial C}{\partial x} &= k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, & C &= C(x, z), \\
 C(0, z) &= \varphi(z), & W, k_z &\sim \text{const}, \\
 C(x, \infty) &\rightarrow 0, & 0 \leq x &< \infty, \\
 C(x, 0) &= 0, & 0 \leq z &< \infty,
 \end{aligned}
 \tag{5.99}$$

где  $\varphi(z)$  – функция, описывающая начальное распределение концентрации.

Для аппроксимации поставленной задачи построим две схемы – явную и неявную. Во всех этих схемах используем сетку, образова-

ную точками пересечения прямых  $z = m\Delta z$ ,  $x = n\Delta x$ , где  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  — шаги сетки по координате  $x$  и  $z$  соответственно,  $m = \overline{0, M}$ ;  $n = \overline{0, N}$ .

Используя явную двухслойную по координате  $x$  схему [140], для задачи (5.99) получаем следующую разностную краевую задачу:

$$\begin{aligned} W \frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\Delta x} &= k_z \frac{C_{m+1}^n - 2C_m^n + C_{m-1}^n}{(\Delta z)^2}, \\ C_m^0 &= \varphi(m\Delta z), \\ C_0^{n+1} &= 0, \\ C_M^{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{5.100}$$

Конечно-разностная аппроксимация (5.100) уравнения (5.99) составляет первый порядок по  $\Delta x$ , и второй по  $\Delta z$ .

Решение уравнения (5.100) находится по явной формуле

$$C_m^{n+1} = (1 - 2r)C_m^n + r(C_{m-1}^n + C_{m+1}^n).$$

Зная значения  $C_m^n$ , мы можем вычислить значение  $C_m^{n+1}$  на следующем слое  $x = x_{n+1}$ .

Теперь используем неявную двухслойную схему для этой же задачи. Тогда получаем следующую разностную краевую задачу:

$$\begin{aligned} W \frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\Delta x} &= k_z \frac{C_{m+1}^{n+1} - 2C_m^{n+1} + C_{m-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2}, \\ C_m^0 &= \varphi(m\Delta z), \\ C_0^{n+1} &= 0, \\ C_M^{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{5.101}$$

В этом случае разностное уравнение, выписанное при фиксированных  $m$  и  $n$ , нельзя разрешить относительно  $C_m^{n+1}$ , выразив это значение через известные значения  $C_{m+1}^n$ ,  $C_m^n$ ,  $C_{m-1}^n$  с предыдущего слоя. Дело в том, что в это уравнение входит не только неизвестное значение  $C_m^{n+1}$ , но также и неизвестные  $C_{m-1}^{n+1}$  и  $C_{m+1}^{n+1}$ . Поэтому для определения  $C_m^{n+1}$  необходимо решать разностное уравнение относительно сеточной функции  $C_m^{n+1}$  аргумента  $m$ . Следовательно, конечно-разностная задача (5.101) состоит из системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и в общем виде представляется таким образом:

$$\alpha_m C_{m+1}^{n+1} + \beta_m C_m^{n+1} + \gamma_m C_{m-1}^{n+1} + \delta_m = 0, \tag{5.102}$$



где

$$\begin{aligned}\alpha_m &= k_z; \\ \beta_m &= -W(\Delta z)^2/\Delta x - 2k_z; \\ \gamma_m &= k_z; \\ \delta_m &= WC_m^n(\Delta z)^2/\Delta x.\end{aligned}$$

Для численного решения систем с трехдиагональными матрицами применяется метод прогонки [65]. При его использовании прямым ходом находятся прогоночные коэффициенты  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{K}_m$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= 0; \quad \mathcal{K}_1 = 0; \\ \mathcal{L}_{m+1} &= -\frac{\alpha_m}{\beta_m + \gamma_m \mathcal{L}_m}; \\ \mathcal{K}_{m+1} &= \frac{\delta_m - \gamma_m \mathcal{K}_m}{\beta_m + \gamma_m \mathcal{L}_m}, \quad m = \overline{1, M-1},\end{aligned}\tag{5.103}$$

а обратным ходом  $m = M-1, \dots, 1$  находим искомые концентрации:

$$C_M^{n+1} = 0, \quad C_m^{n+1} = \mathcal{L}_{m+1} C_{m+1}^{n+1} + \mathcal{K}_{m+1}.\tag{5.104}$$

Для того, чтобы величина ошибок округления при реализации алгоритма не возрастала, достаточно выполнения неравенства

$$|\beta_m| \geq |\alpha_m| + |\gamma_m| + \delta_m, \quad \delta_m > 0.$$

Два замечательных свойства прогонки – малое число арифметических действий для ее реализации и слабая чувствительность к вычислительным погрешностям – делают прогонку очень удобным вычислительным алгоритмом. Неявная схема остается устойчивой при произвольном соотношении шагов  $\Delta x$  и  $\Delta z$ .

Рассмотренная модельная задача была двумерной. Во многих случаях требуется решить более сложную трехмерную задачу. Часто оказывается возможным свести ее к последовательному решению более простых задач, эффективно решаемых численно. Редукция сложных задач к более простым возможна лишь в определенных случаях. Такую процедуру часто называют методами расщепления [103]. Несмотря на большое разнообразие методов расщепления наиболее универсальным и общим для приложений является метод покомпонентного расщепления. На описательном уровне идею конструкции схем расщепления можно изложить следующим образом [103].

Рассмотрим дифференциальную задачу вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} = A(C), \quad C = C(t, x, y) \quad 0 < t < T,\tag{5.105}$$

причем  $C(0, x, y)$  задано. Здесь  $A$  – некоторый оператор по пространственным переменным, например, в интересующем нас случае

$$A(C) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

Значения  $C(t_{p+1}, x, y)$  по уже известным значениям  $C(t_p, x, y)$ , ( $t_p = p\tau$ ) выразим формулой

$$C(t_p + \tau, x, y) = C(t_p, x, y) + \tau A(C(t_p, x, y)) + O(\tau^2).$$

Допустим, что правая часть уравнения (5.105) имеет вид  $A(C) = A_1(C) + A_2(C)$ . Тогда расцепим уравнение (5.105)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = A_1(C) + A_2(C)$$

на следующие два

$$\frac{\partial S}{\partial t} = A_1(S), \quad t_p \leq t \leq t_{p+1}, \quad S(t_p, x, y) = C(t_p, x, y), \quad (5.106)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = A_2(Q), \quad t_p \leq t \leq t_{p+1}, \quad Q(t_p, x, y) = S(t_{p+1}, x, y). \quad (5.107)$$

Заметим, что

$$Q(t_{p+1}, x, y) = C(t_{p+1}, x, y) + O(\tau^2). \quad (5.108)$$

Равенство (5.108) и дает основание на каждом интервале времени  $t_p \leq t \leq t_{p+1}$  вместо задачи (5.105) последовательно решать задачи (5.106) и (5.107). Для иллюстрации указанных общих положений рассмотрим случай следующей трехмерной начально-краевой задачи:

$$W \frac{\partial C}{\partial x} = k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad W, k_y, k_z \sim \text{const},$$

$$C(0, y, z) = \varphi(y, z), \quad 0 < x < \infty, \quad (5.109)$$

$$C(x, y, 0) = 0, \quad C(x, y, \infty) \rightarrow 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

$$C(x, \infty, z) \rightarrow 0, \quad C(x, -\infty, z) \rightarrow 0, \quad 0 \leq z \leq \infty.$$

Для дискретизации уравнения (5.109) выбираем следующую сетку:

$$x_n = n\Delta x, \quad n = \overline{0, N},$$

$$y_l = l\Delta y, \quad l = \overline{0, L},$$

$$z_m = m\Delta z, \quad m = \overline{0, M}.$$

В качестве системы (5.106), (5.107) запишем такие выражения:

$$\begin{aligned} W \frac{\partial S}{\partial x} &= k_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, & S(x_n, y, z) &= C(x_n, y, z), \\ W \frac{\partial Q}{\partial x} &= k_z \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, & Q(x_n, y, z) &= S(x_{n+1}, y, z). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Разностная схема расщепления для соотношений (5.110) имеет вид

$$\begin{aligned} W \frac{\tilde{C}_{lm} - C_{lm}^n}{\Delta x} &= k_y \Lambda_{yy} \tilde{C}_{lm}, \\ W \frac{C_{lm}^{n+1} - \tilde{C}_{lm}}{\Delta x} &= k_z \Lambda_{zz} \tilde{C}_{lm}^{n+1}; \\ \tilde{C}_{lm}^0 &= \varphi(y_l, z_m), \end{aligned} \quad (5.111)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{lm} &= S_{lm}^{n+1} = Q_{lm}^n; & C_{lm}^{n+1} &= Q_{lm}^{n+1}; \\ \Lambda_{yy}(C) &= \frac{C_{l+1,m} - 2C_{lm} + C_{l-1,m}}{(\Delta y)^2}; \\ \Lambda_{zz}(C) &= \frac{C_{l,m+1} - 2C_{lm} + C_{l,m-1}}{(\Delta z)^2}. \end{aligned}$$

Другой вариант: задачу (5.109) можно записать так

$$\begin{aligned} W \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left( k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \left( k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \\ C(0, y, z) &= \varphi(y, z), \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$C(x, y, 0) = 0, \quad C(x, y, \infty) \rightarrow 0,$$

$$C(x, \infty, z) \rightarrow 0; \quad C(x, -\infty, z) \rightarrow 0$$

и поставить ей в соответствие на отрезке  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  следующие две системы:

$$W \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( k_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right); \quad (5.113)$$

$$S(x_n, y, z) = C(x_n, y, z),$$

$$W \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( k_y \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right), \quad (5.114)$$

$$Q(x_n, y, z) = S(x_{n+1}, y, z).$$

Выберем разностную схему таким образом:

$$\begin{aligned} W \frac{\tilde{C}_{lm} - C_{lm}^n}{\Delta X} &= \frac{1}{2} \left( k_y \Lambda_{yy} \tilde{C}_{lm} + k_z \Lambda_{zz} C_{lm}^n \right), \\ W \frac{C_{lm}^{n+1} - \tilde{C}_{lm}}{\Delta X} &= \frac{1}{2} \left( k_y \Lambda_{yy} \tilde{C}_{lm} + k_z \Lambda_{zz} C_{lm}^{n+1} \right), \\ C_{lm}^0 &= \varphi(y_l, z_m). \end{aligned} \quad (5.115)$$

Для вычисления  $C_{lm}^{n+1}$  по схеме (5.115) переменных направлений надо сначала при каждом фиксированном  $n$  решить неявное уравнение для  $\tilde{C}_{lm}$ , в которое  $n$  входит как параметр. Потом для вычисления  $C_{lm}^{n+1}$  надо решить второе уравнение (5.115), неявное относительно  $C_{lm}^{n+1}$ , в которое  $l$  входит как параметр. Отметим, что спектральный признак устойчивости Неймана для разностных схем (5.111) и (5.115) справедлив при любом  $r$ , где

$$r = \frac{2\Delta x k_y}{W(\Delta y)^2} + \frac{2\Delta x k_z}{W(\Delta z)^2}.$$

Приведенная разностная схема расщепления для задачи (5.109) в некоторых отношениях обладает принципиальными преимуществами перед простейшей явной разностной схемой

$$W \frac{C_{lm}^{n+1} - C_{lm}^n}{\Delta x} = k_y \Lambda_{yy} C_{lm}^n + k_z \Lambda_{zz} C_{lm}^n, \quad (5.116)$$

и простейшей неявной

$$W \frac{C_{lm}^{n+1} - C_{lm}^n}{\Delta x} = k_y \Lambda_{yy} C_{lm}^{n+1} + k_z \Lambda_{zz} C_{lm}^{n+1}. \quad (5.117)$$

Вычисления по явной схеме (5.116) очень просты. Для перехода от уже известного  $C^n$  к неизвестному  $C^{n+1}$  требуется проделать арифметические действия в количестве, пропорциональном числу  $(L-1)(M-1)$  неизвестных значений  $\{C_{lm}^{n+1}\}$ . В этом смысле явная схема неупрощаема. Разностные схемы, в которых число арифметических действий для перехода от  $C^n$  к  $C^{n+1} = \{C_{lm}^{n+1}\}$  пропорционально числу неизвестных значений, часто называются экономичными. Однако, будучи экономичной, явная схема устойчива лишь при следующем жестком ограничении на шаг сетки  $\Delta x$ :

$$\Delta x \leq \frac{W(\Delta y)^2}{8k_y} + \frac{W(\Delta z)^2}{8k_z}.$$

Приведенная выше простейшая неявная разностная схема (5.117) абсолютно устойчива, но она не является экономичной. Для неизвестных  $\{C_{lm}^{n+1}\}$  приходится решать сложную (нерасщепляющуюся) систему линейных уравнений. Для этого требуется произвести арифметические действия в количестве, пропорциональном не первой степени числа неизвестных, как в экономичных схемах, а кубу числа неизвестных, если пользоваться каким-либо методом исключения неизвестных.

Приведем ниже разностную схему расщепления, которая является экономичной и безусловно устойчивой, соединяя достоинства явной (5.116) и неявной (5.117) схем.

Задаче (5.109) на отрезке  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  поставим в соответствие две задачи

$$W \frac{\partial S}{\partial x} = k_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2},$$

$$S(x, \infty, z) \rightarrow 0; \quad S(x, -\infty, z) \rightarrow 0; \quad (5.118)$$

$$S(x_n, y, z) = C(x_n, y, z);$$

и

$$W \frac{\partial Q}{\partial x} = k_z \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2},$$

$$Q(x, y, 0) = 0; \quad Q(x, y, \infty) \rightarrow 0; \quad (5.119)$$

$$Q(x_n, y, z) = S(x_{n+1}, y, z).$$

Сеточную функцию  $\{C_{lm}^n\}$ , (при  $C_{lm}^0 = \varphi(y_l, z_m)$ ,  $C_{l0}^n = 0$ ,  $C_{lM}^n = 0$ ,  $C_{0m}^n = 0$ ;  $C_{Lm}^n = 0$ ) будем определять последовательно при  $n = \overline{1, N}$  из уравнений

$$W \frac{\tilde{C}_{lm} - C_{lm}^n}{\Delta x} = k_y \Lambda_{yy} \tilde{C}_{lm}, \quad l = \overline{1, L-1},$$

$$\tilde{C}_{0m} = 0; \quad \tilde{C}_{Lm} = 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (5.120)$$

$$W \frac{C_{lm}^{n+1} - \tilde{C}_{lm}}{\Delta x} = k_z \Lambda_{zz} C_{lm}^{n+1},$$

$$C_{l0}^{n+1} = 0; \quad C_{lM}^{n+1} = 0. \quad (5.121)$$

Задача (5.120) аналогична (5.118), а задача (5.121) – задаче (5.119). При этом  $S_{lm}^n = C_{lm}^n$ ;  $Q_{lm}^n = S_{lm}^{n+1} = \tilde{C}_{lm}$ ;  $Q_{lm}^{n+1} = C_{lm}^{n+1}$ . В соответ-

ствии с разностной схемой расщепления (5.120) сначала по известным значениям  $C^n = \{C_{lm}^n\}$  вычисляется вспомогательная функция  $\tilde{C}_{lm}$ , потом из (5.121) вычисляется  $C^{n+1} = \{C_{lm}^{n+1}\}$ .

Заметим, что разностная задача (5.121) для отыскания  $\tilde{C}_{lm}$  при каждом фиксированном  $n$  ( $n = \overline{1, N-1}$ ) в точности совпадает с невязной разностной схемой

$$W \frac{S_{lm}^{n+1} - S_{lm}^n}{\Delta_x} = k_y \Lambda_{yy} S_{lm}^{n+1}$$

для уравнения (5.118), в которое  $z$  входит только как параметр.

Разностная задача (5.120) при каждом фиксированном  $m$  решается прогонкой в направлении оси  $Oy$ . Точно также разностная задача (5.121) при каждом фиксированном  $l$  решается прогонкой по направлению оси  $Oz$ .

Теперь рассмотрим разностную схему применительно к более общей интересующей нас конкретной задаче атмосферной диффузии. Пусть в полуограниченной области при наличии ветрового потока происходит трехмерная установившаяся диффузия консервативной оседающей примеси от высотного источника с заданной начальной концентрацией  $\varphi(y, z)$ . Тогда для определения поля концентрации имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} W \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial C}{\partial z}, \\ C(0, y, z) &= C_H \varphi(y, z) \quad 0 \leq x \leq \infty, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \quad C(x, y, \infty) \rightarrow 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ C(x, \infty, z) &\rightarrow 0, \quad C(x, -\infty, z) \rightarrow 0, \quad 0 \leq z < \infty, \end{aligned} \tag{5.122}$$

где  $W$  – скорость сносящего ветрового потока;  $w$  – скорость вертикального осаждения примеси;  $k_y, k_z$  – коэффициенты диффузии;  $\varphi(y, z)$  – функция, описывающая начальное распределение примеси при  $x = 0$ . Начало системы координат  $Oxyz$  расположено на подстилающей ровной поверхности, а центр распределенного источника имеет координаты  $x = 0, y = 0, z = H$ ;  $C_H$  – значение концентрации в точке  $(0, 0, H)$ . В общем случае  $W = W(x, y, z), k_y = k_y(x, y), k_z = k_z(x, z)$ . Для численного решения задачи (5.122) используем вышеописанную экономичную схему расщепления. В рассматриваемом случае уравнения, аналогичные (5.110), имеют вид

$$W \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial S}{\partial y}, \quad W \frac{\partial Q}{\partial x} + w \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{5.123}$$

где

$$S(x_n, y, z) = C(x_n, y, z) \quad Q(x_n, y, z) = S(x_{n+1}, y, z).$$

Конечно-разностная схема расщепления для системы (5.123) записывается следующим образом:

$$W_{lm}^n \frac{C_{lm}^a - C_{lm}^n}{\Delta x} = \frac{(k_{l+1}^n + k_l^n) (C_{l+1,m}^a - C_{lm}^a)}{2(\Delta y)^2} - \frac{(k_l^n + k_{l-1}^n) (C_{lm}^a - C_{l-1,m}^a)}{2(\Delta y)^2}; \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned} W_{lm}^n \frac{C_{lm}^{n+1} - C_{lm}^a}{\Delta x} + w_{lm}^n \frac{C_{l,m+1}^{n+1} - C_{l,m-1}^{n+1}}{2\Delta z} &= \\ &= \frac{(k_{m+1}^n + k_m^n) (C_{l,m+1}^{n+1} - C_{lm}^{n+1})}{2(\Delta z)^2} - \\ &- \frac{(k_m^n + k_{m-1}^n) (C_{lm}^{n+1} - C_{l,m-1}^{n+1})}{2(\Delta z)^2}; \end{aligned} \quad (5.125)$$

где  $C_{lm}^a = S_{lm}^{n+1} = Q_{lm}^n$ ;  $C_{lm}^{n+1} = Q_{lm}^{n+1}$ .

Конечно-разностные уравнения (5.124) и (5.125) аппроксимируют задачу (5.123) с первым порядком точности по  $\Delta x$  и со вторым порядком по  $\Delta y$  и  $\Delta z$ . Граничные условия для (5.124) и (5.125) имеют, соответственно, следующий вид:

$$C_{lm}^0 = C_H \varphi(y_l, z_m), \quad C_{0m}^a = 0; \quad C_{Lm}^a = 0, \quad (5.126)$$

$$\frac{C_{l1}^{n+1} - C_{l0}^{n+1}}{\Delta z} = 0, \quad C_{lM}^{n+1} = 0; \quad (5.127)$$

Конечно-разностное уравнение (5.124) удобно переписать в таком виде:

$$\alpha_l C_{l+1,m}^a + \beta_l C_{lm}^a + \gamma_l C_{l-1,m}^a - \delta_l = 0; \quad (5.128)$$

где

$$\alpha_l = (k_{l+1}^n + k_l^n) / 2;$$

$$\beta_l = -W_{lm}^n (\Delta y)^2 / \Delta x - (k_{l+1}^n + 2k_l^n + k_{l-1}^n) / 2;$$

$$\gamma_l = (k_l^n + k_{l-1}^n) / 2;$$

$$\delta_l = -W_{lm}^n C_{lm}^n (\Delta y)^2 / \Delta x.$$

Уравнение (5.128) при каждом фиксированном  $m$  решается методом прогонки. При этом прямым ее ходом вычисляем коэффициенты  $\mathcal{L}_l$ ,  $\mathcal{K}_l$ :

$$\mathcal{L}_{l+1} = -\frac{\mathcal{L}_l}{\beta_l + \gamma_l \mathcal{L}_l}, \quad \mathcal{K}_{l+1} = \frac{\delta_l - \gamma_l \mathcal{K}_l}{\beta_l + \gamma_l \mathcal{L}_l},$$

где  $\mathcal{L}_1 = 0$ ;  $\mathcal{K}_1 = 0$ ;  $l = \overline{1, L-1}$ , а обратным ходом прогонки определяем искомые концентрации  $C_{lm}^a = \mathcal{L}_{l+1} C_{l+1,m}^a + \mathcal{K}_{l+1}$ , где  $C_{LM}^a = 0$ .

В свою очередь, разностная задача (5.125), (5.127) при каждом фиксированном  $l$  решается прогонкой в направлении оси  $Oz$ . При этом уравнение (5.125) имеет следующий вид:

$$\alpha_m C_{l,m+1}^{n+1} + \beta_m C_{lm}^{n+1} + \gamma_m C_{l,m-1}^{n+1} - \delta_m = 0, \quad (5.129)$$

где

$$\alpha_m = (k_{m+1}^n + k_m^n) / 2 - w_{lm}^n \Delta z / 2;$$

$$\beta_m = -W_{lm}^n (\Delta z)^2 / \Delta x - (k_{m+1}^n + 2k_m^n + k_{m-1}^n) / 2;$$

$$\gamma_m = (k_m^n + k_{m-1}^n) / 2 + w_{lm}^n \Delta z / 2;$$

$$\delta_m = -W_{lm}^n C_{lm}^a (\Delta z)^2 / \Delta x.$$

Прямым ходом прогонки находим коэффициенты  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{K}_m$ :

$$\mathcal{L}_{m+1} = -\frac{\alpha_m}{\beta_m + \gamma_m \mathcal{L}_m}; \quad \mathcal{K}_{m+1} = \frac{\delta_m - \gamma_m \mathcal{K}_m}{\beta_m + \gamma_m \mathcal{L}_m};$$

где  $m = \overline{1, M-1}$ ;  $\mathcal{L}_1 = 1$ ;  $\mathcal{K}_1 = 0$ , а обратным ходом  $m = M-1, \dots, 1$  находим искомые концентрации

$$C_{lm}^{n+1} = \mathcal{L}_{m+1} C_{l,m+1}^{n+1} + \mathcal{K}_{m+1}, \quad C_{lM}^{n+1} = 0. \quad (5.130)$$

Используя формулы (5.123) – (5.130), получаем численное решение задачи (5.122) в заданной области при указанных граничных условиях.

При численной реализации описанного алгоритма иногда целесообразно использовать сетку с изменяющимися шагами  $\Delta y$  и  $\Delta z$  при постоянстве количества точек сетки  $L$  и  $M$ . Условием перехода к более крупному шагу может служить, например, признак  $\partial C / \partial z|_{z=M\Delta z} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – наперед заданная величина, зависящая от значения  $C_m$ .

Приведенная численная схема тестировалась на примере, когда скорости  $W$  и  $w$ , а также коэффициенты диффузии  $k_y$  и  $k_z$  постоянны. Начальное распределение примеси  $\varphi(y, z)$  было принято в виде



двумерной функции Гаусса, т. е.

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp \left[ -\frac{y^2 + (z - H)^2}{2\sigma_0^2} \right]. \quad (5.131)$$

Именно для этого случая выше было получено аналитическое решение рассматриваемой задачи. Расчеты показали, что точность численного решения зависит от выбора числа точек  $L$  и  $M$  для заданной расчетной области, и с ростом их числа численное решение стремится к точному аналитическому решению.

Одним из достоинств численного метода решения рассматриваемой задачи диффузии является то, что данный метод позволяет решить задачу в случае, когда скорость  $W$  и коэффициенты диффузии  $k_y$  и  $k_z$  не постоянны. Однако прикладные расчеты атмосферной диффузии на основе прямого численного решения уравнения диффузии связаны с определенными сложностями. Это становится особенно очевидным, если принять во внимание значительные размеры расчетной области, многомасштабность параметров турбулентной атмосферы и нестационарность скорости ветра по величине и направлению.

## 5.9. Краткий обзор практических способов расчета рассеивания примеси в атмосфере

В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных приближенным методам расчета химического и радиоактивного загрязнения атмосферы газоаэрозольными выбросами от различного рода промышленных предприятий. Подчеркнем, что все они базируются на концепции точечного источника. Для расчета рассеивания примеси в атмосфере наиболее ранней и широко известной в мировой практике является модель, предложенная Ф. Паскуиллом [208] и развитая Гиффордом [180] и П. М. Брайантом [160], которая была рекомендована МАГАТЭ для оценки загрязнения атмосферы предприятиями атомной промышленности и энергетики [121, 145, 156].

В основу методики МАГАТЭ положена гауссова модель в варианте Паскуилла–Гиффорда. В ней содержатся рекомендации для определения дисперсий по входным метеорологическим параметрам. Эти рекомендации, разработанные Паскуиллом и Гиффордом на основе результатов экспериментальных работ, широко используются исследователями для различных прикладных расчетов. Наиболее полное описание этой модели приведено в работах [145, 156], где содержится много фактического материала, эмпирических формул и графиков. Характерно, что в силу сложности проблемы авторы этих

работ не стремятся к унификации своих рекомендаций, а приводят по возможности известные им результаты и варианты.

В основу расчетов по методике МАГАТЭ положена следующая формула для распределения приземной концентрации примеси:

$$C(x, y, 0) = \frac{M}{\pi \sigma_y \sigma_z W h} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad (5.132)$$

$\sigma_y = a_y x^{\alpha_y}$ ,  $\sigma_z = a_z x^{\alpha_z}$ , где  $a_y$ ,  $\alpha_y$ ,  $a_z$ ,  $\alpha_z$  – эмпирические коэффициенты.

Обширные сравнения для модели [145] по данным измерений азотистых соединений от промышленных источников выполнены в работе [184].

В справочнике Н. Г. Гусева и В. А. Беляева [70] имеется большой раздел “Рассеяние примеси в атмосфере”, где подробно рассматривается, в основном, гауссова модель. Анализируются разные факты, изложены способы классификации условий атмосферной устойчивости, приведены формулы и графики для определения дисперсий и других параметров, которые позволяют оценить “истощение” облака примеси за счет радиоактивного распада, сухого осаждения и вымывания осадками. Там же содержатся и методические рекомендации по расчету рассеивания радиоактивных газоаэрозольных выбросов в атмосфере.

Модель, разработанная в Ленинградском гидрометеорологическом институте (ЛГМИ), основана на модели вида

$$C(x, y, 0) = \frac{54M}{W x^{1.9}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp(-14.5H^{1.13}), \quad (5.133)$$

$$\sigma_y^2 = (0.2x^{0.9})^2 \quad \text{или} \quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_v^2 x^2}{U^2 (1 + x/(U\tau_L))}.$$

Ее особенности и описание имеется в работе [72, 74].

Модель, разрабатываемая в Институте экспериментальной метеорологии (ИЭМ), основана на модели Гаусса и содержит ряд отличных от других допущений и положений о входных параметрах. Она предназначена для расчета рассеивания примеси от точечного и линейного источников при широком диапазоне метеорологических условий и содержит рекомендации для их определения по результатам метеорологических измерений. Основу расчетов по методике ИЭМ составляет формула

$$C(x, y, 0) = \frac{M}{\sqrt{2\pi} b_y b_z W x^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2b_y^2 x^2}\right) \exp\left(-\frac{H}{b_z x}\right), \quad (5.134)$$

где

$$W = W_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^p; \quad b_y = 0.08, \quad b_z = 0.024; \quad \sigma_z = b_y^2 x^2;$$

$$k_z = k_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^m; \quad p = 0.16; \quad m = 1.$$

Подробное изложение этой методики приведено в работе [40], более поздняя редакция усовершенствованной модели имеется в [41].

В практических расчетах процессов рассеивания вредных химических примесей, содержащихся в выбросах различных промышленных предприятий в бывшем СССР, широко использовалась модель Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова (ГГО), разработанная под руководством М. Е. Берлянда [15, 109, 144]. Она доведена до практических рекомендаций по ее использованию в прикладных расчетах. Согласно этой методике расчет рассеивания примеси ведется исходя из так называемой опасной скорости ветра и наиболее неблагоприятных метеорологических условий.

Опасная скорость ветра  $u_m$  на уровне флюгера (10 м) определяется по следующим соотношениям:

$$u_m = 0.5 \quad \text{при} \quad v_m \leq 0.5,$$

$$u_m = v_m \quad \text{при} \quad 0.5 \leq v_m \leq 2, \quad (5.135)$$

$$u_m = v_m(1 + 0.12\sqrt{f}) \quad \text{при} \quad v_m > 0.5,$$

где

$$v_m = 0.65 \left( \frac{Q_1 \Delta T}{H_0} \right)^{1/3}; \quad f = \frac{w_0^2 D_0}{H_0^2 \Delta T} \cdot 10^3. \quad (5.136)$$

В этих выражениях  $Q_1 = \pi D_0^2 w_0 / 4$  – объемный расход выбрасываемой газовой смеси ( $\text{м}^3/\text{с}$ );  $\Delta T = T_0 - T_w$  – разность температур между выбрасываемым газом и средней температурой воздуха ( $^\circ\text{C}$ ) в самый жаркий месяц;  $H_0$  – высота трубы (м);  $w_0$  – начальная скорость выбрасываемой газовой смеси (м/с);  $D_0$  – диаметр устья трубы (м).

При выбросе из одиночного высотного источника максимальная приземная концентрация вредных веществ определяется по формуле

$$C_m = \frac{AMFmn}{H_0^2(Q_1\Delta T)^{1/3}}, \quad (5.137)$$

где  $A(\text{с}^{2/3} \text{ мг}/\text{к}^{1/3})$  – коэффициент, зависящий от температурной стратификации атмосферы ( $240 \div 120$ );  $M$  – общее количество вредного вещества, выбрасываемого в атмосферу, г/с;  $F$  – безразмерный

коэффициент, учитывающий скорость оседания примеси ( $1 \div 2.5$ );  $m$  и  $n$  – безразмерные коэффициенты, учитывающие начальные условия выброса.

Коэффициент  $m$  определяется в зависимости от параметра  $f$  по формуле

$$m = \frac{1}{0.67 + 0.1\sqrt{f} + 0.34f^{1/3}}. \quad (5.138)$$

Коэффициент  $n$  определяется в зависимости от параметра  $v_m$ , причем

$$\begin{aligned} n &= 3 \quad \text{при} \quad v_m < 0.3, \\ n &= 3 - \sqrt{(v_m - 0.3)(4.36 - v_m)} \quad \text{при} \quad 0.3 \leq v_m \leq 2, \\ n &= 1 \quad \text{при} \quad v_m > 2. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Координата  $x_m$ , соответствующая максимальной приземной концентрации  $C_m$ , определяется соотношением

$$x_m = dH_0, \quad (5.140)$$

где  $d$  – безразмерная величина,

$$\begin{aligned} d &= 4.25v_m(1 + 0.28^3\sqrt{f}) \quad \text{при} \quad v_m \leq 2, \\ d &= 7\sqrt{v_m}(1 + 0.28^3\sqrt{f}) \quad \text{при} \quad v_m > 2. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Если коэффициент  $F \geq 2$ , то величина

$$x_m = \frac{5 - F}{4}dH_0.$$

Приземная концентрация под осью факела на различном удалении от источника  $x$  определяется соотношением

$$C = S_1C_m,$$

где безразмерная величина  $S_1$  определяется по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= 3\bar{x}^4 - 8\bar{x}^3 + 6\bar{x}^2 \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq 1, \\ S_1 &= \frac{1.13}{0.13\bar{x}^2 + 1} \quad \text{при} \quad 1 < \bar{x} \leq 8, \\ S_1 &= \frac{1}{3.18\bar{x}^2 + 3.52\bar{x} + 12} \quad \text{при} \quad \bar{x} > 8 \quad \text{и} \quad F = 1, \end{aligned} \quad (5.142)$$

а при  $\bar{x} > 8$  и  $F$ , равном 2, 2.5, 3  $S_1$  определяется по формуле

$$S_1 = \frac{1}{0.1\bar{x}^2 + 2.74\bar{x} - 17.8}, \quad (5.143)$$

где  $\bar{x} = x/x_m$ .

Значения приземных концентраций  $C_y$  в перпендикулярном к  $x$  направлении определяются по соотношению

$$C_y = S_2 C,$$

где безразмерная величина  $S_2$  зависит от скорости ветра  $W$  и определяется по формуле

$$S_2 = \frac{1}{\left[1 + 8.4W \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \left[1 + 28.2W^2 \left(\frac{y}{x}\right)^4\right]}. \quad (5.144)$$

Высоту трубы, обеспечивающую предельно допустимый уровень концентраций, определяют по формуле

$$H_{0m} = \sqrt{\frac{AMFmn^3}{\text{ПДК}}} \sqrt{\frac{k}{V_1 \Delta T}},$$

где  $k$  – число дымовых труб одинаковой высоты.

Комбинированная модель для концентрации

$$C(x, y, z) = \frac{q(x, z)}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right), \quad (5.145)$$

в которой рассеивание в поперечном горизонтальном направлении описывается законом Гаусса, а рассеивание по вертикали определяется из решения соответствующего двумерного уравнения турбулентной диффузии для функции  $q(x, z)$ , также использовалась рядом авторов [27, 97] и была рекомендована в нормативном документе [144]. Другое интересное руководство [224] предназначено для выполнения расчетов, связанных с принятием решений в случае аварийной ситуации на АЭС.

Использование той или иной методики для расчета поля приземных концентраций приводит к близким результатам при расчете рассеивания примеси для некоторых средних условий и нейтральной стратификации атмосферы. В работе [74] приведены результаты расчетов поля приземной концентрации невесомой консервативной примеси для непрерывного источника мощностью  $M = 1$  г/с по моделям Сэттона [138], ЛГМИ [72, 97], ГГО [144] и ИЭМ [39]. При расчетах было принято, что эффективная высота выброса  $H = 100$  м,

средняя скорость ветра постоянна по высоте и равна  $W = 5$  м/с, состояние устойчивости атмосферы близко к нейтральному. Анализ этих результатов показывает, что для рассмотренного простейшего случая все четыре методики имеют неплохую сходимость результатов, хотя определенные различия в значениях концентраций существуют. К сожалению, при усложнении метеорологических условий эти различия возрастают.

Фундаментальной трудностью оценки всех моделей атмосферной диффузии является отсутствие эталона для сравнения. Каждая модель, как правило, служит определенной цели, связанной с контекстом ее приложений. Поэтому она не может служить критерием для оценки других моделей. Вследствие этого практическая оценка модели сводится к сравнению наблюдаемых и расчетных значений концентраций.

Для корректного сопоставления результатов измерений и расчета полей концентрации по различным методикам необходимо выполнение ряда условий и наличие статистического ряда данных, полученного по результатам полностью контролируемого эксперимента.

В странах Западной Европы, в Англии и США вопросам моделирования и управления качеством воздуха уделяется большое внимание на общегосударственном уровне. В последние годы значительные усилия направлены на координацию действий различных групп ученых по оценке различных моделей атмосферной диффузии путем сравнения расчетных и экспериментальных данных. С этой целью проведен ряд международных семинаров (Крит, Греция, 1991; Мано, Швейцария, 1993) [187]. Характерной особенностью обсуждения докладов на этих семинарах является то обстоятельство, что исследовательские группы Дании, Франции, Германии, Голландии, Швеции, США и Англии предварительно располагали данными полевых наблюдений на трех полигонах (Kincaid, USA; Copenhagen, Denmark; Lillestrom, Norway). В результате участники имели общие исходные данные для сравнения результатов расчетов по собственным моделям. Много внимания при обсуждении уделялось математическому обеспечению расчетной части моделей.

В Бельгии для моделирования атмосферной диффузии различных химических загрязнителей использовалась так называемая IFDM модель. В математическом отношении она является гауссовой моделью, использующей схему классификации устойчивости атмосферы и дисперсионные параметры согласно Vultynck–Malet [165]. Основная формула для расчета почасовых концентраций от единич-

ного источника выбросов высотой  $H_0$  имеет вид

$$C(x, y, z) = \frac{M}{2\pi W(H)\sigma_y(x)\sigma_z(x)} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2(x)}\right) \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2(x)}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2(x)}\right] \right\}, \quad (5.146)$$

где  $M$  – средняя мощность источника выбросов;  $H = H_0 + \Delta H$ ;  $\sigma_y = Ax^a$ ;  $\sigma_z = Bx^b$ . Если примесь неконсервативная ( $\lambda \neq 0$ ), тяжелая ( $w_g \neq 0$ ) и имеют место осадки ( $\Lambda \neq 0$ ), то расчетная концентрация корректируется с помощью трех поправочных функций  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (см. (5.25)).

Для того, чтобы выполнить конкретные расчеты по этой модели, необходимо знать значения параметра  $\lambda$ , скорости гравитационного осаждения  $w_g$  и постоянную вымывания осадками  $\Lambda$ . В IFDM-модели используются измерения поля выпадений, которые затем используются для оценки  $w_g$  и  $\Lambda$  с помощью регрессионного анализа. На следующем этапе расчета производятся сравнение рассчитанных и измеренных выпадений с целью согласования и коррекции значений  $w_g$  и  $\Lambda$ .

В последние годы для моделей атмосферной диффузии характерно использование нетрадиционных метеорологических параметров, таких как масштаб высоты слоя перемешивания  $H_z$ , динамическая скорость  $v_*$ , масштаб длины Монина – Обухова  $L$  и масштаб вертикальной конвективной скорости  $w_*$ . Эти параметры, согласно теории Тейлора, определяют дисперсионные параметры примеси  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , входящие в расчетные формулы Гаусса. Предполагается, что применение этих параметров дает лучшие результаты, чем использование традиционной модели Гаусса в варианте Паскуилла – Гиффорда. Примером такой модели является модель STACKS, используемая в Голландии [174]. В своей основе модель является гауссовой, однако дисперсии примеси  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  в ней описываются такими функциями параметров турбулентности, как среднеквадратичные значения флуктуаций скорости ветра  $\sigma_v$ ,  $\sigma_w$  и Лагранжев временной масштаб  $T_L$ , т. е.

$$\sigma_{y,z}^2 = 2\sigma_{v,w}^2 T_{L,y,z}^2 [t/T_{L,y,z} - \exp(-t/T_{L,y,z}) + 1]. \quad (5.147)$$

Таким образом, прежде, чем использовать такую модель, необходимо иметь определенные метеорологические данные и выполнить их соответствующую обработку. Данная модель рекомендуется для высоких источников на расстояния около 40 км. Для вычисления роста

факела, в основном, используются рекомендации Бригса для устойчивых, нейтральных и неустойчивых условий. Для учета сложной структуры атмосферы она разбивается на слои толщиной 100 м, и расчеты ведутся для каждого слоя отдельно.

Другим примером является так называемая OML модель, применяемая в Дании для регулярных прикладных расчетов. OML модель является гауссовой моделью факела и рекомендуется для использования на расстояниях до 20 км от источника выброса. Она требует информации об источнике и метеорологию, основанную на почасовых измерениях, а выдает временные ряды концентрации, рассчитанные на заданное положение рецептора. OML модель описана в работах Г. Р. Олесена и др. (1988, 1991) [187].

Современные компьютерные системы по прогнозированию атмосферной диффузии загрязнений имеют модульную структуру, которая включает в себя блоки с данными об источниках выбросов, блок метеорологических данных, блок подготовки данных для проведения расчетов, основной расчетный блок и блок вывода и преобразования конечных результатов прогноза уровня концентраций. Примером такого подхода является компьютерная система ARIES (Atmospheric Release Impact Evaluation System), разработанная в Италии [172]. Существуют две версии этой системы – ARIES-1 и ARIES-W, каждая из которых имеет модульную структуру, поэтому новые модули легко могут заменять старые или дополнять их. Управление в системе осуществляется с помощью меню данных и вспомогательных функций.

Основным модулем в системе ARIES является модуль PAD, который преобразует метеорологические параметры в форму, пригодную для использования в модели. К параметрам относятся: категория устойчивости, высота слоя перемешивания, масштабы и параметры турбулентности, профиль скорости ветра, высота факела, каждый из которых может быть определен с помощью различных методов в зависимости от наличия первичных метеорологических измерений.

Модуль SPADE является гауссовой моделью дымового факела и предназначен для оценки уровня концентраций в воздухе и выпадений на ровную поверхность в локальных масштабах. Модуль ARCO является средством Лагранжева описания движения примеси. Используемая в нем модель предназначена для оценки концентраций и выпадений при сложных метеорологических условиях и сложной подстилающей поверхности. Она применяется в сочетании с трехмерным профилем ветра модели CONDOR [204].

CONDOR – диагностическая модель поля скорости ветра, в которой начальное “наблюдаемое поле” получено путем интерполяции существующих измерений скорости, удовлетворяющих уравнению ба-



ланса масс. Далее используется уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, чтобы рассчитать атмосферную устойчивость.

Влияние устойчивости связано с величиной параметра  $\alpha$ , который зависит от числа Струхала  $St = HN/W$ , где  $H$  – толщина характерного слоя,  $W$  – скорость ветра в нем и  $N$  – частота Брента – Вайсяля.

ARCO является Лагранжевой моделью движения частиц, которая включает возможность использования входных данных, переменных в пространстве и времени. Скорость движущейся частицы складывается из двух составляющих – адвекции, которая обеспечивается модулем CONDOR и турбулентной компоненты, которая рассчитывается с использованием уравнений Ланжевена [197]. Модель учитывает неоднородность турбулентности по вертикали и требует оценки вертикальных флуктуаций скорости ветра и Лагранжева интегрального временного масштаба  $T_L$ .

Модуль APOLLO служит для описания переноса частиц на большие расстояния и применяется для прогнозирования концентрации примеси в воздухе на расстояниях в тысячи километров от источника выброса. Модуль AMETISTA является моделью климатического качества воздуха. Он включает в себя три модуля: обработку почасовых метеорологических параметров, модель рассеивания, которая, в основном, базируется на HPDM модельных уравнениях Хана и Чанга [183], и статистическую обработку результатов расчета.

Общий недостаток рассматриваемых методик состоит в отсутствии стройной теории и большом числе неуниверсальных эмпирических зависимостей и констант, полученных в локальных климатических условиях проведения экспериментов различным способом и с помощью разного оборудования. Это, естественно, ограничивает возможности их использования для расчета процессов диффузии, происходящих в других условиях. Понимание этого недостатка стимулирует исследователей к разработке новых способов расчета атмосферной диффузии примесей.

## Глава 6

# СТРУЙНО-ДИФфуЗИОННАЯ МОДЕЛЬ РАССЕИВАНИЯ РАДИОАКТИВНЫХ ГАЗОАЭРОЗОЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ

### 6.1. Физические основы струйно-диффузионной модели

При рассмотрении проблемы атмосферной диффузии различных выбросов в локальном масштабе обращает на себя внимание то обстоятельство, что основная часть загрязняющих веществ поступает в атмосферу от одиночных непрерывных или залповых объемных источников, имеющих определенные геометрические размеры и конечную скорость выброса газовой смеси. Как правило, это трубы промышленных предприятий, тепловых и атомных электростанций, отопительных систем и других инженерных сооружений. Однако для простоты расчетов при изучении проблем загрязнения атмосферы эти источники рассматривались как точечные, хотя совершенно очевидно, что в подавляющем большинстве практических случаев они не являются таковыми. Такой упрощенный подход оказывается допустимым, если размеры источника малы по сравнению с размерами области диффузии, т. е. в тех случаях, когда интересуются значениями концентрации на больших расстояниях от источника. При использовании математической модели атмосферной диффузии, основанной на модели точечного источника, самостоятельный интерес и соответствующие трудности представляет вопрос об определении эффективной высоты начального подъема выбросов. Это понятие начального подъема дымового факела из труб промышленных предприятий было введено на ранней стадии развития теории данного вопроса. Необходимость выполнения инженерных расчетов привела к созданию простейших моделей этого сложного явления. В дальнейшем такой принципиальный подход долго сохранялся в инженерной практике расчетов и переносился на задачи, связанные с рассеиванием в атмосфере не только дымовых факелов, но и радиоактивных газоаэрозольных выбросов от АЭС. Такая упрощенная схема в свое время оказалась практически приемлемой потому, что в некоторых случаях она давала правдоподобные результаты и согласовывалась с данными измерений на местности. Однако, совершенно очевидно, что это соответствие достигалось, в основном, благодаря соответ-

ствующему подбору эмпирических параметров, входящих в расчетные формулы, которые, к сожалению, не являются универсальными.

Попытки учитывать конечные размеры источников предпринимались рядом исследователей. Многие авторы учет объемности источника проводили с помощью введения некоторого виртуального начала для фиктивного точечного источника, однако такая схема и надежное определение координат такого источника весьма проблематичны. При этом следует иметь в виду, что для наземных источников и малых времен диффузии решение уравнения турбулентной диффузии в принципе может дать правдоподобную аппроксимацию распределения примеси. Но для высотных источников и больших времен диффузии, когда метеорологические условия принципиально нестационарны, механизм рассеивания примеси очень сложный, и поэтому необходимы дополнительные гипотезы и новые более адекватные модели атмосферной диффузии примеси, более полно учитывающие эти факторы, включая термическую стратификацию атмосферы и спектральные характеристики турбулентности.

Современные представления о процессах турбулентного рассеивания промышленных выбросов в температурно-стратифицированной атмосфере и соответствующие успехи математического моделирования распространения плавучих турбулентных струй в поперечном потоке, наряду с наличием мощных средств вычислительной техники, позволяют отказаться от концепции точечного источника и решать эту задачу более корректно с учетом струйного участка и реальных геометрических и физических параметров источника выбросов на основе струйно-диффузионной модели, развиваемой в Институте гидромеханики НАН Украины [27, 30, 31].

Согласно струйно-диффузионной модели, методика расчета распространения радиоактивных газоаэрозольных выбросов в атмосфере основана на следующем физическом представлении механизма рассеивания. Пусть изолированная труба высотой  $H_0$  и диаметром в устье  $d_0 = 2r_0$  находится на сравнительно ровной поверхности в поле ветрового потока и выбрасывает газоаэрозольную смесь с заданным расходом  $Q_0$ , с температурой  $T_0$  и заданной начальной объемной концентрацией  $C_0$  или начальной активностью  $i$ -го радионуклида  $A_0^i$ . Обобщение на случай сложной орографии рассматривается отдельно. Движение воздуха в естественных условиях характеризуется большими числами Рейнольдса и обычно носит турбулентный характер.

Из физических представлений и анализа фотоснимков следует, что в ближней от источника области выбросы будут представлять собой турбулентную струю, распространяющуюся в сносящем ветровом потоке. Поэтому на этом участке рассеивание примеси (радиону-

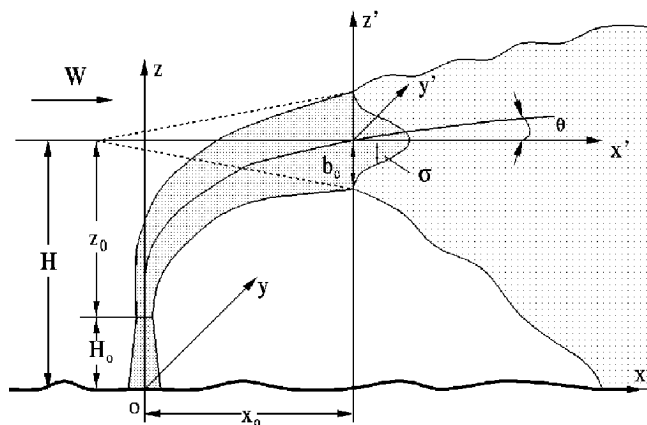


Рис. 6.1. Принципиальная схема струйно-диффузионной модели рассеивания радиоактивных выбросов в атмосфере

кливо) будет происходить по закону струйного смешения, и область радиоактивного загрязнения в ближней от источника области будет представлять собой некоторый изогнутый расходящийся в направлении ветра конус (рис. 6.1). По мере удаления от источника начальный импульс струи будет вырождаться. На определенном расстоянии от источника, когда средняя продольная составляющая скорости в струе сравняется со скоростью сносящего ветрового потока, струя будет вести себя как свободно-конвективная. На этой стадии струйный выброс становится факелом. При этом примесь (радионуклиды) по-прежнему будет переноситься сносящим ветровым потоком, а конус будет деформироваться и увеличивать свои поперечные размеры благодаря механизму турбулентной диффузии и крупномасштабным флуктуациям направления ветра.

В соответствии с такой струйно-диффузионной моделью распространения газоаэрозольных радиоактивных выбросов в атмосфере для расчета поля концентрации или объемной активности в воздухе необходимо сначала решать струйную задачу о вертикальном истечении подогретой газоаэрозольной смеси из круглой трубы в сносящий ветровой поток, и расчет вести до того сечения, в котором скорость струи приблизится к скорости сносящего ветрового потока с наперед заданной степенью точности. Это же сечение служит началом рассмотрения диффузионной трехмерной задачи с выполнением условий сопряжения в указанном переходном сечении. Из схемати-

ческого изображения струйно-диффузионной модели и системы координат (см. рис. 6.1) видно, что после струйного участка на определенном расстоянии от трубы конусообразный шлейф по мере своего расширения соприкасается с граничной поверхностью (землей или водой). Начиная с этой точки у поверхности начинают накапливаться загрязняющие вещества, а до нее вдоль оси  $x$ , совпадающей с направлением ветра, на уровне земли концентрации будут нулевые. Из-за наличия разности плотностей в струе и окружающем воздухе примесь может иметь вертикальную скорость гравитационного осаждения  $w_g$ . Более подробно характер распределения примеси на струйном и диффузионном участках будет рассматриваться отдельно. Сейчас же подчеркнем, что на практике многие источники промышленных выбросов являются одновременно и источниками теплоты. То есть наряду с начальным импульсом выбрасываемая смесь обладает еще и плавучестью вследствие перегрева относительно атмосферного воздуха. В этих случаях имеют место архимедовы силы плавучести, которые вызывают дополнительный подъем или опускание выбросов в зависимости от знака плавучести и состояния атмосферы.

Математическая формулировка и решение такой струйной задачи представляет собой сложную самостоятельную проблему и рассматривается отдельно. Однако ее решение на данном этапе развития теории турбулентных струй не представляет принципиальных трудностей. Разработанная нами модель турбулентной струи в сносящем боковом потоке [22, 27] и реализованный численный алгоритм позволяют рассчитывать интересующие нас параметры плавучей струи, необходимые для решения задачи рассеивания примеси на диффузионном участке. К этим параметрам относятся, прежде всего, вертикальная  $z_0$  и горизонтальная  $x_0$  координаты оси струи в конце струйного участка, эффективный радиус струи  $b_c$  и значение осевой концентрации  $C_{m0}$  в этом сечении. Задача о струйном участке применительно к струйно-диффузионной модели рассеивания примеси может быть решена один только раз при соответствующем варьировании определяющих безразмерных параметров. Результаты численного исследования интересующих нас параметров струи могут быть систематизированы в виде таблиц и представлены в форме соответствующих графиков. Пример таких результатов для неплавучей струи ( $Ri_0 = 0$ ) представлен в табл. 6.1. В случае, когда силы плавучести отсутствуют или малы, этими данными можно воспользоваться при расчете полей концентрации по струйно-диффузионной модели. Это дает возможность не обращаться каждый раз к решению задачи для струйного участка. Теория и полное решение задачи о плавучей струе в поперечном потоке подробно рассматривается в

Табл. 6.1. Значения основных параметров струи  
в зависимости от параметра сносящего потока ( $u$ ) при  $Re_0 = 0$

$u = W/v_0$	$Z_0 = z_0/r_0$	$X_0 = x_0/r_0$	$B_c = b_c/r_0$	$\tilde{C}_{m0} = C_{m0}/C_0$
0.05	70.0	120.0	70.0	0.008
0.1	51.0	107.0	53.7	0.019
0.25	30.0	75.0	25.0	0.030
0.3	21.4	68.0	21.7	0.034
0.5	14.5	58.0	15.5	0.043
0.7	11.0	52.5	13.1	0.051
0.9	9.3	48.8	12.6	0.057
1.3	9.0	48.0	12.2	0.062
1.6	8.7	46.0	12.0	0.068
2.5	8.5	45.0	10.0	0.070
3.5	8.2	44.0	9.0	0.090
4.5	8.0	43.0	8.0	0.120
6.5	7.0	42.0	7.0	0.140
8.0	6.0	40.0	6.0	0.160

главах 7 и 8.

Основой решения задачи рассеивания примеси на диффузионном участке служит трехмерное уравнение турбулентной диффузии. Его решение при соответствующих начально-краевых условиях тоже представляет собой большую самостоятельную задачу и рассматривается отдельно ниже.

## 6.2. Моделирование рассеивания выбросов примеси на диффузионном участке

Поведение примеси в атмосфере на диффузионном участке зависит от многих факторов. Среди них в общем случае можно выделить гидродинамические (перенос ветровым потоком, турбулентная диффузия, гравитационное оседание или всплытие, состояние атмосферы) и физико-химические (радиоактивный распад, абсорбция, коагуляция, переход в другое агрегатное состояние). Последняя группа факторов обычно учитывается с помощью наличия в уравнении диффузии соответствующих источниковых членов. Пусть  $C(x, y, z)$  – осредненное значение концентрации рассматриваемой примеси или объемной активности, поступившее от источника в атмосферу, которая мигрирует вместе со сносящим турбулентным потоком вдоль оси  $x$ . Пусть начало неподвижной системы декартовых координат

Табл. 6.2. Типичные значения параметра вымывания  $R$  и скорости осаждения  $w_g$

Компоненты выброса	$R$ , час/(мм·с)	$w_g$ , м/с
Элементарный йод	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$
Органические соединения йода	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
Аэрозоли	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$

находится в центре основания трубы, ось  $z$  направлена вертикально вверх, ось  $y$  – горизонтально, а ось  $x$  – направлена вдоль направления ветра (см. рис. 6.1). Тогда процесс изменения концентрации рассматриваемой субстанции в общем случае, как было показано выше, описывается следующим трехмерным уравнением конвективной турбулентной диффузии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \\ = D \nabla^2 C - \frac{\partial \overline{u' C'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v' C'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} - (\lambda + \Lambda) C, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $C'$  – пульсация субстанции;  $u, v, w$  и  $u', v', w'$  – компоненты осредненной и пульсационной скорости воздушного потока;  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии;  $\lambda = 0.693/T_{1/2}$  – постоянная радиоактивного распада;  $\Lambda = \mathcal{I}R$  – постоянная вымывания примеси осадками;  $T_{1/2}$  – период полураспада рассматриваемого нуклида;  $\mathcal{I}$  – интенсивность осадков;  $R$  – эмпирический параметр вымывания примеси, значение которого приведено в табл. 6.2. Поскольку поведение полей скорости, температуры и концентрации в атмосфере носит турбулентный характер, то естественно, что уравнение (6.1) содержит вторые корреляционные моменты  $\overline{v'_k C'}$ , которые учитывают случайный характер движения диффундирующих “жидких” молей.

В полуэмпирической теории турбулентности эти вторые корреляционные моменты, характеризующие турбулентный перенос примеси пульсациями скорости, традиционно выражают с помощью градиентной модели турбулентности Фика через коэффициент турбулентной диффузии  $k_i$  и градиент средней концентрации:

$$\overline{v'_k C'} = k_i \frac{\partial C}{\partial x_i}. \quad (6.2)$$

Тогда уравнение конвективной турбулентной диффузии для рассматриваемой скалярной субстанции (концентрация, объемная актив-

ность) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \\ & = D\nabla^2 C + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - (\lambda + \Lambda)C, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ , – продольный, горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии соответственно. Первое слагаемое в правой части уравнения (6.3) учитывает молекулярный перенос, однако, ввиду его малости по сравнению с турбулентным переносом, в практических расчетах им обычно пренебрегают. Общее уравнение (6.3) показывает, что распространение радиоактивных загрязнений в виде концентрации или объемной активности тех или иных веществ осуществляется за счет конвективного их переноса сносимым потоком и диффузии, обусловленной турбулентными флуктуациями. Решение уравнения (6.3) в общем случае очень сложно. Большие затруднения возникают из-за необходимости знания трехмерной структуры поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии. В принципе, если известны поле скоростей  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и коэффициенты диффузии  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ , то уравнение (6.3) можно решить численно при заданных начально-краевых условиях и найти пространственное и временное распределение концентрации. Однако в реальных условиях трудно найти поле скоростей и еще труднее определить коэффициенты диффузии. В отдельных случаях скорости ветрового потока могут быть получены либо по данным наблюдений, либо по результатам гидродинамического расчета, но определение коэффициентов диффузии до сих пор является очень сложной и до конца не решенной задачей, особенно в случае атмосферы, для которой характерна многомасштабность движений и неровность рельефа земной поверхности. Поэтому в практических расчетах часто используются различного рода приближенные подходы.

В условиях нормальной эксплуатации процесс выброса и распространения примеси из труб промышленных предприятий можно рассматривать как установившийся. В третьей главе уже рассматривались задачи об установившейся диффузии примеси от непрерывных точечных источников в полуограниченной движущейся среде в предположении, что молекулярной и продольной диффузией можно пренебречь, примесь пассивна, а скорость ветра и коэффициенты диффузии постоянны. Если принять эти же допущения, но дополнительно учесть вертикальную составляющую скорости гравитационной природы, неконсервативность примеси (радиоактивный распад) и учесть



влияние осадков, то задача о рассеивании примеси на диффузионном участке сводится к решению следующего дифференциального уравнения диффузии:

$$W \frac{\partial C}{\partial x} + w_g \frac{\partial C}{\partial z} = k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - (\lambda + \Lambda)C, \quad (6.4)$$

где скорость ветрового потока  $W$ , скорость гравитационного “оседания”  $w_g$  и коэффициенты  $k_y$ ,  $k_z$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda$  – постоянны. В общем случае для скорости гравитационного оседания примеси  $w_g$  выделяют три случая:

- примесь пассивная (неоседающая,  $w_g = 0$ );
- примесь тяжелая (оседающая,  $w_g < 0$ );
- примесь легкая (всплывающая,  $w_g > 0$ ).

Последний случай имеет место, например, когда температура выбрасываемой газоаэрозольной смеси выше, чем температура окружающей среды. Наряду со скоростью гравитационного осаждения  $w_g$  сплошной среды с примесью следует отдельно рассматривать скорость выпадения примеси  $w_{ef}$  на поверхность земли, которая фактически характеризует взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью и представляет собой сумму скорости гравитационного осаждения  $w_g$  и скорости потока примеси, обусловленного турбулентностью, т. е.

$$w_{ef} = w_g + k \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Совершенно очевидно, что если турбулентный поток примеси на поверхность  $z = 0$  равен нулю, то  $w_{ef} = w_g$ . Типичные значения скорости осаждения  $w_g$  приведены в табл. 6.2.

Для того, чтобы получить единственное решение уравнения (6.4), необходимо присоединить еще начально-краевые условия. В рассматриваемом случае струйно-диффузионной модели источник выбросов является объемным и находится в полуограниченной области. Координаты начала диффузионного участка  $(x_0, 0, H)$  считаются известными на основе решения струйной задачи, где  $H = H_0 + z_0$ . Вдали от поверхности земли и при удалении от точки  $(x_0, 0, H)$  принимается естественное условие уменьшения концентрации (объемной активности) до нуля (фона), т. е.

$$C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (6.5)$$

Граничное условие на твердой стенке в общем случае записывается в виде

$$k_z \frac{\partial C}{\partial z} = \beta C \quad \text{при } z = 0, \quad (6.6)$$

где  $\beta$  – параметр взаимодействия примеси с поверхностью, имеющий размерность скорости. В случае непрониновения через поверхность или полного отражения примеси  $\beta = 0$  и условие (6.6) принимает вид

$$k_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (6.7)$$

Начальное условие в рассматриваемом случае в соответствии с физической постановкой задачи состоит в задании начального распределения примеси в сечении  $x = x_0$  в виде характерного для струи профиля. При решении струйной задачи использовался полиномиальный профиль вида [27]

$$\frac{C}{C_m} = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} = f(r) = 1 - 6 \left( \frac{r}{b_c} \right)^2 + 8 \left( \frac{r}{b_c} \right)^3 - 3 \left( \frac{r}{b_c} \right)^4, \quad (6.8)$$

где  $b_c$  – радиус струи (по концентрации) в конце струйного участка;  $r$  – расстояние от оси струи. Однако при расчете рассеивания примеси на диффузионном участке, удобней профиль распределения примеси в конце струйного участка аппроксимировать в виде экспоненты с параметром распределения  $\sigma_0$  в виде

$$C(x_0, y, z) = C_{m0} \varphi(r) = C_{m0} \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma_0^2} \right), \quad (6.9)$$

где  $C_{m0}$  – значение концентрации или объемной активности в точке  $(x_0, 0, H)$ . Значение параметра  $\sigma_0$  определим, исходя из условия сохранения расхода примеси через поперечное сечение струи при  $x = x_0$ , т. е.

$$\int_0^{b_c} f(r) r dr = \int_0^{b_c} \varphi(r) r dr.$$

Подставляя сюда значения функций

$$f(r) = 1 - 6 \left( \frac{r}{b_c} \right)^2 + 8 \left( \frac{r}{b_c} \right)^3 - 3 \left( \frac{r}{b_c} \right)^4$$

и

$$\varphi(r) = \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma_0^2} \right),$$

где  $r^2 = y^2 + z^2$ , и проводя элементарные вычисления, находим

$$0.1b_c^2 = \sigma_0^2 (1 - \exp(-b_c^2/2\sigma_0^2)). \quad (6.10)$$

Для удобства введем новую переменную  $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0/b_c$ . Тогда условие сохранения расхода примет вид

$$\tilde{\sigma}_0^2 (1 - \exp(-1/2\tilde{\sigma}_0^2)) = 0.1.$$

Численное решение этого трансцендентного уравнения дает  $\tilde{\sigma}_0 = 0.316$  и, следовательно,

$$\sigma_0 = 0.316b_c. \quad (6.11)$$

Для того, чтобы сохранить преемственность расчетных формул, полученных для точечных источников в форме Гаусса, когда характеристикой выбросов служит не начальная объемная активность или концентрация, а мощность источника  $M$ , воспользуемся следующими соотношениями. Очевидно, что мощность выброса из вентиляционной трубы  $M$  равна произведению расхода газовой смеси на начальную концентрацию (активность)  $C_0$ :

$$M = \pi r_0^2 v_0 C_0, \quad (6.12)$$

где  $r_0$  – радиус устья трубы;  $v_0$  – начальная скорость выброса. В то же время, из решения струйной задачи в сечении  $x = x_0$  нам известно отношение осевого значения концентрации или объемной активности  $C_{m0}$  к начальной  $C_0$  в форме

$$\frac{C_{m0}}{C_0} = \tilde{C}_{m0}, \quad (6.13)$$

где  $\tilde{C}_{m0}$  – конкретное число ( $\tilde{C}_{m0} = 0.01 \div 0.1$ ), характеризующее процесс смешения примеси с атмосферным воздухом на струйном участке. Отсюда, с использованием формулы (6.12), получаем

$$C_{m0} = \tilde{C}_{m0} C_0 = \tilde{C}_{m0} \frac{M}{\pi r_0^2 v_0}. \quad (6.14)$$

Привлекая далее интегральное условие сохранения расхода газовой смеси в начале и конце струйного участка, имеем

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi b_c^2 W.$$

Тогда соотношение (6.14) можно переписать в виде

$$C_{m0}(x_0, 0, H) = \tilde{C}_{m0} \frac{M}{\pi b_c^2 W} = \frac{0.1 \tilde{C}_{m0} M}{\pi \sigma_0^2 W}. \quad (6.15)$$

Подставляя это значение  $C_{m0}$  в выражение (6.9) для начального распределения примеси на диффузионном участке, находим

$$C(x_0, y, z) = C_{m0}\varphi(y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M}{\pi\sigma_0^2W} \exp\left[-\frac{y^2 + (z - H)^2}{2\sigma_0^2}\right]. \quad (6.16)$$

Из выражения (6.16) следует, что объемную концентрацию или активность рассматриваемого радионуклида в сечении  $x = x_0$  можно представить в виде

$$C(x_0, y, z) = M\tilde{G}^c, \quad (6.17)$$

где  $\tilde{G}^c$  – функция рассеивания примеси в конце струйного участка,

$$\tilde{G}^c = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}}{\pi\sigma_0^2W} \exp\left[-\frac{y^2 + (z - H)^2}{2\sigma_0^2}\right]. \quad (6.18)$$

При этом параметр  $\tilde{C}_{m0}$  зависит от начальных условий выброса в устье трубы и от параметра сносящего потока  $u = W/v_0$ .

Итак, после того, как определены начальное (6.16) и краевые условия (6.5) – (6.7) для уравнения конвективной турбулентной диффузии (6.4), можно приступить к решению задачи о распределении концентрации неконсервативной оседающей примеси на диффузионном участке из распределенного источника в полуограниченной области ( $z > 0$ ), находящегося на высоте  $H = H_0 + z_0$  от границы области  $z = 0$  и на удалении  $x_0$  от трубы в направлении ветра. Учитывая сложность задачи, будем решать ее в два этапа.

### 6.3. Решение диффузионной задачи для распределенного источника

Рассмотрим сначала частный случай, когда ограничивающая поверхность ровная, а примесь пассивная ( $w_g = 0$ ), консервативная ( $\lambda = 0$ ), осадки отсутствуют ( $\Lambda = 0$ ) и начальное распределение примеси задано в виде (6.16). Тогда исходное уравнение турбулентной диффузии при постоянных скорости ветра  $W$  и коэффициентах диффузии  $k_y, k_z$  принимает следующий вид:

$$W\frac{\partial C}{\partial x} = k_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (6.19)$$

Общее фундаментальное решение уравнения (6.19) при анизотропной диффузии ( $k_y \neq k_z$ ) с начальным условием (6.16) и граничным условием (6.5) было получено выше и имеет следующий аналитический

вид [136, 140]:

$$C(x, y, z) = \frac{1}{4\pi(x-x_0)\sqrt{k_y k_z}/W} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4k_y x/W} - \frac{(z-\zeta)^2}{4k_z x/W}\right] \varphi(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6.20)$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  соответствующие координаты источника;  $\varphi(\eta, \zeta)$  – начальное распределение примеси. Подставив в выражение (6.20) значение функции  $\varphi(\eta, \zeta)$  в виде (6.16) и выполнив соответствующее интегрирование, будем иметь

$$C(x, y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M}{\pi W \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_y(x-x_0)}/W \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)}/W} \times \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_y(x-x_0)/W)} - \frac{(z-H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)/W)}\right]. \quad (6.21)$$

Поскольку источник находится в полуограниченной области, то полученное решение должно еще удовлетворять граничному условию (6.7) при  $z = 0$ . Выше этот вопрос уже рассматривался. Опираясь на те результаты, можно показать, что при граничном условии (6.7) интересующее нас решение запишется в виде

$$C(x, y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M [1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_y(x-x_0)}/W \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)}/W} \times \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_y(x-x_0)/W)}\right] \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)/W)}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)/W)}\right] \right\}. \quad (6.22)$$

Совершенно очевидно, что для расчета поля приземных концентраций над ровной поверхностью по этой формуле при  $x > x_0$  достаточно в выражении (6.22) положить  $z = 0$ . Учитывая трудности определения численных значений коэффициентов диффузии  $k_y$ ,  $k_z$ , воспользуемся результатами теории Тейлора [148, 223], согласно которой коэффициенты диффузии  $k_i$  при определенных условиях связаны

с дисперсией примеси соотношением

$$\frac{d\sigma_i^2}{dt} = 2k_i.$$

Если  $k_i$  не меняется во времени, то

$$\sigma_i^2 = 2k_i t = 2k_i x / W, \quad t = \frac{x}{W}. \quad (6.23)$$

Учитывая это соотношение, перейдем в формуле (6.22) от коэффициентов диффузии  $k_y$  и  $k_z$  к дисперсиям  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , обобщенным на случай распределенного источника в форме

$$\sigma_y^2 = \sigma_0^2 + 2k_y(x - x_0)/W, \quad \sigma_z^2 = \sigma_0^2 + 2k_z(x - x_0)/W, \quad (6.24)$$

где  $\sigma_0$  – начальное значение дисперсии примеси в точке  $x = x_0$ . Тогда, подставив выражения (6.24) в (6.22), получим следующий гауссов вид формулы для распределения концентрации на диффузионном участке в трехмерном случае:

$$C(x, y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[-\frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\}, \quad (6.25)$$

где параметры дисперсии примеси  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  определены соотношением (6.24). Нетрудно заметить, что в случае точечного источника параметр  $\sigma_0 = 0$  и выражения для дисперсий и концентрации принимают хорошо известный вид. Для оценки значений коэффициентов турбулентной диффузии, входящих в выражение (6.24), воспользуемся аналогией Рейнольдса, согласно которой

$$k_z = \nu_t / Sc,$$

где  $Sc$  – турбулентное число Шмидта, равное  $Sc \approx 0.75$ . Тогда, используя вторую гипотезу Прандтля для турбулентной вязкости  $\nu_t$  в виде

$$\nu_t = \alpha_1 L(u_1 - u_2) = \alpha_1 HW, \quad (6.26)$$

где  $\alpha_1$  – эмпирическая постоянная, для круглой струи равная  $\alpha_1 = 0.0076$ , для коэффициента диффузии имеем

$$k_z = \frac{\alpha_1}{Sc} HW. \quad (6.27)$$

Подставив формулу (6.27) в (6.24), для вертикальной дисперсии найдем

$$\sigma_z^2 = \sigma_0^2 + \frac{2\alpha_1}{Sc} H(x - x_0) \approx \sigma_0^2 + 0.02H(x - x_0).$$

Если необходимо учесть уровень фоновой атмосферной турбулентности, то следует положить, что  $\alpha_1 = 0.0076(1 + bk_\Phi)$  и тогда при  $b = 0.03$  получим

$$\sigma_z^2 = \sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0), \quad (6.28)$$

где  $k_\Phi$  – уровень фоновой турбулентности в атмосфере в %;  $b$  – эмпирический коэффициент. Заметим, что уровень турбулентности в атмосфере, кроме ее вертикального градиента температуры, определяется также величиной скорости ветра и рельефом поверхности земли вследствие работы сил трения при взаимодействии движущегося воздушного потока с неровностями поверхности земли.

Таким образом, выражение (6.25) представляет собой точное аналитическое решение рассматриваемой модельной задачи. В случае однородной по температуре атмосферы мелкомасштабная турбулентность изотропна и, следовательно,  $\sigma_z = \sigma_y$ . Поэтому для горизонтальной дисперсии можно также записать

$$\sigma_y^2 = \sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0).$$

В более общем случае следует учитывать влияние стратификации атмосферы на процессы турбулентного переноса и тогда дисперсии должны дополнительно зависеть от параметра устойчивости атмосферы, что будет учтено ниже.

#### 6.4. Расчет поля концентрации радиоактивной оседающей примеси при наличии осадков

Вернемся теперь к первоначальной задаче, т.е. к решению полного уравнения диффузии (6.4) с начально-краевыми условиями (6.5), (6.7), (6.16). Аналитическое решение этого трехмерного параболического уравнения может быть найдено по аналогии с выше-рассмотренной задачей. Пока предположим, что мелкомасштабная диффузия изотропна, то есть коэффициенты диффузии в горизонтальном и вертикальном направлениях равны  $k_y = k_z = k$ . Тогда исходное уравнение диффузии примет следующий вид:

$$W \frac{\partial C}{\partial x} + w_g \frac{\partial C}{\partial z} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - (\lambda + \Lambda)C. \quad (6.29)$$

Введем для удобства в рассмотрение новую переменную  $t = x/W$ . Тогда  $W\partial/\partial x = \partial/\partial t$ . Учитывая это и опираясь на вид решения (6.20), полученного для пассивной и консервативной ( $w_g = \lambda = \Lambda = 0$ ) смеси, ищем решение уравнения (6.29) в виде

$$C = \frac{A}{2\pi k} t^{-\alpha} \exp[-ak^{-1}t^{-1}y^2 - bk^{-1}t^{-1}(z + w_g t)^2 - (\lambda + \Lambda)t], \quad (6.30)$$

где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  – постоянные, которые будем определять из условия удовлетворения этого решения уравнению (6.29) и начальному условию (6.16). Продифференцировав выражение (6.30) по  $t$ ,  $y$ ,  $z$ , вычислим интересующие нас производные  $\partial C/\partial t$ ,  $\partial C/\partial z$ ,  $\partial^2 C/\partial y^2$ ,  $\partial^2 C/\partial z^2$ . Подставив их значения в уравнение (6.29) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $t$ ,  $y$ ,  $z$  в левой и правой части, найдем, что левая часть уравнения (6.29) равняется правой только при следующих значениях констант:

$$\alpha = 1, \quad a = 1/4, \quad b = 1/4. \quad (6.31)$$

Подставив эти значения  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  в (6.30) и возвратившись к переменной  $x$ , для искомого решения уравнения (6.29) получим

$$C(x, y, z) = \frac{A}{2\pi k x/W} \exp\left[-\frac{y^2}{4kx/W}\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{\left(z + \frac{w_g x}{W}\right)^2}{4kx/W}\right] \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{x}{W}\right]. \quad (6.32)$$

Если теперь отказаться от предположения об изотропии, т.е. рассмотреть уравнение диффузии в виде ( $k_y \neq k_z$ )

$$W\frac{\partial C}{\partial x} + w_g\frac{\partial C}{\partial z} = k_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - (\lambda + \Lambda)C, \quad (6.33)$$

то простым дифференцированием можно убедиться в том, что решением этого уравнения служит следующее, аналогичное (6.32), выражение:

$$C(x, y, z) = \frac{A}{2\pi\sqrt{k_y k_z} x/W} \exp\left[-\frac{y^2}{4k_y x/W}\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{\left(z + \frac{w_g x}{W}\right)^2}{4k_z x/W}\right] \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{x}{W}\right].$$



Таким образом, решение уравнения (6.33) с заданным начальным распределением концентрации в сечении  $x = x_0$  в форме  $C(x_0, y, z) = C_{m0}\varphi(y, z)$  записывается подобно (6.20) в виде

$$C(x, y, z) = \frac{C_{m0} \exp[-(\lambda + \Lambda)x/W]}{4\pi\sqrt{k_y k_z}x/W} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{4k_y x/W}\right] \exp\left[-\frac{\left(z + \frac{w_g}{W}x\right)^2}{4k_z x/W}\right] \varphi(y, z) dy dz, \quad (6.34)$$

Учитывая, что начало координат диффузионного участка находится в точке  $(x_0, 0, H)$  и начальное распределение примеси при  $x = x_0$  имеет форму Гаусса (6.16) с параметром  $\sigma_0$ , выражение (6.34) для объемной активности или концентрации после удовлетворения начальному условию и выполнения операции интегрирования, подобно выражению (6.21), преобразуется к виду

$$C(x, y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M}{\pi W \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_y(x-x_0)/W} \sqrt{\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)/W}} \times \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_0^2 + 2k_y(x-x_0)/W)}\right] \exp\left\{-\frac{\left[z - H + \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2[\sigma_0^2 + 2k_z(x-x_0)/W]}\right\} \times \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{(x-x_0)}{W}\right]. \quad (6.35)$$

Если теперь в выражении (6.35) перейти от коэффициентов диффузии  $k_y, k_z$  к дисперсиям  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  с помощью соотношений (6.24), то окончательное выражение для объемной активности или концентрации рассматриваемой субстанции, удовлетворяющее уравнению (6.33) и начально-краевым условиям (6.5) и (6.16), принимает вид

$$C(x, y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M}{\pi W \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \times \exp\left[-\frac{\left[z - H + \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{(x-x_0)}{W}\right], \quad (6.36)$$

где дисперсии  $\sigma_y, \sigma_z$  учитывают пока лишь процессы смешения на струйном участке и процесс смешения примеси на диффузионном

участке вследствие мелкомасштабной турбулентности. Естественно, что влияние крупномасштабной турбулентности на процесс рассеивания примеси в атмосфере, например в виде угловых флуктуаций направления скорости ветра, необходимо рассматривать дополнительно.

Поскольку процесс диффузии выбросов происходит в полуограниченной области, то решение (6.36) должно еще удовлетворять граничному условию на поверхности  $z = 0$ . В случае граничного условия (6.7), выражающего условие непроникания или отражения примеси от граничной поверхности, интересующее нас решение, подобно (6.25), записывается в виде

$$\begin{aligned}
 C(x, y, z) = & \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W\sigma_y\sigma_z} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \times \\
 & \times \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{(x-x_0)}{W}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{\left[z-H + \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] + \right. \\
 & \left. + \exp\left[-\frac{\left[z+H - \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\}. \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что по форме это выражение идентично известной гауссовой модели, а по содержанию несколько глубже, так как в явном виде учитывает смешение на струйном участке через параметр  $\tilde{C}_{m0}$ , а дисперсии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  учитывают начальное распределение примеси на диффузионном участке через параметр  $\sigma_0$ . Кроме того, формула (6.37) учитывает наличие вертикальной скорости гравитационного “осаждения” примеси  $w_g$  в явном виде, а также неконсервативность примеси и эффекты вымывания через параметры  $\lambda$  и  $\Lambda$  соответственно. Здесь следует подчеркнуть математическую строгость получения решения (6.37), конечно при соответствующих допущениях. Отдельно следует отметить, что в данном случае дисперсии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  – известные величины, определяемые формулами (6.28).

Несмотря на то, что аналитическое решение (6.37) получено в предположении постоянства скоростей  $W$ ,  $w_g$  и коэффициентов диффузии  $k_y$ ,  $k_z$  и потому, казалось бы, должно рассматриваться лишь как первое приближение к описанию реальной атмосферной диффузии от объемного источника, тем не менее, подобно гауссовой модели, формула (6.37) для распределения концентрации на диффузионном участке, может быть принята в качестве основополагающей

в различных прикладных расчетах при непрерывном кратковременном выбросе, в течение которого ветер имеет постоянную скорость и направление. Попытки улучшения согласования результатов измерений и расчета по этой и подобным формулам с помощью традиционного использования различных дополнительных вариантов определения эффективных значений дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  представляются мало обоснованными, так как причина расхождения расчетов и наблюдений состоит в том, что при реальном времени как процесса диффузии, так и времени отбора проб при измерениях концентрации, направление ветра не остается постоянным, а изменяется случайным образом в силу турбулентного характера ветрового потока, содержащего не только мелкие, но и крупномасштабные вихри. Причем это изменение направления ветра при небольших временах диффузии может колебаться возле некоторого среднего направления, а в общем случае может меняться по всей круговой розе ветров. Оба эти характерные случаи должны учитываться моделью рассеивания радиоактивных выбросов в атмосфере, что и будет сделано ниже.

### 6.5. Учет крупномасштабных угловых флуктуаций направления ветрового потока

Выше уже отмечалось, что движение атмосферного воздуха характеризуется широким спектром турбулентных масштабов и частот. При выполнении операции осреднения по Рейнольдсу в уравнении турбулентной диффузии вторые корреляционные моменты фактически учитывают лишь влияние вихрей малых размеров, а потому фигурирующие в уравнении турбулентной диффузии коэффициенты  $k_y$  и  $k_z$  характерны для небольшого интервала времени осреднения  $\tau$ , исчисляемого практически несколькими минутами. Следовательно, и концентрация, вычисленная как решение уравнения диффузии, должна давать среднее значение за интервал  $\tau$ . При произвольном же отрезке времени процесс распространения примеси в движущейся турбулентной среде должен рассматриваться с учетом не только мелкомасштабных процессов диффузии, но и крупномасштабного конвективного процесса переноса рассматриваемой скалярной субстанции. Учет этих эффектов может быть осуществлен при выборе способа определения средних и временного масштаба рассматриваемого процесса диффузии.

В рамках первого этапа струйно-диффузионной модели рассеивания примеси учитывалось пока лишь мелкомасштабное турбулентное смещение на струйном и диффузионном участках. Согласно этой модели при удалении от источника вдоль оси струи и затем вдоль оси

факела (см. рис. 6.1) наблюдается равномерное размывание примеси в боковые стороны с образованием некоторого расходящегося конуса с переменной по его поперечному сечению концентрацией. Характер и интенсивность этого размывания определяется мелкомасштабными вихрями и соответствующими корреляциями турбулентных пульсаций скорости ветра и концентрации. В результате действия мелкомасштабной турбулентности происходит монотонное увеличение поперечных размеров струи. Наряду с этим наличие в атмосфере крупномасштабных вихрей приводит к меандрированию струи, т. е. к длинноволновой осцилляции ее оси сравнительно случайным образом (см. рис. 4.2).

Влияние низкочастотных угловых флуктуаций направления скорости ветра  $\sigma_{\theta y}$  и  $\sigma_{\theta z}$  на значения стандартных дисперсий было предсказано еще теорией Тейлора, а позднее рассматривалось в работах Паскуилла [209] и М. Е. Берлянда [15].

Определение зависимости стандартных дисперсий от величины угловых флуктуаций направления скорости ветра экспериментальным путем является достаточно сложной задачей. Согласно работе [217] эта связь получена в виде следующих соотношений для случая устойчивой и неустойчивой атмосферы соответственно:

$$\sigma_{y,z} = 0.15\sigma_{\theta y}x^{0.71}, \quad \sigma_{y,z} = 0.045\sigma_{\theta y}x^{0.71},$$

где  $\sigma_{\theta y}$  – в градусах, а  $x$  – в метрах. Трудности измерения вертикальных флуктуаций  $\sigma_{\theta z}$  приводят к тому, что обычно измеряются только горизонтальные флуктуации  $\sigma_{\theta y}$  и, следовательно, связь дисперсий примеси с классами устойчивости атмосферы определяется только через  $\sigma_{\theta y}$ .

Для учета влияния на процесс рассеивания примеси крупномасштабных флуктуаций направления ветра, приводящих к меандрированию факела в горизонтальном и вертикальном направлении около его среднего направления за период  $T > \tau$ , возможны два альтернативных подхода. Первый из них очень приближенный, однако в практических расчетах по гауссовой модели все же используется. Он связан с подбором некоторых эффективных значений коэффициентов диффузии  $k_y, k_z$  или дисперсий  $\sigma_y, \sigma_z$ , средних за рассматриваемый временной интервал, приводящих к согласованию расчетов, например, с полевыми наблюдениями. Однако при этом вопрос о том, как выбрать численные значения этих средних величин  $\sigma_y, \sigma_z$ , если нет данных измерений концентрации примеси, остается открытым. Другой, более строгий путь расчета осредненных значений концентрации, учитывающий крупномасштабные флуктуации направления ветра, связан со статистическим осреднением концентраций за период

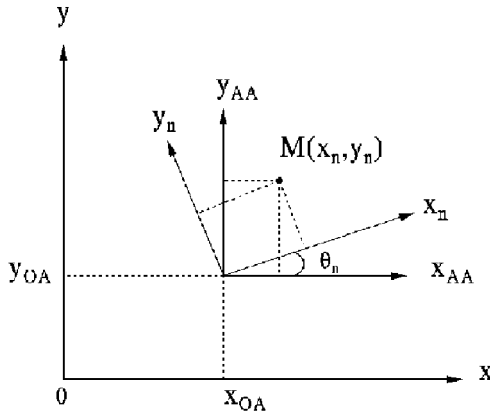


Рис. 6.2. Схема расположения источника выбросов в неподвижной и подвижной системах координат

$T$  по ансамблю реализаций за период  $\tau$ . В этом случае, как обычно, будем полагать, что на отрезке времени  $T$  колебания направления ветра происходят случайным образом и тогда можно воспользоваться известными положениями теории вероятностей. Обозначим полярный угол в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ , характеризующий направление ветра через  $\theta$ , как показано на рис. 6.2. Тогда среднее значение концентрации  $C_T$  за период  $T$  для ветра, направленного вдоль оси  $x$  с учетом крупномасштабных периодических флуктуаций ветра в азимутальном направлении определится известным соотношением

$$C_T = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C_\tau(\theta) f(\theta) d\theta, \quad (6.38)$$

где  $C_\tau(\theta)$  – среднее значение концентраций за период  $\tau$ , определяемое формулой (6.37);  $f(\theta)$  – функция распределения случайных колебаний направления ветра. Из натуральных наблюдений известно, что функция распределения  $f(\theta)$  достаточно хорошо аппроксимируется функцией Гаусса

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta y}} \exp \left[ -\frac{(\text{tg}\bar{\theta} - \text{tg}\theta_n)^2}{2\sigma_{\theta y}^2} \right], \quad (6.39)$$

где  $\theta_n$  – среднее направление ветра за интервал  $\tau$ ;  $\bar{\theta}$  – среднее направление ветра за интервал  $T$ ;  $\sigma_{\theta y}$  – стандартное отклонение направления ветра в плоскости  $(x, y)$ , определяемое в результате обработки

входного массива данных для ветра по формуле

$$\sigma_{\theta y} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\text{tg}\bar{\theta} - \text{tg}\theta_n)^2 \quad (6.40)$$

( $N$  – объем выборки). Из тригонометрических соображений очевидно, что  $\text{tg}\bar{\theta} = y/x$ . Тогда при малых углах  $\theta_n$  приближенно имеем

$$\text{tg}\theta_n = \frac{y_n}{x_n} \approx \frac{y_n}{x}. \quad (6.41)$$

Учитывая эти соотношения для функции распределения  $f$  и концентрации  $C_T$ , осредненной за период  $T$ , можно записать

$$f(\theta) \sim f(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta y}} \exp\left[-\frac{(y-y_n)^2}{2\sigma_{\theta y}^2 x^2}\right], \quad (6.42)$$

$$C_T = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\tau}(y_n) f(y_n) dy_n. \quad (6.43)$$

Подставляя (6.37) и (6.42) в (6.43), получаем

$$\begin{aligned} C_T(x, y, z) &= \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W\sigma_y\sigma_z} \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{\left[z - H + \frac{w_g}{W}(x - x_{OA})\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] + \right. \\ &+ \left. \exp\left[-\frac{\left[z + H - \frac{w_g}{W}(x - x_{OA})\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\} \times \\ &\times \frac{\exp[-(\lambda + \Lambda)(x - x_{OA})/W]}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta y}x} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y_n^2}{2\sigma_y^2}\right] \exp\left[-\frac{(y-y_n)^2}{2\sigma_{\theta y}^2 x^2}\right] dy_n. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y_n^2}{2\sigma_y^2}\right] \exp\left[-\frac{(y-y_n)^2}{2\sigma_{\theta y}^2 x^2}\right] dy_n,$$

входящий в выражение (6.44). Нетрудно заметить, что он может быть преобразован к табличному виду [69]:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2 x^2 + qx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right), \quad p > 0. \quad (6.45)$$

Действительно, выполнив соответствующие преобразования под интегралом и используя формулу (6.45), найдем

$$I = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sigma_{\theta y}x}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{\theta y}^2 x^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_y^2 + \sigma_{\theta y}^2 x^2)}\right]. \quad (6.46)$$

Подставив значение интеграла (6.46) в (6.44), для концентрации, с учетом крупномасштабных колебаний направления ветра в азимутальном направлении, получим

$$\begin{aligned} C_T(x, y, z) &= \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W\sigma_z\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{\theta y}^2(x-x_0)^2}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{y^2}{2[\sigma_y^2 + \sigma_{\theta y}^2(x-x_0)^2]}\right] \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{(x-x_0)}{W}\right] \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{\left[z - H + \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] + \right. \\ &\left. + \exp\left[-\frac{\left[z + H - \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

где слагаемое  $\sigma_{\theta y}^2(x-x_0)^2$  учитывает дисперсию примеси за счет крупномасштабных флуктуаций в азимутальном направлении. Если теперь учесть, что вектор скорости ветрового потока может колебаться не только в горизонтальной плоскости, но и в вертикальной, то на основе аналогичных рассуждений и выкладок можно показать, что для учета этого обстоятельства достаточно формально заменить дисперсию  $\sigma_z$  в формуле (6.47) выражением

$$\sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_{\theta z}^2(x-x_0)^2}, \quad (6.48)$$

где  $\sigma_{\theta_z}$  – стандартное отклонение направления ветра в плоскости  $(x, z)$ . Тогда осредненное значение концентрации для среднего ветра  $W$  за период  $T$ , совпадающего по направлению с осью  $x$ , учитывающее мелкомасштабную турбулентность и крупномасштабные флуктуации направления ветра, определится следующей формулой:

$$\begin{aligned}
 C_T(x, y, z) = & \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{\theta_y}^2(x-x_0)^2} \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_{\theta_z}^2(x-x_0)^2}} \times \\
 & \times \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{(x-x_0)}{W}\right] \exp\left[-\frac{y^2}{2[\sigma_y^2 + \sigma_{\theta_y}^2(x-x_0)^2]}\right] \times \\
 & \times \left\{ \exp\left(-\frac{\left[z - H + \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2[\sigma_z^2 + \sigma_{\theta_z}^2(x-x_0)^2]}\right) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(-\frac{\left[z + H - \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2[\sigma_z^2 + \sigma_{\theta_z}^2(x-x_0)^2]}\right) \right\}. \tag{6.49}
 \end{aligned}$$

Если теперь для удобства ввести новые обозначения для дисперсий с учетом вклада в процесс рассеивания примеси как мелкомасштабной, так и крупномасштабной турбулентности, в виде

$$\Sigma_y^2 = \sigma_y^2 + \sigma_{\theta_y}^2(x-x_0)^2, \quad \Sigma_z^2 = \sigma_z^2 + \sigma_{\theta_z}^2(x-x_0)^2, \tag{6.50}$$

то выражение (6.49) для осредненной за период  $T$  концентрации примет следующий гауссов вид:

$$\begin{aligned}
 C_T(x, y, z) = & \frac{0.1\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \Sigma_y \Sigma_z} \times \\
 & \times \exp\left[-\frac{y^2}{2\Sigma_y^2}\right] \exp\left[-(\lambda + \Lambda)\frac{(x-x_0)}{W}\right] \times \\
 & \times \left\{ \exp\left(-\frac{\left[z - H + \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\Sigma_z^2}\right) + \right. \\
 & \left. \exp\left[-\frac{\left[z + H - \frac{w_g}{W}(x-x_0)\right]^2}{2\Sigma_z^2}\right] \right\}. \tag{6.51}
 \end{aligned}$$



Если использовать для  $\sigma_y^2$  и  $\sigma_z^2$  выражение (6.28), то в окончательном виде дисперсии  $\Sigma_y^2$  и  $\Sigma_z^2$  будут

$$\begin{aligned}\Sigma_y^2 &= \sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta_y}^2(x - x_0)^2; \\ \Sigma_z^2 &= \sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta_z}^2(x - x_0)^2,\end{aligned}\tag{6.52}$$

где  $k_\Phi$  – уровень фоновой турбулентности в %. Заметим, что в суммарной дисперсии  $\Sigma_i$  первое слагаемое учитывает процессы перемешивания на струйном участке, второе учитывает перемешивание на диффузионном участке за счет мелкомасштабной турбулентности, а третье учитывает вклад крупномасштабных вихрей в процесс рассеивания примеси. Интересно отметить, что третье слагаемое совпадает с выражением для дисперсии (5.16), полученным на основе анализа энергетического спектра турбулентности при больших временах диффузии. Формула (6.51) является основой для расчета поля концентрации на диффузионном участке по струйно-диффузионной модели в случае ветра одного направления, скорость которого равна  $W$  и соответствует высоте  $H$ . В частном случае расчета поля приземных концентраций над ровной поверхностью следует положить  $z = 0$ , и формула (6.51) примет вид

$$\begin{aligned}C_T(x, y, 0) &= \frac{0.2\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \Sigma_y \Sigma_z} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{y^2}{2\Sigma_y^2}\right) \exp[-(\lambda + \Lambda)(x - x_0)/W] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\left[-H + \frac{w_y}{W}(x - x_0)\right]^2}{2\Sigma_z^2}\right).\end{aligned}\tag{6.53}$$

Нетрудно видеть, что по координате  $y$  поле концентраций симметрично и с увеличением расстояния  $y$  от оси факела концентрация убывает по экспоненциальному закону, асимптотически стремясь к нулю.

В соответствии с изложенной струйно-диффузионной моделью выполнены расчеты по определению осевой приземной концентрации в плоскости  $y = 0$  в зависимости от расстояния  $x$  до источника выбросов. При этом предполагалось, что приземные концентрации при  $x < x_0$  равны нулю, а при  $x \geq x_0$  они рассчитывались по формуле (6.53). В качестве примера при расчетах были приняты следующие исходные данные:  $M = 4 \cdot 10^{-3}$  Ки/с;  $R_0 = 2$  м;  $v_0 = 10$  м/с;

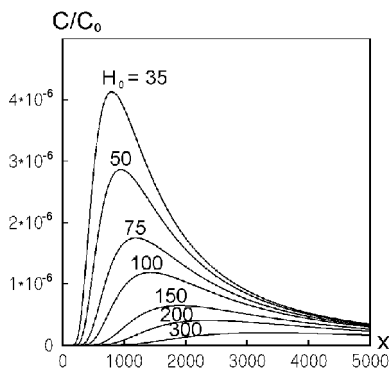


Рис. 6.3. Расчетная зависимость безразмерной концентрации от расстояния при семи различных значениях геометрической высоты источника выбросов  $H_0$ , м ( $W = 3$  м/с)

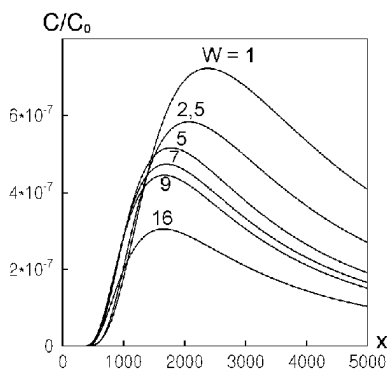


Рис. 6.4. Расчетная зависимость безразмерной концентрации от расстояния при шести различных значениях скорости ветра  $W$ , м/с ( $H_0 = 150$  м)

$\sigma_{\theta_y} = 0.2$ ;  $\sigma_{\theta_z} = 0.05$ ;  $w_g = 0.008$  м/с;  $k_{\Phi} = 5$  %;  $\lambda = \Lambda = 0$ ; скорость ветра  $W$  и геометрическая высота трубы  $H_0$  варьировались. При значениях высоты трубы  $H_0 = 35$ ; 50; 75; 100; 150; 200 и 300 метров скорость ветра принималась равной  $W = 3$  м/с, а при значениях расчетной скорости ветра  $W = 1$ ; 2.5; 5; 7; 9; 16 м/с высота трубы принималась равной  $H_0 = 150$  метров. Напомним, что эффективная высота  $H$ , входящая в формулу (6.53), находится как  $H = H_0 + z_0$ , где  $z_0$ ,  $x_0$ ,  $b_c$  и  $\tilde{C}_{m0}$  зависят от параметра сносящего потока  $u = W/v_0$  и определяются по табл. 6.1.

Результаты выполненных расчетов, представленные на рис. 6.3 и 6.4, показывают, что приземная концентрация примеси с увеличением расстояния  $x$ , совпадающим с направлением ветра, круто растет вблизи источника выбросов и затем сравнительно медленно уменьшается на больших расстояниях от него, т.е. ее распределение носит экстремальный характер. Эти результаты имеют многочисленные экспериментальные подтверждения. Например, в литературе широко известны данные, полученные в экспедициях Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова под руководством М. Е. Берлянда в различных географических районах [15].

Из рис. 6.3 и рис. 6.4 видно, что величина максимума приземной концентрации и его координата  $x_m$  зависят как от геометрической высоты  $H_0$ , так и от величины скорости ветра  $W$ .

Для дальнейших целей осредненное за период  $T$  значение концентрации или активности (6.51) целесообразно представить в следующем виде:

$$C_T = M \exp \left[ -(\lambda + \Lambda) \frac{(x - x_0)}{W} \right] G_T(x, y, z, W, \Sigma_y, \Sigma_z), \quad (6.54)$$

где функция рассеивания  $G_T$  определяется выражением

$$G_T = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}[1 + \exp(-H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \Sigma_y \Sigma_z} \exp \left( -\frac{y^2}{2\Sigma_y^2} \right) \times \\ \times \left\{ \exp \left( -\frac{\left[ z - H + \frac{w_g}{W}(x - x_0) \right]^2}{2\Sigma_z^2} \right) + \right. \\ \left. + \exp \left( -\frac{\left[ z + H - \frac{w_g}{W}(x - x_0) \right]^2}{2\Sigma_z^2} \right) \right\}. \quad (6.55)$$

Физически она описывает процесс рассеивания выбросов в случае ветра одного направления. Ее размерность  $\text{с}/\text{м}^3$  и она равна концентрации, нормированной на мощность источника выброса  $M$ .

## 6.6. Учет категорий устойчивости атмосферы и оценка угловых дисперсий скорости ветра $\sigma_{\theta y}$ и $\sigma_{\theta z}$

Процесс рассеивания примеси в приземном слое атмосферы зависит от многих факторов, в том числе и от состояния устойчивости атмосферы. На рис. 4.2 схематично представлена динамика газоаerosольного выброса при различных категориях устойчивости атмосферы. Совершенно очевидно, что температурная стратификация существенно влияет на поведение факела и процесс рассеивания примеси. При этом индикатором крупномасштабной турбулентности в атмосфере являются угловые флуктуации направления скорости ветра. Для адаптации струйно-диффузионной модели к учету категорий устойчивости атмосферы вспомним, что в случае струйно-диффузионной модели, учитывающей объемный характер источника выбросов и только мелкомасштабную турбулентность, для параметров дисперсии примеси были получены следующие выражения:

$$\sigma_y^2 = \sigma_0^2 + 2k_y(x - x_0)/W, \quad \sigma_z^2 = \sigma_0^2 + 2k_z(x - x_0)/W. \quad (6.56)$$

Здесь  $x_0$  – координата сечения, где происходит сопряжение струйного и диффузионного участков;  $\sigma_0$  – значение дисперсии, характеризующее процессы перемешивания на струйном участке; вторые слагаемые в (6.56) описывают вклад мелкомасштабной турбулентности в процесс рассеивания примеси на диффузионном участке. Далее, после того, когда в рамках струйно-диффузионной модели, были учтены случайные крупномасштабные угловые флуктуации направления ветра в горизонтальной и вертикальной плоскости, для соответствующих дисперсий получены обобщенные формулы

$$\begin{aligned}\Sigma_y^2 &= \sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta_y}^2(x - x_0)^2, \\ \Sigma_z^2 &= \sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta_z}^2(x - x_0)^2,\end{aligned}\tag{6.57}$$

где  $\sigma_{\theta_y}$  и  $\sigma_{\theta_z}$  – стандартные горизонтальные и вертикальные угловые флуктуации направления ветра, характеризующие влияние крупномасштабной турбулентности атмосферы на процесс рассеивания примеси. Приведенные соотношения (6.57) для дисперсий показывают, что они учитывают три механизма смещения примеси с движущейся окружающей средой. Первый из них характерен для струйного участка и определяется параметром  $\sigma_0$ , второй характерен для диффузионного участка и определяется коэффициентами диффузии  $k_y$ ,  $k_z$ , которые учитывают воздействие только мелких вихрей. Однако с удалением от источника по мере роста размеров диффузионного факела эти мелкие вихри оказывают все меньшее влияние на общий процесс рассеивания. Третий механизм рассеивания примеси начинает доминировать с увеличением расстояния вдоль направления ветра после того, как мелкомасштабная турбулентная диффузия расширила факел до таких размеров, что он уже начинает деформироваться под влиянием крупномасштабных неоднородностей поля скорости ветрового потока. Таким образом, в рассматриваемой модели в процессе рассеивания примеси учитывается мелкомасштабная турбулентность и крупномасштабные вихри, приводящие к более быстрому расширению объема, занятого примесью, и в соответствии с этим к более быстрому убыванию локальной концентрации по мере удаления от источника, по сравнению с мелкомасштабной турбулентной диффузией.

Расчетные исследования плавучих турбулентных струй, распространяющихся в сносящем боковом стратифицированном потоке, показывают, что вертикальная стратификация атмосферы существенно влияет на траекторию факела и процесс рассеивания примеси лишь на больших расстояниях от источника выбросов [27]. Из выражений для дисперсий (6.57) видно, что на больших расстояниях от

источника значения дисперсии в основном определяются третьими слагаемыми, пропорциональными  $(x - x_0)^2$ . Поэтому влияние устойчивости атмосферы целесообразно учесть путем введения соответствующей корректировки только третьего слагаемого, в которое входят множителями угловые дисперсии скорости ветра  $\sigma_{\theta y}$  и  $\sigma_{\theta z}$ , зависящие от структуры и кинетической энергии турбулентного ветрового потока в приземном слое атмосферы. Они могут быть оценены с помощью дисперсий поперечной и вертикальной скорости ветра на основе следующих соотношений [98]:

$$\sigma_{\theta y} = \frac{\sigma_v}{W}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_w}{W}, \quad \sigma_v = \sqrt{v'^2}, \quad \sigma_w = \sqrt{w'^2}, \quad (6.58)$$

где  $W$  – средняя скорость ветра;  $\sigma_v$  и  $\sigma_w$  – средние квадратичные значения флуктуаций скорости ветра в поперечном и вертикальном направлении. Применительно к нашей проблеме значительный интерес представляют зависимости поперечных и вертикальных дисперсий скорости ветра от параметра устойчивости атмосферы  $\zeta = z/L$ , где  $L$  – масштаб Монина – Обухова. К сожалению, имеющиеся в настоящее время хотя и многочисленные эмпирические данные об этих характеристиках пока еще не достаточно полны и точны и поэтому позволяют сделать лишь предварительные обобщения. Однако, весьма существенно, что эти выводы неплохо согласуются с предсказаниями теории подобия [115]. Оценим сначала флуктуации вертикальной компоненты скорости ветра  $\sigma_w$ .

Несмотря на то, что измерения вертикальной компоненты скорости связаны с наибольшими трудностями, ее характеристики, в силу большой практической значимости, изучены сравнительно хорошо. Теоретический анализ закономерностей изменения вертикальной скорости в приземном слое атмосферы обычно использует свойство близости подстилающей поверхности, которая препятствует образованию низкочастотных компонент, а интенсивность вертикальной турбулентности для различной подстилающей поверхности обычно учитывается параметром шероховатости  $z_0$ .

Согласно теории подобия Монина – Обухова, среднее квадратичное значение дисперсии вертикальной скорости в условиях стратифицированной атмосферы описывается формулой

$$\sigma_w = v_* F(z/L),$$

где  $F(z/L)$  – универсальная функция;  $v_*$  – динамическая скорость. Поскольку параметр  $\zeta = z/L$  однозначно связан с числом Ричардсона, то можно написать

$$\sigma_w = v_* F_1(\text{Ri}). \quad (6.59)$$

Эти формулы, в принципе, правильно отражают зависимость дисперсии вертикальной скорости от высоты, шероховатости, скорости ветра и устойчивости атмосферы при безразличной и неустойчивой стратификации. Вид этих функций определяется обычно на основе экспериментальных данных. В работе [98] подробно обсуждается этот вопрос и приводится следующая явная формула для дисперсии вертикальной скорости:

$$\sigma_w = Av_* h(z/L), \quad (6.60)$$

где

$$h(z/L) = \left( \frac{\alpha z}{v_*} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\delta_z}{L} \frac{\alpha_t}{\nu_t} \right)^{1/3}; \quad (6.61)$$

$A$ ,  $\delta_z$  – постоянные, равные  $A = 1.25$ ;  $\delta_z = 2.4 \div 4$ . Выражая динамическую скорость  $v_*$  через скорость ветра  $W$  на уровне  $z$ , получаем

$$\sigma_w = A \frac{\alpha W h(z/L)}{\ln(z/z_v) + \psi(z/L)}. \quad (6.62)$$

Формула (6.60) показывает, что  $\sigma_w$  не зависит от высоты при безразличной стратификации, но изменяется как  $z^{1/3}$  в условиях свободной конвекции. В последнем случае  $\sigma_w$  описывается формулой

$$\sigma_w = B(gH_3 z / \rho c_p T_A)^{1/3}, \quad (6.63)$$

где  $B$  – экспериментальная постоянная, значение которой составляет около 1.7 [15].

Рассмотрим частный случай безразличной стратификации. Согласно формуле (6.60) в адиабатической атмосфере среднее квадратическое значение вертикальной скорости пропорционально динамической скорости  $v_*$ . Отсюда, в свою очередь, следует, что оно пропорционально скорости ветра, а также увеличивается с увеличением параметра шероховатости и не зависит от высоты. Все эти выводы в общем подтверждаются данными наблюдений, однако значения постоянной оказываются различными по данным разных авторов. Дж. Ламли и Г. Пановский [98] проанализировали эту ситуацию и рекомендуют следующую формулу для условий безразличной стратификации:

$$\sigma_w = \frac{0.4AW}{\ln(z/z_0)}, \quad A = 1.05. \quad (6.64)$$

Зависимость  $\sigma_w$  от градиента температуры хорошо подтверждается экспериментальными данными. Качественный характер изменений  $\sigma_w$  в стратифицированном приземном слое атмосферы в настоящее время ясен. С ростом высоты эта величина при устойчивой

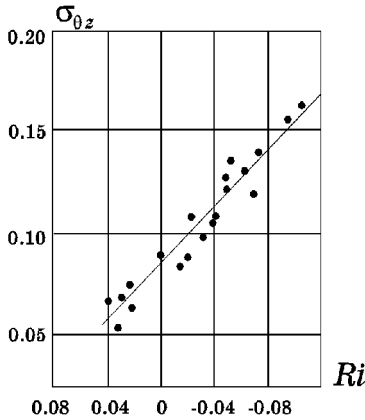


Рис. 6.5. Зависимость угловой вертикальной дисперсии скорости ветра от числа Ричардсона на высоте 91 м [9]

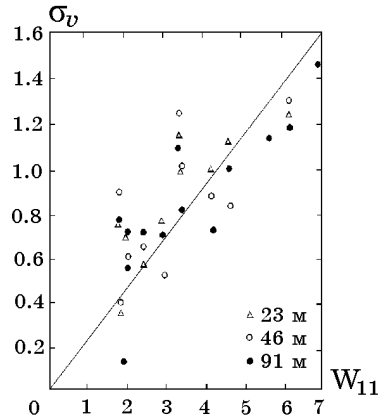


Рис. 6.6. Зависимость поперечной дисперсии скорости ветра от величины скорости ветра  $W_{11}$  на высоте 11 м в Брукхевене [9]

стратификации уменьшается, а при неустойчивой – медленно увеличивается. Такие выводы следуют из большинства теорий.

Поведение  $\sigma_w$  позволяет судить о поведении среднего квадратичного значения вертикальных угловых флуктуаций  $\sigma_{\theta z}$  согласно соотношению (6.58). Зависимость  $\sigma_{\theta z}$  от стратификации при заданной скорости  $W$  объясняется тем, что при фиксированной скорости и заданной шероховатости для  $\sigma_{\theta z}$  имеем

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_w}{W} = \left( \frac{\sigma_w}{v_*} \right) \frac{v_*}{W}, \quad (6.65)$$

а  $W/v_*$  и  $\sigma_w/v_*$  являются функциями только числа Ричардсона. Экспериментальная зависимость  $\sigma_{\theta z}$  от  $Ri$  (по Дикону) [9] представлена на рис. 6.5. Она показывает достаточно сильную связь между  $\sigma_{\theta z}$  и  $Ri$ . Очевидно, что при фиксированном градиенте температуры,  $\sigma_{\theta z}$  с увеличением скорости ветра уменьшается.

Расчетные формулы струйно-диффузионной модели рассеивания примеси учитывают дисперсию не только вертикальной скорости ветра  $\sigma_w$ , но и горизонтальной  $\sigma_v$ , что, естественно, очень важно, поскольку  $\sigma_v$  определяет боковое рассеивание примеси крупномасштабными вихревыми структурами.

Вопрос о закономерности изменения поперечной дисперсии более сложен. Представленные на рис. 6.6 данные хорошо согласуются

с предположением, что  $\sigma_v/v_*$  зависит лишь от  $\zeta$ . Однако некоторые исследователи получили при измерениях величины  $\sigma_v/v_*$  и резко отличающиеся результаты. Кроме того, данные о значениях  $\sigma_v$  характеризуются очень большим разбросом, особенно при неустойчивой стратификации. Этот разброс естественно объяснить тем, что спектры горизонтальных компонент скорости ветра охватывают очень широкий диапазон частот, и при измерении дисперсии  $\sigma_v^2 = \overline{v'^2}$  используемые метеорологические приборы часто регистрируют только часть этого диапазона, различную у разных авторов. В работах Е. К. Гаргера [57], например, зависимость коэффициента анизотропии  $\sigma_v/\sigma_w$  при нейтральной стратификации оценивается величиной 5. В связи с изложенным надежное определение значений  $\sigma_v/v_*$  в приземном слое термически стратифицированной атмосферы требует еще дополнительного изучения.

Рассмотрим сначала связь стандартного отклонения поперечной скорости ветра со средней скоростью ветра и шероховатостью при безразличной стратификации. Как и прежде, исходя из теории подобия, можно предполагать, что  $\sigma_v$  пропорциональна динамической скорости

$$\sigma_v = A_1 v_* . \quad (6.66)$$

Эта гипотеза не вызывает особых сомнений. Кроме того, при безразличной стратификации горизонтальная дисперсия скорости ветра значительно больше вертикальной дисперсии ( $\sigma_v > \sigma_w$ ). Следует отметить, что хотя  $\sigma_v$  пропорционально  $v_*$  при безразличной стратификации, однако этот коэффициент  $A_1$  различный для разной географической местности и топографии.

В случае неадиабатических условий можно также воспользоваться теорией подобия и положить

$$\sigma_v = A_1 v_* f(z/L) . \quad (6.67)$$

Измерения показывают, что  $\sigma_v$  почти нечувствительна к высоте  $z$ , но в то же время весьма чувствительна к изменениям стратификации.

В литературе имеется большое количество фактических данных о связи дисперсии поперечной скорости со скоростью ветра и стратификацией атмосферы в различных пунктах на разных высотах. Они указывают на доминирующую роль температурной стратификации, о чем свидетельствует большое различие между дневными и ночными значениями дисперсий при одной и той же скорости ветра, причем флуктуации поперечной скорости в дневное время определяются в основном тепловой конвекцией, зависящей от солнечной радиации. В ночное время рассматриваемые флуктуации увеличиваются с ростом



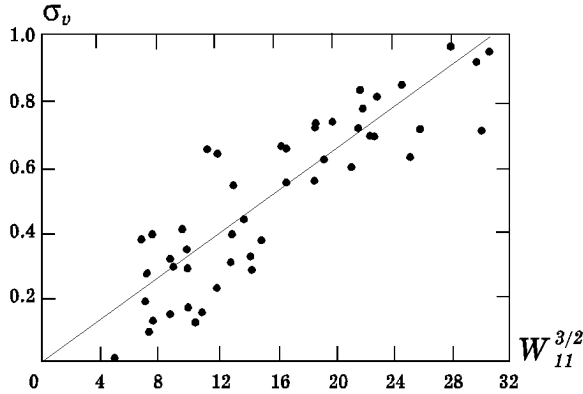


Рис. 6.7. Зависимость поперечной дисперсии скорости ветра на высоте 2 м от скорости ветра в степени  $3/2$  на высоте 11 м [9]

скорости ветра и высоты шероховатости, что свидетельствует о доминирующем влиянии турбулентности, обусловленной средним сдвигом.

Так как между скоростью ветра и градиентом температуры в атмосфере имеется определенная корреляция, проявляющаяся, например, в том, что глубокие инверсии встречаются только при слабом ветре, то скорость ветра сама по себе может служить хорошей характеристикой поперечной дисперсии при устойчивой стратификации. Подтверждением этому служат данные такой корреляции, приведенные на рис. 6.7, которые можно аппроксимировать зависимостью [9]

$$\sigma_v = 0.03W_{11}^{3/2}, \quad (6.68)$$

где  $W_{11}$  – скорость ветра на высоте 11 метров, а коэффициент 0.03 характерен для данных условий. В более общем случае он зависит, например, от условий орографии.

Другие свойства поперечной дисперсии изучали Смит и Аббот (1961) на основе обширных измерений в Портоне. Они исследовали зависимость стандартного отклонения азимута (осредненные по трехминутным периодам) в функции от устойчивости атмосферы, характеризуемой отношением разности температур к квадрату скорости ветра, т.е. по существу числом Ричардсона.

На рис. 6.8 приведены экспериментальные зависимости безразмерных продольной  $\sigma_u/v_*$ , поперечной  $\sigma_v/v_*$  и вертикальной  $\sigma_w/v_*$  дисперсии скорости ветра в функции от  $\zeta = z/L$ , заимствованные

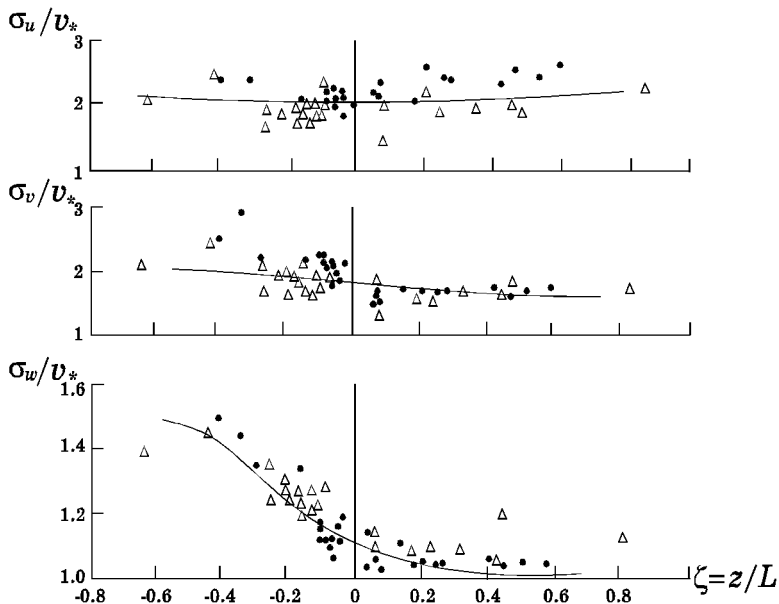


Рис. 6.8. Экспериментальная зависимость безразмерных продольной, поперечной и вертикальной дисперсий скорости ветра в функции от параметра устойчивости атмосферы  $\zeta$  по данным Креймера [115]

из [115]. Согласно этим и другим имеющимся данным отношение  $\sigma_u/v_* = 2.4$  при малых  $\zeta$ , включая  $\zeta = 0$ . Отношения  $\sigma_v/v_*(0) = 1.9$ , а  $\sigma_w/v_*(0) = 1.25$ . Эти значения близки к значениям, приведенным в обзоре Б. А. Кадера и А. М. Яглома [115] (1980)  $\sigma_u/v_* = 2.3$ ;  $\sigma_v/v_* = 1.7$ ;  $\sigma_w/v_* = 1$ , полученным на основе многочисленных лабораторных измерений в пограничных слоях, однако некоторое расхождение в сторону увеличения все же наблюдается. Это легко объясняется нестационарностью атмосферных условий и существованием вертикальных тепловых потоков, даже при практически нейтральной стратификации.

В работе [57] приведены результаты оценки дисперсий скорости ветра  $\sigma_w$  и  $\sigma_v$  на основе траекторных исследований тетронов в приземном слое атмосферы при различном состоянии устойчивости атмосферы. Представленные там данные показывают, что отношение  $\sigma_i/v_*$  растет с увеличением степени неустойчивости атмосферы. В интервале аргумента  $\zeta$  от  $-0.2$  до  $0.2$  значения  $\sigma_i/v_*$  мало изменяются, а для условий, близких к нейтральной стратификации, они

Табл. 6.3. Соотношение между категориями устойчивости атмосферы и горизонтальной угловой дисперсией направления ветра [145]

Угловые дисперсии	Категории устойчивости					
	А	В	С	Д	Е	Ф
$\sigma_{\theta y}$ , угл. градусы	25	20	15	10	5	2.5
$\sigma_{\theta y}$ , радианы	0.396	0.352	0.264	0.176	0.088	0.044

составили

$$\frac{\sigma_w}{v_*} = 0.82 \pm 0.24, \quad \frac{\sigma_v}{v_*} = 0.98 \pm 0.30,$$

что несколько ниже, чем оценки, приведенные в работе [9], где средние значения  $\sigma_i/v_*$ , полученные в натуральных условиях, составляют

$$\frac{\sigma_w}{v_*} = 1.3, \quad \frac{\sigma_v}{v_*} = 1.9.$$

Данные измерений  $\sigma_i/v_*$ , полученные с помощью уравновешенных шаров-пилотов на высоте 50 м над водной поверхностью, дали следующие средние значения для трех классов устойчивости по Паскуиллу (С, D, E):

$$\frac{\sigma_w}{v_*} = 2.2; 1.3; 1.2, \quad \frac{\sigma_v}{v_*} = 3.7; 1.8; 2.4.$$

В целом эти данные неплохо согласуются с формулой Г. Пановского [98]

$$\frac{\sigma_w}{v_*} = C(1 - a\zeta)^{1/3}, \quad C = 1.25, \quad a = 2;$$

$$\frac{\sigma_v}{v_*} = C(1 - a\zeta)^{1/3}, \quad C = 1.6, \quad a = 2.$$

Согласно [145], в практических случаях угловую дисперсию флуктуации направления скорости ветра в горизонтальной плоскости  $\sigma_{\theta y}$  определяют как максимальный размах колебаний флюгера по азимутальному углу  $\theta$  за период в один час и делят его на шесть. Там же приведена связь угловой дисперсии  $\sigma_{\theta y}$  с категориями устойчивости по Паскуиллу, которая характеризуется табл. 6.3.

Критически анализируя данные, приведенные выше и полученные другими авторами, следует подчеркнуть, что все они характеризуются большим разбросом экспериментальных точек. Даже при стратификации, близкой к безразличной,  $\sigma_{\theta y}$  колеблется по одним данным от  $3^\circ$  до  $12^\circ$ , а другие авторы указывают большие значения:  $(15^\circ \pm 5^\circ)$ . В целом  $\sigma_{\theta y}$  растет с уменьшением устойчивости, причем

этот рост сопровождается увеличением разброса экспериментальных точек. Большой разброс данных наблюдается и при устойчивой стратификации ( $Ri < 0$ ). Если период осреднения увеличить, то флуктуации уменьшаются. В случае инверсий и слабом ветре наблюдаются очень большие флуктуации азимутального угла. Их механизм происхождения пока не совсем ясен. Возможно этот эффект медленных колебаний азимута с периодами порядка 20 мин. в инверсиях при слабом ветре имеет волновую природу. Это явление создает трудности при оценке поперечной дисперсии и диффузии примеси. В целом нужно отметить, что измерения  $\sigma_v$  или спектра  $v$  обычно весьма ненадежны при устойчивой стратификации, поскольку в таких условиях направление ветра обычно все время медленно изменяется. Такие низкочастотные колебания ветра приводят к меандрированию струи на малых высотах порядка 100 м, куда попадают устья большого количества дымовых труб. На этих высотах устойчивая стратификация встречается часто, но она редко соответствует стационарным атмосферным условиям. Поэтому структура турбулентности при заданных значениях средних градиентов скорости и температуры не может быть описана достаточно точно. Другая причина неопределенности связана с перемежающимся характером флуктуаций скорости на данных высотах, что обусловлено наличием внутренних волн.

Обсуждая экспериментальные данные, строго говоря, следует анализировать используемую аппаратуру и методику измерений, однако этот вопрос выходит за рамки нашего рассмотрения.

Анализируемые экспериментальные результаты относились к разным высотам от 2 до 91 м. В общем они свидетельствуют, что влияние высоты несущественно. Таким образом, механизм влияния различных факторов и типов устойчивости атмосферы на поведение вертикальных и горизонтальных угловых дисперсий скорости ветра довольно сложный, однако основные закономерности все же ясны. Дисперсия поперечной компоненты скорости ветра и, следовательно, параметр  $\sigma_{\theta y}$  растет с увеличением скорости ветра при фиксированной стратификации. При фиксированной же скорости ветра она увеличивается с ростом неустойчивости, исключение составляют инверсии при слабом ветре. Выполненный нами анализ позволил установить количественную связь для горизонтальной и вертикальной угловых дисперсий направления ветра от категорий устойчивости атмосферы по Паскуиллу – Гиффорду, которые в обобщенном виде приведены в табл. 6.4. Эти значения дисперсий рекомендуются для использования в расчетах по струйно-диффузионной модели. Таким образом, учет категорий устойчивости атмосферы в струйно-диффузионной модели осуществляется через значения пара-

Табл. 6.4. Зависимость угловых горизонтальной  $\sigma_{\theta_y}$  и вертикальной  $\sigma_{\theta_z}$  дисперсий направления ветра от категорий устойчивости атмосферы по Паскуиллу

Угловые дисперсии	Категории устойчивости						
	A	B	C	D	E	F	G
$\sigma_{\theta_y}$ , рад	0.32	0.28	0.24	0.20	0.16	0.12	0.08
$\sigma_{\theta_z}$ , рад	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02

метров  $\sigma_{\theta_y}$  и  $\sigma_{\theta_z}$ . Следовательно, уровень загрязнения в виде поля концентраций или радиоактивности в случае ветра одного направления и заданного класса устойчивости атмосферы согласно струйно-диффузионной модели определяется формулой (6.51), где дисперсии  $\Sigma_y$  и  $\Sigma_z$  рассчитываются с учетом зависимости  $\sigma_{\theta_y}$  и  $\sigma_{\theta_z}$  от состояния атмосферы.

В качестве примера, иллюстрирующего влияние категорий устойчивости атмосферы на уровень загрязнения вблизи источника выбросов, выполнен расчет поля приземных концентраций для некоторого непрерывного источника при одинаковых исходных данных и трех различных категориях устойчивости. Рассматривается установившийся газоаэрозольный выброс  $^{90}\text{Sr}$  из вентиляционной трубы АЭС высотой  $H_0 = 50$  м с диаметром в устье трубы  $D_0 = 2r_0 = 4$  м. Пусть нас интересует расчетная область с радиусом 5000 м, в центре которой расположен источник выброса мощностью  $M = 4 \cdot 10^{-3}$  Ки/с. Начальная скорость выброса  $v_0 = 10$  м/с, средняя температура выброса  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ , температура воздуха на уровне устья трубы  $T_w = 30^\circ\text{C}$ , период полураспада для  $^{90}\text{Sr}$   $T_{1/2} = 28.5$  года. Пусть скорость гравитационного осаждения для аэрозоля  $w_g = 0.008$  м/с, осадки отсутствуют ( $\Lambda = 0$ ), скорость ветра  $W_\phi = 3$  м/с, направление ветра – восточное, уровень атмосферной турбулентности – 5 %, состояние устойчивости атмосферы по Паскуиллу – Гиффорду пусть соответствует трем вариантам: В, D и F. Расчеты выполнены по формуле (6.53).

Результаты расчета поля объемной радиоактивности на уровне земли по струйно-диффузионной модели для указанных выше условий представлены в виде трех карт-схем загрязнения региона на рис. 6.9 в изолиниях для трех категорий устойчивости атмосферы В, D и F соответственно. Такая форма представления результатов расчета дает наглядную картину об уровне радиоактивного загрязнения на местности. Эти расчетные изолинии имеют форму эллипсов, вытянутых вдоль оси  $x$ , совпадающей с направлением ветра и ориентированной

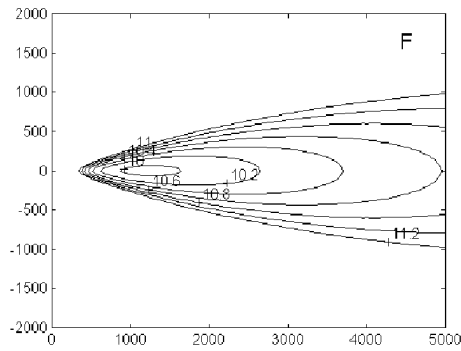
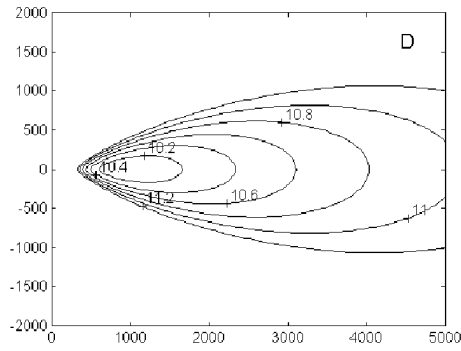
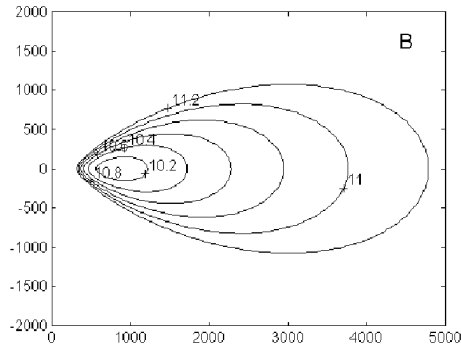


Рис. 6.9. Пример расчета поля приземных концентраций в изолиниях по формуле (6.53) для трех категорий устойчивости атмосферы:

*B* – умеренно-неустойчивая, *D* – нейтральная, *F* – умеренно-устойчивая

в данном случае на восток. Внутренний эллипс ограничивает зону максимального загрязнения. Степень убывания объемной радиоактивности с удалением от зоны с максимальным уровнем загрязнения характеризуется расположением изолиний. Цифры, нанесенные на изолиниях, например 10.2; 10.4; 10.6; 10.8; 11; 11.2, соответствуют уровню радиоактивного загрязнения  $10^{-10.2}$ ,  $10^{-10.4}$  и т.д. Ки/м<sup>3</sup> соответственно. При сравнении этих расчетных карт легко видеть, что при умеренно неустойчивой атмосфере (В) ширина зоны загрязнения шире, а при умеренно устойчивой (F) – уже по сравнению со случаем нейтральной стратификации (D).

Таким образом, изложенная методика позволяет рассчитывать поле концентраций от непрерывного распределенного источника, но пока только в случае ветра одного направления. Учет переменности направления ветра за отрезок времени произвольной продолжительности рассматривается в следующем разделе.

## 6.7. Учет нестационарности метеорологических условий и проблема осреднения

В предыдущем разделе рассмотрен пример расчета радиационной обстановки вблизи АЭС для случая ветра одного направления. Однако такая метеорологическая ситуация в реальных условиях сохраняется недолго, поскольку скорость ветра постоянно меняет свою величину и направление. Кроме того, в практических задачах важно знать не мгновенную величину поля концентраций, а ее осредненное значение за определенный временной интервал. Так, очень часто выполнение практических расчетов связано с получением проектных параметров труб или предельно допустимых выбросов промышленных предприятий. Расчетной величиной в этих случаях является концентрация, осредненная за период в 1 год, полученная в предположении, что мощность выброса  $M$  постоянна.

Продолжительность времени выброса и выбор расчетных значений средних метеорологических условий имеет существенное значение как в принципе, так и при сопоставлении расчетных и фактически наблюдаемых величин концентрации или объемной активности. Известно [15], что опытные данные оказываются существенно ниже рассчитанных по формулам Гаусса, что связано в первую очередь с проблемой осреднения и влиянием нестационарности метеорологических условий на процесс рассеивания примеси. Эта нестационарность при проведении натурных измерений всегда присутствует, а известные и полученные выше формулы справедливы пока в предположении стационарности метеорологических условий. Для расчета

поля концентраций, осредненного за заданный продолжительный отрезок времени  $T$  с нестационарными метеорологическими условиями следует представить искомую концентрацию в виде суперпозиции полей концентрации, полученных с помощью расчета по формуле (6.51) для непрерывного стационарного источника.

Рассмотрим подробнее этот способ. Для его реализации удобно разделить весь диапазон направлений ветра  $0 \div 360^\circ$  на конечное число секторов  $n$ , например 16 румбов с шагом в  $22.5^\circ$ , а диапазон величины скорости ветра разделить на  $m = 8$  градаций. Повторяемость погодных условий обычно разбивают на  $l = 7$  классов. При таком подходе методика расчета ориентирована на использование стандартной метеорологической информации, имеющейся на опорных метеостанциях, и базируется на результатах срочных и многолетних наблюдений в конкретном регионе за температурой воздуха, величиной скорости ветра, его направлением, влажностью воздуха и другими параметрами.

Характерная форма метеорологической информации, требуемая для расчета осредненных полей концентрации, полученная в результате обработки первичных метеорологических данных, представлена в табл. 6.5 в виде соответствующей матрицы вероятностей направления и величины скорости ветра за рассматриваемый отрезок времени, где указаны направления ветра по 16 румбам розы ветров ( $n = 1, 2, \dots, 16$ ) и 8 градациям величины скорости ветра ( $m = 1, 2, \dots, 8$ ). Значение, указанное в каждой клетке этой матрицы, означает, что за рассматриваемый период ветер  $m$ -ой величины и  $n$ -го направления наблюдался в  $\eta_{mn}$  случаях от общего числа наблюдений за рассматриваемый отрезок времени (месяц, год) в %.

Такие таблицы вероятности или повторяемости ветра по величине и направлению позволяют рассчитывать значение осредненных приземных концентраций в произвольной точке  $M(x, y)$  за рассматриваемый отрезок времени. Обозначим через  $C_T(mnl)$  концентрацию примеси, рассчитанную по формуле (6.53) для ветра  $m$ -ой величины,  $n$ -го направления и  $l$ -ой категории устойчивости атмосферы. Тогда согласно известным положениям теории вероятностей, средняя концентрация  $C_\Sigma$  в точке  $M(x, y)$  равна сумме произведений  $C_T$  на соответствующие вероятности по всем ветрам и направлениям при заданной повторяемости категорий устойчивости, т. е.

$$C_\Sigma = \sum_{n=1}^{16} \sum_{m=1}^8 \sum_{l=1}^7 C_T(mnl) \eta_{mn} P_l, \quad (6.69)$$

где  $P_l$  – повторяемость за рассматриваемый отрезок времени  $l$ -ой



Табл. 6.5. Вероятность  $\eta_{nm}$  величины и направления скорости ветра за рассматриваемый период времени в %

Направление ветра	Градации скорости ветра, м/с			
	< 0.5	0.5 - 2	2.1 - 4	4.1 - 6
С	0.86	0.00	4.00	0.00
ССВ	0.86	2.15	0.86	0.00
СВ	0.86	3.54	0.86	0.00
ВСВ	0.86	1.72	0.00	0.00
В	0.86	0.86	0.00	0.00
ВЮВ	0.86	0.00	0.86	0.00
ЮВ	0.86	2.58	0.00	1.46
ЮЮВ	0.86	0.00	1.29	0.00
Ю	0.86	0.86	2.15	0.00
ЮЮЗ	0.86	0.43	1.29	0.86
ЮЗ	0.86	1.29	1.29	0.86
ЗЮЗ	0.86	0.86	0.00	3.44
З	0.86	0.00	0.03	0.00
ЗСЗ	0.86	0.43	0.00	0.00
СЗ	0.86	0.43	1.29	0.11
ССЗ	0.86	2.58	2.58	3.44
Направление ветра	Градации скорости ветра, м/с			
	6.1 - 8	8.1 - 10	10.1 - 16	> 16
С	1.42	2.58	5.59	5.32
ССВ	1.72	1.29	0.43	0.00
СВ	0.00	2.15	1.72	0.00
ВСВ	0.00	0.00	0.00	0.00
В	0.00	0.00	0.00	0.00
ВЮВ	0.00	0.00	0.00	0.00
ЮВ	0.00	0.00	0.00	0.00
ЮЮВ	0.00	0.86	1.72	0.00
Ю	0.86	0.00	0.86	0.00
ЮЮЗ	0.00	0.00	0.00	0.00
ЮЗ	0.00	0.00	0.00	0.00
ЗЮЗ	0.00	0.00	0.00	0.00
З	0.00	0.43	6.45	5.59
ЗСЗ	0.00	0.00	0.00	0.00
СЗ	0.00	0.00	0.00	0.00
ССЗ	2.58	0.00	0.00	0.00

Табл. 6.6. Повторяемость категорий устойчивости атмосферы  $P_l$  по классификации Паскуилла – Гиффорда в %

Повторяемость	Категории устойчивости						
	A	B	C	D	E	F	G
$P_l, \%$	0	10	35	25	20	10	0

категории устойчивости атмосферы по Паскуиллу – Гиффорду в %, пример которой приведен в табл. 6.6.

Если вспомнить выражение для концентрации (6.54), связанное с мощностью выброса  $M$  через функцию рассеивания  $G_T$  для ветра одного направления, то с учетом вышеизложенного среднюю концентрацию  $C_\Sigma$  можно представить также в следующей полезной форме:

$$C_\Sigma = M \exp [-(\lambda + \Lambda)T] G_\Sigma(x, y, z),$$

где

$$G_\Sigma = \sum_{n=1}^{16} \sum_{m=1}^8 \sum_{l=1}^7 G_T(mnl) \eta_{mn} P_l,$$

а  $G_T$  – функция рассеивания, определяемая соотношением

$$G_T(x, y, z) = \frac{0.1 \tilde{C}_{m0}(u, Ri_0) [1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi \Sigma_y(l) \Sigma_z(l) W(m)} \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{y^2}{2\Sigma_y^2(l)} \right] \left\{ \exp \left[ -\frac{\left( z - H + \frac{w_g}{W(m)}(x - x_0) \right)^2}{2\Sigma_z^2(l)} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[ -\frac{\left( z + H - \frac{w_g}{W(m)}(x - x_0) \right)^2}{2\Sigma_z^2(l)} \right] \right\}.$$

В практике использования стандартных метеоданных в качестве исходной информации обычно известны не матрица  $\eta_{mn}$ , а повторяемость направлений ветра  $P_n$  по румбам розы ветров в % и вероятность величины скорости ветра  $P_m$  по градациям в %, например в виде табл. 6.7 и 6.8 соответственно. В этом случае соответствующая матрица  $\eta_{mn}$  определяется согласно соотношению  $\eta_{mn} = P_m \cdot P_n$ . Таким образом, в общем случае в соответствии с данной методикой

Табл. 6.7. Повторяемость направлений ветра  $P_n$  по румбам розы ветров в %

Направление	Повторяемость	Направление	Повторяемость
С	19.77	Ю	5.59
ССВ	7.31	ЮЮЗ	3.44
СВ	9.13	ЮЗ	4.3
ВСВ	2.58	ЗЮЗ	5.26
В	1.72	З	13.63
ВЮВ	1.72	ЗСЗ	1.29
ЮВ	4.9	СЗ	2.69
ЮЮВ	4.73	ССЗ	12.04

Табл. 6.8. Вероятность величины скорости ветра  $P_m$  по градациям в %

$P_m$	Градация скорости ветра, м/с							
	<0.5	0.5 - - 2	2.1 - - 4	4.1 - - 6	6.1 - - 8	8.1 - - 10	10.1 - 16	> 16
%	13.76	17.73	16.77	10.17	6.58	7.31	16.77	10.91

в интересующей нас точке  $M(x, y)$  рассчитываются  $16 \times 8 \times 7 = 896$  случаев различного сочетания категорий устойчивости, величины и направления скорости ветра, которые затем суммируются и определяется среднее значение концентрации в рассматриваемой точке, учитывающее вклад от каждого из  $n$  направлений ветра и  $m$  градаций величины скорости за данный отрезок времени. Следует подчеркнуть, что вопрос о способе получения средних концентраций как расчетным путем, так и с помощью средств измерения, является принципиальным и должен учитываться при проверке адекватности той или иной модели рассеивания примеси в атмосфере.

Таким образом, предлагаемый подход к определению средних за заданный отрезок времени концентраций состоит в том, что осредненное поле концентраций вокруг источника выбросов определяется путем суперпозиции результатов расчета по формулам для непрерывного стационарного источника по всем характерным за рассматриваемый временной интервал направлениям и скоростям ветра с учетом вероятности категорий устойчивости атмосферы.

В практическом отношении при проектировании промышленных

предприятий, включая объекты атомной энергетики и в ряде других случаев, необходимо знать осредненное за год поле концентраций или объемной активности в регионе выброса в виде поля концентрации на местности. Покажем как это можно сделать в случае непрерывного продолжительного выброса с использованием струйно-диффузионной модели.

Введем в рассмотрение базовую неподвижную прямоугольную систему координат  $x, y, z$ , в которой ось  $y$  ориентирована на север, а плоскость  $z = 0$  совпадает с ровной ограничивающей поверхностью. Рассматриваемый источник загрязнения может находиться в начале этой системы координат, а в более общем случае он может находиться в точке с координатами  $(x_{OA}, y_{OA}, O)$  (см. рис. 6.2). Это обстоятельство особенно важно, когда имеется несколько источников. Введем в рассмотрение еще подвижную систему координат  $x_n, y_n, z_n$  с центром в точке  $(x_{OA}, y_{OA}, O)$ , как показано на рис. 6.2. В этой системе координат рассмотрим произвольную точку  $M(x_n, y_n)$ . Тогда приземная концентрация в ней для ветра  $m$ -ой скорости и  $n$ -го направления согласно выражения (6.53) определится формулой

$$\begin{aligned}
 C_{mnl}(x_n, y_n, 0) = & \frac{0.2\tilde{C}_{m0}M[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W_m \Sigma_y \Sigma_z} \times \\
 & \times \exp\left(-\frac{y_n^2}{2\Sigma_y^2}\right) \exp[-(\lambda + \Lambda)t] \times \\
 & \times \exp\left(-\frac{\left[-H + \frac{w_g}{W_m}(x_n - x_{OA})\right]^2}{2\Sigma_z^2}\right),
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

а осредненное за рассматриваемый временной интервал  $t$  поле приземных концентраций находим путем суперпозиций по формуле (6.69), при этом используются следующие известные формулы аналитической геометрии, связывающие подвижную и неподвижную системы координат:

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_{AA} \cos \theta_n + y_{AA} \sin \theta_n, \\
 y_n &= y_{AA} \cos \theta_n - x_{AA} \sin \theta_n, \\
 x_{AA} &= x - x_{OA}, \quad \theta_n = \frac{\pi}{8}(n - 1), \\
 y_{AA} &= y - y_{OA}, \quad n = 1, 2, \dots, 16.
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Описанная методика расчета осредненных концентраций требует большого количества простых, но многократных вычислений. Однако это не представляет сложности при современном уровне развития вычислительной техники. Обычно при построении изолиний используется сеточное задание осредненных значений концентрации в узлах сетки, при этом используется линейная интерполяция на ребрах ячейки. Используемый вариант программ строит карты изолиний в декартовой системе координат, при этом значение приземной концентрации рассматривается как функция двух переменных  $x$  и  $y$ .

В качестве примера рассмотрим расчет радиоактивной обстановки в регионе АЭС с использованием струйно-диффузионной модели. Пусть требуется определить осредненное за год поле объемной радиоактивности, обусловленное газоаэрозольными выбросами АЭС, работающей в номинальном режиме.

В соответствии со струйно-диффузионной моделью необходимо рассчитывать процессы рассеивания радиоактивных газоаэрозольных выбросов сначала на струйном, а затем на диффузионном участках с выполнением условия их сопряжения. Для проведения конкретных расчетов уровня радиоактивного загрязнения в соответствии с предлагаемой методикой необходимо, исходя из условий режима работы АЭС, задать следующие исходные данные.

1. Наименование источника выбросов, его  $N^0$ .
2. Размер расчетной области,  $x_{\max}, y_{\max} = 5000$  м.
3.  $X$  – координату источника выбросов,  $XOA = 0$  м.
4.  $Y$  – координату источника выбросов,  $YOA = 0$  м.
5. Наименование загрязнителя, изотопный состав,  $^{90}Sr$ .
6. Мощность источника выбросов,  $M = 4 \cdot 10^{-3}$  Ки/с.
7. Время осреднения (среднесуточное, среднемесячное, среднегодовое).
8. Высоту трубы,  $H_0 = 100$  м.
9. Диаметр устья трубы,  $D_0 = 4$  м.
10. Расход газоаэрозольной смеси,  $Q_0 = 126$  м<sup>3</sup>/с (или начальную скорость выбросов  $v_0 = 10$  м/с).
11. Среднюю температуру выбросов  $T_0 = 30^\circ C$ .

12. Среднюю температуру воздуха на уровне устья трубы  $T_W = 30^\circ\text{C}$ .
13. Период полураспада рассматриваемого нуклида,  $T_{1/2} = 28.5$  года.
14. Время действия источника (непрерывного)  $t = 1$  год.
15. Скорость гравитационного осаждения аэрозоля,  $w_g = 0.008$  м/с.
16. Среднюю интенсивность осадков,  $I = 0.075$  мм/час.
17. Параметр вымывания,  $R = 2.6 \cdot 10^{-5}$  г/мм·с.
18. Уровень фоновой турбулентности,  $k_\Phi = 5$  %.
19. Табл. 6.6. Повторяемость категорий устойчивости атмосферы по Паскуиллу – Гиффорду за рассматриваемый период времени,  $P_l$  в %.
20. Табл. 6.7. Повторяемость направлений ветра  $P_n$  по румбам розы ветров в %.
21. Табл. 6.8. Вероятность величины скорости ветра  $P_m$  по градациям за рассматриваемый период времени в %.

Из теории плавучих турбулентных струй, распространяющихся в сносящем боковом потоке, известно, что параметры таких струй зависят от двух основных безразмерных параметров: начального числа Ричардсона  $Ri_0$  и параметра сносящего потока  $u = W/v_0$ . Поэтому по заданной начальной скорости выброса газоаэрозольной смеси  $v_0$  и перепаду температур в устье трубы определяем начальное число Ричардсона

$$Ri_0 = \frac{gr_0(T_0 - T_W)}{(T_0 + 273)v_0^2} = 0.$$

Затем по заданной  $v_0$  и заданном в табл. 6.8 массиве характерных градаций скорости ветра  $W_n$  определяем соответствующие значения параметра сносящего потока  $u_n$ , а именно

$$u_n = \frac{W_n}{v_0} (0.05; 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9; 1.3; 1.6).$$

Для этих параметров численно решается задача о струе, распространяющейся в сносящем ветровом потоке. В результате решения

при заданном  $Ri_0$  и различных значениях параметра  $u_n$  определяются все интересующие нас характеристики выброса на струйном участке. Однако, учитывая универсальность безразмерных характеристик струи, можно не решать каждый раз сложную струйную задачу, а для нахождения требуемых параметров струи воспользоваться готовыми значениями соответствующих данных, которые для рассматриваемого случая ( $Ri_0 = 0$ ) приведены в табл. 6.1. Пользуясь ими, находим соответствующие массивы интересующих нас безразмерных значений:

- вертикальную и продольную координаты конца струйного участка, которые являются и началом координат для диффузионного участка,

$$Z_0 = (70.0; 51.0; 21.4; 14.5; 11.0; 9.3; 9.0; 8.7);$$

$$X_0 = (120.0; 107.0; 68.0; 58.0; 52.5; 48.8; 48.0; 46.0);$$

- радиусы струи в конце струйного участка

$$B_e = (70.0; 53.7; 21.7; 15.5; 13.1; 12.6; 12.2; 12.0);$$

- значения осевой объемной активности

$$\tilde{C}_{m0} = (0.008; 0.019; 0.034; 0.043; 0.051; 0.057; 0.062; 0.068);$$

- значения дисперсии  $\sigma_0$  в конце струйного участка ( $\sigma_0 = 0.316B_e r_0$ ).

Эти результаты расчета струйного участка и первоначальные исходные данные позволяют приступить к расчету рассеивания выброса на диффузионном участке. Требуемое осредненное поле объемной активности на уровне земли рассчитывается по формуле (6.69), а распределение концентрации  $C_T(x, y)$  для  $n$ -го направления,  $m$ -ой величины и  $l$ -ой категории устойчивости атмосферы определяется по формуле (6.53).

Типичный пример расчета радиационной обстановки по данной методике для исходных данных, указанных выше, и метеоусловий, приведенных в табл. 6.6–6.8, показан на рис. 6.10. Он представляет собой карту-схему радиоактивного загрязнения местности вблизи источника выбросов в изолиниях. Индексы на изолиниях, означают уровень радиоактивности. Например, линия, обозначенная индексом 12, соответствует уровню концентрации  $C = 10^{12}$  Ки/м<sup>3</sup> и т. д. Специальными значками на карте программа выделяет характерные

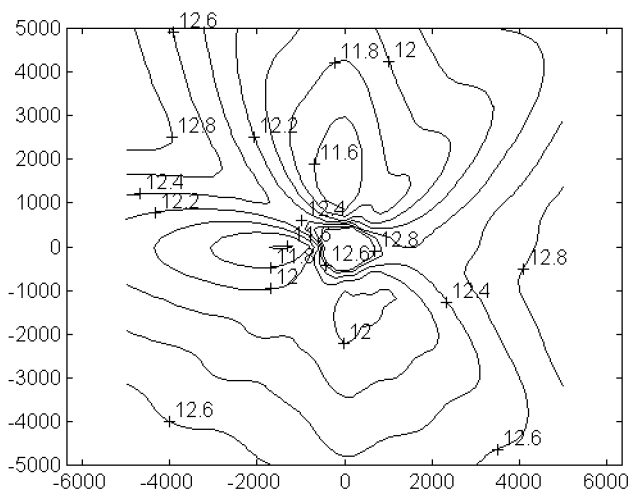


Рис. 6.10. Пример расчета и построения карты-схемы поля средних приземных концентраций в изолиниях от непрерывного источника по формуле (6.69)

максимальные значения уровня загрязнения. Поскольку расчеты выполняются на персональном компьютере, то известные широкие возможности вычислительной техники позволяют легко получить результаты расчетов и в любом другом графическом или табличном виде, удобном для пользователя. В частности, алгоритм расчета полей концентрации может быть интегрирован в геоинформационную систему MapInfo, с помощью которой прогноз радиационной обстановки в зоне влияния источника выбросов представляется в виде изолиний уровня загрязнения воздуха или почвы, нанесенных на электронную географическую карту. Это позволяет оперативно визуализировать и обобщать различную радиологическую информацию. Пример такого представления результатов расчета для условий, указанных в предыдущем примере, приведен на рис. 6.11, когда координаты источника выброса совмещены с координатами вентиляционной трубы Чернобыльской АЭС.

## 6.8. Расчетная скорость ветра

Скорость ветра является одним из существенных метеорологических параметров, определяющих характер переноса и рассеивания газоаerosольных выбросов в атмосфере. Для каждой географической местности в зависимости от климатических условий доминирующее



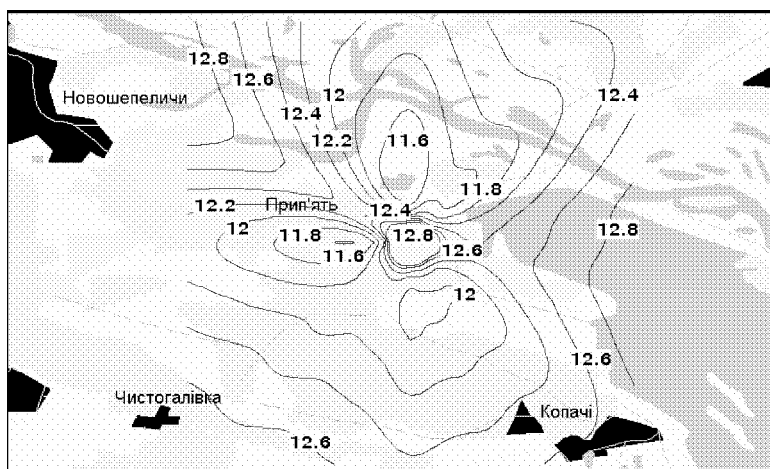


Рис. 6.11. Пример представления результатов расчета поля осредненных концентраций от непрерывного источника с помощью геоинформационной системы MapInfo в виде изолиний на географической карте региона выбросов

направление и величина скорости ветра различны. При прогнозировании полей концентраций токсических и радиоактивных веществ необходим учет этих факторов. Кроме того, скорость ветра должна учитываться при проектировании различных инженерных сооружений, включая высотные вентиляционные и дымовые трубы, которые будут испытывать механические нагрузки, и в ряде других случаев.

В формулах струйно-диффузионной модели предполагается, что расчетная скорость ветра  $W$  должна быть взята на высоте  $H_0$  при расчете струйного участка и на высоте  $H$  при расчете диффузионного участка. Поскольку на государственных метеостанциях скорость ветра обычно измеряется лишь на одном уровне у поверхности земли, скажем на высоте флюгера (10 м), то необходимо экстраполировать результаты этих измерений вплоть до высоты  $H$ . С этой целью за расчетную скорость ветра  $W$  принимается скорость ветра 10-минутного осреднения на высоте флюгера (10 м) над поверхностью земли, умноженную на некоторый поправочный коэффициент  $k_W(z)$ , зависящий от координаты  $z$ , т. е.

$$W(z) = W_{\Phi}(10)k_W(z).$$

В строительных нормах и правилах [133] при определении коэффициента  $k_W(z)$  рекомендуется отдельно рассматривать три типа

Табл. 6.9. Зависимость поправочного коэффициента  $k_W(z)$  от высоты для трех типов местности [133]

Высота $z$ , м	Тип местности			Высота $z$ , м	Тип местности		
	А	В	С		А	В	С
$\leq 5$	0.87	0.71	0.63	150	1.50	1.38	1.25
10	1.00	0.81	0.63	200	1.57	1.45	1.34
20	1.12	0.92	0.74	250	1.63	1.52	1.42
40	1.23	1.05	0.90	300	1.66	1.58	1.48
60	1.30	1.14	1.00	350	1.66	1.66	1.53
80	1.36	1.21	1.07	$\geq 480$	1.66	1.66	1.66
100	1.42	1.27	1.12	—	—	—	—

местности (А, В, С). Тип местности А включает открытое побережье морей, озер и водохранилищ, пустыню, степь, лесостепь, тундру. Тип местности В включает городские территории, лесной массив и другие участки местности, равномерно покрытые препятствиями высотой более 10 м. Тип местности С включает городские районы и застройки с высотой зданий более 25 м.

В табл. 6.9 приведены рекомендуемые значения коэффициента  $k_W(z)$ , учитывающие распределение скорости ветра по высоте для трех указанных типов местности. Исходными рядами для определения расчетной скорости ветра являются выборки суточных, месячных или годовых наблюдений скорости ветра на высоте флюгера которыми затем пользуются для составления необходимых при расчетах полей концентраций вероятностных таблиц.

Несколько другой подход к определению расчетной скорости ветра для гауссовых моделей был предложен Ирвином [188], который рекомендует определять профиль скорости ветра по формуле

$$W(z) = W_{\Phi}(10)(z/10)^p. \quad (6.72)$$

Им разработаны рекомендации по расчету показателя степени  $p$ , значение которого зависит от параметра шероховатости и атмосферных условий. С использованием известной классификации устойчивости Паскуилла–Гиффорда, рекомендуемые им значения показателя приведены в табл. 6.10.

Для уровней выше 100 м скорость ветра принимается равной ее значению на высоте 100 м. Следовательно, для источника выбросов, имеющего высоту трубы  $H_0 = 100$  м, расчетная скорость ветра  $W$  определяется через скорость ветра на высоте флюгера  $W_{\Phi}$  по фор-

Табл. 6.10. Зависимость показателя  $p$  от класса устойчивости атмосферы при различных значениях параметра шероховатости  $z_0$  [188]

Параметр $z_0, \text{м}$	Класс устойчивости					
	А	В	С	Д	Е	Ф
0.01	0.05	0.06	0.06	0.12	0.32	0.53
0.10	0.08	0.09	0.11	0.16	0.34	0.54
1.00	0.17	0.17	0.20	0.27	0.38	0.61
3.00	0.27	0.28	0.31	0.37	0.47	0.69

муде

$$W(H) = W_{\Phi}(10) \cdot 10^p. \quad (6.73)$$

Согласно работе [91] скорость ветра на высоте  $H$  связана со скоростью ветра на высоте флюгера  $W_{\Phi}$  соотношением

$$W(H) = W_{\Phi}[(H^{\varepsilon} - z_0^{\varepsilon}) / (10^{\varepsilon} - z_0^{\varepsilon})],$$

где  $\varepsilon$  – безразмерный параметр, зависящий от погодных условий, который определяется по табл. 5.1, а  $z_0$  – параметр шероховатости.

В случае сложной орографии достоверность выбора расчетной скорости значительно осложняется. Практически в общем случае необходимо иметь крупномасштабные карты расчетных скоростей ветра. Построение таких карт требует особых методических разработок.

## 6.9. Оценка высоты подъема аварийного выброса при штилевых условиях

Определение эффективной высоты подъема стационарных непрерывных или залповых выбросов является одним из основных входных параметров в моделях атмосферной диффузии примеси при прогнозировании загрязнения окружающей среды токсическими и радиоактивными веществами.

При рассмотрении сценария аварийного выброса следует различать мгновенный и стационарный выброс в зависимости от его длительности, а также штилевые условия или наличие сносящего ветрового потока. Точное математическое описание процесса залпового или стационарного выброса весьма затруднительно в силу сложности происходящих здесь физических явлений. Поэтому практически при построении математической модели необходимо рассматривать некоторую гипотетическую модель этого явления. Так, несмотря на

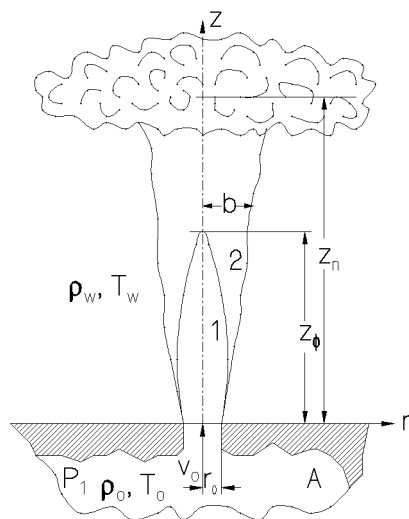


Рис. 6.12. Принципиальная схема аварийного струйного выброса

то, что реальные выбросы иногда содержат не только газоаэрозольную, но и крупную твердую фракцию, здесь основное внимание будет уделено газоаэрозольному выбросу, предполагая, что динамика крупных твердых фракций представляет собой автономную задачу [118].

Обратимся сначала к рассмотрению стационарного непрерывного выброса газоаэрозольной смеси, происходящего, например, при штатных условиях из некоторой подземной шахты, где произошел аварийный взрыв ядерного реактора, типа того, который имел место на Чернобыльской атомной электростанции в апреле 1986 г., когда после взрыва реактора в течение 11 дней продолжалось интенсивное горение графита. Другим характерным примером стационарного выброса с горением является, например, извержение действующего вулкана.

Пусть отверстие, из которого происходит выброс радиоактивного газоаэрозоля, имеет эквивалентный радиус  $r_0$ . Учитывая визуальные наблюдения, будем предполагать, что выброс происходит в виде струи с высокой начальной температурой  $T_0$  и начальной скоростью  $v_0$ , как показано на рис. 6.12. Для простоты пока будем считать атмосферный воздух по температуре однородным и неподвижным с давлением  $p_0$ .

В соответствии с первым законом термодинамики, выделивша-

яся при взрыве и горении реактора энергия будет сообщаться секундне-  
ному массовому расходу газоаэрозоля и расходоваться на преодоле-  
ние сил трения и повышения запаса кинетической и потенциальной  
энергии струи. В зависимости от модели сценария и масштабов авари-  
и, эффективный подъем струи с грибовидным оголовком может  
быть отчетливо видимым и конечным, а при большом времени исте-  
чения и соответствующей стратификации атмосферы может уходить  
далеко вверх за пределы видимости, достигая при этом стратосферы.

В первом приближении можно считать, что энергия взрыва идет  
только на увеличение кинетической энергии смеси, выбрасываемой из  
образовавшегося отверстия под давлением  $p_1$ . Тогда для начальной  
скорости истечения  $v_0$  в соответствии с уравнением Бернулли можно  
получить следующую оценку для начальной скорости  $v_0 =$   
 $= \sqrt{2(p_1 - p_0)/\rho_0}$  истечения струи. По мере развития струи газо-  
аэрозоля и ее взаимодействия с окружающим воздухом скорость и  
температура в ней постепенно будут падать. Характерным обстоя-  
тельством рассматриваемой струи является наличие горящего факела  
в ее ближней области, а также ввиду разности температур в струе  
и окружающей ее среде, наличие действия архимедовых сил плавуче-  
сти, роль которых будет заметной и на больших расстояниях от  
источника выброса.

Для учета преобразования энергии взрыва и потерь на трение  
в выражение для  $v_0$  необходимо ввести корректирующий множитель  
 $k_v$ , т. е. принять  $v_0 = k_v \sqrt{2(p_1 - p_0)/\rho_0}$ . Теоретически значение ко-  
эффициента  $k_v$  можно оценить с точки зрения термодинамики, пред-  
полагая, что выбрасываемый газоаэрозоль представляет собой одно-  
родную смесь со свойствами идеального газа. Тогда тепловой цикл  
в шахте можно изобразить в обычных диаграммах  $1/\rho - P$ ,  $S - T$  и  
получить оценку для  $k_v$ . Однако в практических расчетах значение  
коэффициента  $k_v$  должно быть дополнительно уточнено на основе экс-  
периментальных данных.

Из теории турбулентных струй хорошо известно, что вследствие  
турбулентного перемешивания газового факела с окружающей средой  
образуется зона перемешивания или пограничный слой струи. Если  
температура газа окажется достаточно высока, как это было в слу-  
чае Чернобыльской аварии, то, строго говоря, в рассматриваемом  
сценарии имеет место задача газовой динамики горения. Поэтому,  
как обычно, следует различать две постановки вопроса: газодинами-  
ческую, отвечающую предположению о бесконечной скорости проте-  
кания химической реакции, и тепловую, учитывающую устойчивость  
и режим горения при учете кинетики. Здесь внимание будет сосре-  
доточено на газодинамической постановке задачи с обычным пред-

положением, что процесс горения локализуется в весьма узкой зоне, называемой фронтом пламени. Вне этой зоны происходят процессы переноса импульса, тепла и вещества.

Ограничиваясь такой постановкой задачи о горении газоаэрозоля, дополнительно будем предполагать, что из шахты выбрасывается однородная горючая смесь (топливо) в безграничную среду (атмосферу), заполненную воздухом (окислителем). Эти допущения, как показал Г. Н. Абрамович [3] и другие исследователи [55], позволяют рассматривать задачу о диффузионном горении газов с позиций теории турбулентных струй.

В общей постановке задача о диффузионном горении должна включать в себя интегрирование полной системы уравнений – движения и неразрывности, энергии и диффузии при соответствующих начально-краевых условиях. При этом основную роль здесь играют процессы турбулентного перемешивания. Решение такого рода задач предпринималось различными авторами. Все они обычно использовали предположение о бесконечно большой скорости протекания реакций горения. Однако, несмотря на это допущение, полное решение такой задачи остается достаточно сложным. Здесь будет использован метод расчета, предложенный Л. А. Вулисом [55] с сотрудниками, причем физические константы газа будем считать постоянными.

Итак, сформулируем физическую постановку задачи. Из шахты в атмосферу выбрасывается струя горящего газоаэрозольного вещества. В ближней области струи часть пространства занята горящим турбулентным факелом. В соответствии с принятой схемой (см. рис. 6.12) во внутренней его части сосредоточено топливо и продукты сгорания, а вне его – воздух и продукты сгорания. Внутренняя 1 и внешняя 2 области факела разделены осредненной по времени поверхностью турбулентного фронта пламени. Эта поверхность характеризуется максимальным значением температуры и предполагается, что только на ней происходит практически мгновенно сгорание горючих компонентов. В рассматриваемой гипотетической ситуации, в предположении полного сгорания, концентрация горючего и окислителя на фронте пламени будут равны нулю.

Очевидно, ордината положения фронта пламени с удалением от источника будет сначала расти, а затем на основном участке струи, вследствие падения концентрации горючего, начнет монотонно уменьшаться. Сечение, в котором ордината факела обращается в нуль, можно считать концом факела. За этой точкой все сечение струи заполнено продуктами сгорания, горение заканчивается и факел становится обычной неизотермической струей. Помимо диффузии вещества к фронту пламени и от него, в факеле происходит тур-

булентный перенос тепла в обе стороны от фронта, а также основной процесс рассеивания начального потока импульса. Положение фронта пламени в каждом сечении факела можно найти из условия, что потоки горючего и окислителя, поступающие в единицу времени к фронту пламени, находятся в стехиометрическом соотношении, т. е.

$$\frac{G_{\Gamma}}{G_{\text{ок}}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial C_{\Gamma} / \partial n}{\partial C_{\text{ок}} / \partial n} = \frac{1}{\Omega}.$$

Здесь  $G_{\Gamma}$  и  $G_{\text{ок}}$  – потоки горючего и окислителя;  $\Omega$  – стехиометрический коэффициент. Температура газов на фронте пламени может быть определена из условия баланса энтальпий.

Учитывая сказанное, для решения задачи об определении эффективной высоты подъема аварийного выброса необходимо отдельно рассматривать ближнюю и дальнюю области струи. Расчет ближней области включает в себя задачу определения параметров горящего факела, т. е. его ординату и протяженность фронта пламени  $z_{\Phi}$  (см. рис. 6.12).

В силу сложности задачи ограничимся на данном этапе следующим подходом. Для расчета профилей плотности потока импульса, теплосодержания и вещества в случае осесимметричной задачи необходимо интегрировать следующие уравнения переноса [55]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6.74)$$

где  $\xi$  и  $y$  – переменные Дородницина; индекс при функции  $\varphi$  и координате  $\xi$  определяет такие величины:

$$\varphi_1 = \rho v^2, \quad \varphi_2 = \rho v c_p (T - T_{\Phi}), \quad \varphi_3 = \rho v (C - C_{\Phi}), \quad (6.75)$$

а индекс “ $\Phi$ ” указывает на значение величины на фронте пламени.

Хотя координаты  $\xi_i$ , вообще говоря, различны для разных рассматриваемых субстанций, принимая соответствующие турбулентные числа Прандтля и Шмидта равными 0.75, приближенно примем  $\xi_1 = 0.75\xi_2 = 0.75\xi_3$ . В этом случае на долю эксперимента остается отыскание только одной связи  $\xi_1 = \xi_1(z)$  из сопоставления расчетной и опытной кривых изменения осевой величины импульса струи  $(\rho v^2)_m$ .

Написанные выше уравнения следует решать раздельно для внутренней и внешней областей факела, удовлетворяя соответствующим граничным условиям на оси струи, на бесконечности и на линии разделения областей, т. е. на фронте пламени. Отметим, что последнее условие не относится к первому уравнению для  $\rho v^2$ , поскольку

профиль этой величины не терпит разрыва на фронте пламени. В результате динамическая задача отделяется от тепловой и диффузионной и ее решение может быть заимствовано из расчета обычной затопленной газовой струи конечного размера (без горения).

Рассмотрим граничные условия задачи. Во внутренней области факела

$$\varphi_i = \varphi_{oi}, \quad \text{при } 0 \leq y \leq r_0, \quad \xi_i = 0. \quad (6.76)$$

Во внешней области факела ( $r_0 < y < \infty$ )

$$\begin{aligned} \varphi_1 \rightarrow 0, \quad \varphi_2 \rightarrow \varphi_{\infty 2}, \quad \varphi_3 \rightarrow \varphi_{\infty 3} \\ \text{при } y \rightarrow \infty, \quad \xi_i > 0. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Кроме того, на фронте пламени

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad -\lambda_1 \frac{\partial C_1}{\partial n} \Big|_{\Phi} = \Omega \lambda_2 \frac{\partial C_2}{\partial n} \Big|_{\Phi} \\ \text{при } \xi_2 = \xi_{\Phi 2}, \quad y = y_{\Phi}, \end{aligned} \quad (6.78)$$

где  $\partial/\partial n$  – производная по нормали к фронту пламени, индексы 1 и 2 относятся соответственно к внутренней (топливо) и внешней (окислитель) областям. Кроме того, из условий симметрии течения  $\partial\varphi_1/\partial y = 0$  при  $y = 0$ .

Учитывая тип рассматриваемых дифференциальных уравнений, решение каждого из них ищем в виде [55]

$$\varphi_i = a_i + b_i \Phi(\xi_i, y), \quad (6.79)$$

где функция  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi(\xi_i, y) = \frac{1}{2\pi\xi_i} \int_0^{r_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{r^2 + y^2 - 2ry \sin\theta}{4\xi_i}\right) r dr d\theta. \quad (6.80)$$

В интересующей нас вершине факела ( $\xi = \xi_{\Phi m}$ ,  $y = 0$ ) имеем

$$\Phi = \Phi(\xi_{\Phi m}, 0) = 1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{4\xi_{\Phi m}}\right), \quad (6.81)$$

так как фронт является изотермической поверхностью.

Вычисление интеграла в общем случае производится численно. Для осесимметричного факела при однородных начальных профилях рассматриваемых субстанций удобно воспользоваться так называемыми  $p$ -функциями, табулированными в работе [202].



Решение интересующей нас системы уравнений для рассматриваемого упрощенного случая для областей 1 и 2 имеет вид [55]

$$\rho v^2 = \rho_0 v_0^2 \Phi(\xi_1, y), \quad (6.82)$$

$$\frac{T - T_0}{T_\Phi - T_0} = 1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} F(\xi_2, y), \quad \frac{C}{C_0} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} F(\xi_3, y), \quad (6.83)$$

где

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = \frac{1}{2} \left\{ - \left( \frac{\rho_0}{\rho_\Phi} - 1 \right) F(\xi_2, y) + \sqrt{\left( \frac{\rho_0}{\rho_\Phi} - 1 \right)^2 F^2(\xi_2, y) + 4 \frac{\rho_0}{\rho_\Phi}} \right\};$$

$$F(\xi_2, y) = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\xi_2, y)}} \left[ 1 - \frac{1 - \Phi(\xi_2, y)}{1 - \Phi(\xi_{2\Phi}, y_\Phi)} \right]$$

и

$$\frac{T - T_\infty}{T_\Phi - T_\infty} = \sqrt{\frac{\rho_\Phi}{\rho}} F_1(\xi_2, y), \quad (6.84)$$

$$\frac{C}{C_\infty} = 1 - \sqrt{\frac{\rho_\Phi}{\rho}} F_1(\xi_3, y), \quad (6.85)$$

где

$$\sqrt{\frac{\rho_\Phi}{\rho}} = \left( 1 - \frac{\rho_\Phi}{\rho_\infty} \right) F_1(\xi_2, y) + \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_\Phi}{\rho_\infty} \right)^2 F_1^2(\xi_2, y) + 4 \frac{\rho_\Phi}{\rho_\infty}};$$

$$F_1(\xi_2, y) = \frac{\Phi(\xi_2, y)}{\Phi(\xi_{2\Phi}, y_\Phi)} \sqrt{\frac{\Phi(\xi_{1\Phi}, y_\Phi)}{\Phi(\xi_1, y)}}.$$

Приведенные решения при известных координатах фронта пламени  $\xi_{i\Phi}$ ,  $y_\Phi$  позволяют построить профили скорости, температуры и концентрации в поперечных сечениях факела и струи.

Анализ полученных выражений показывает, что приведенная длина факела  $\sqrt{\xi_{\Phi m}}/r_0$  практически линейно зависит от параметра стехиометрии  $\Omega$ , а это означает, что для заданного горючего реальная длина факела пропорциональна радиусу сопла  $z_\Phi \sim r_0$ , причем коэффициент пропорциональности целиком определяется стехиометрией. Этот результат находится в согласии с опытами разных исследователей по определению длины развитого турбулентного факела. Результаты оценки длины факела, приведенные у Ш. А. Ершина и Л. П. Ярина [77] для пропан-бутанового газа с  $T_0 = 1300^\circ\text{C}$ ,  $v_0 = 61$  м/с и трех различных начальных концентрациях горючего показывают, что  $z_\Phi/r_0 = 18 \div 34$ . В работе Г. Н. Абрамовича [3] для

диффузионного факела водород-кислород получено  $z_{\Phi}/r_0 = 42$ . По-видимому, для интересующего нас аварийного выброса, когда окислителем служит воздух, можно принять следующее приближенное соотношение:

$$z_{\Phi} = k_{\Phi} r_0, \quad k_{\Phi} = 30, \quad (6.86)$$

где  $r_0$  – эквивалентный радиус отверстия, из которого происходит выброс горящего газа. Учитывая, что это соотношение в дальнейшем необходимо обобщить и на случай наличия сносящего ветрового потока, удобно  $z_{\Phi}$  выразить через длину начального участка струи  $z_n$ . Вспоминая, что для круглой затопленной струи  $z_n = 9.3r_0$  [27], имеем  $z_{\Phi} = 3.2z_n$ .

Таким образом, оценив длину факела  $z_{\Phi}$  и считая, что все параметры струи в сечении  $z = z_{\Phi}$  известны, можно приступить к решению задачи об основном участке неизотермической струи, поднимающейся вверх под действием начального импульса и архимедовых сил плавучести, например, на основе метода интегральных соотношений [27]. Здесь следует отметить, что при рассмотрении задачи важно различать еще два случая, когда окружающая среда однородна по температуре (плотности) или стратифицирована. Рассмотрим пока случай однородной по плотности (температуре) окружающей среды. Схема течения в вертикальной струе с положительной плавучестью приведена на рис. 6.12. Характер течения в струях с силами плавучести зависит от соотношения сил инерции, вязкости и плавучести, характеризуемые известными безразмерными критериями Рейнольдса  $Re$  и Ричардсона  $Ri$ . В турбулентных струях течение практически не зависит от числа Рейнольдса и при наличии сил плавучести полностью определяется числом Ричардсона, которое при использовании начальных параметров струи имеет вид

$$Ri_0 = \frac{gr_0}{v_0^2} \frac{\rho_w - \rho_0}{\rho_0} = \frac{gr_0\beta(T_0 - T_w)}{v_0^2}, \quad (6.87)$$

где  $\beta$  – коэффициент теплового расширения.

Определим вертикальную скорость подъема неизотермической плавучей струи за сечением  $z = z_{\Phi}$ , предполагая, что при  $z_{\Phi} = 30r_0$  начальные параметры струи известны, а именно: осевая скорость  $v_m |_{z=z_{\Phi}} = v_{\Phi}$ , осевая избыточная температура

$$\theta_m = T_m - T_w |_{z=z_{\Phi}} = \theta_{\Phi}$$

и ширина струи  $b |_{z=z_{\Phi}} = b_{\Phi}$ . Тогда условие обращения осевой скорости в условный нуль определит эффективную высоту подъема факела.

Для решения этой задачи воспользуемся методом интегральных соотношений [3, 27, 59]. Однако, учитывая сложность задачи, будем исходить из несколько упрощенной схемы. Будем считать, что интенсивность расширения плавучей струи мало отличается от линейного закона. Это допущение лежит в основе теории струй, развиваемой Г. Н. Абрамовичем [3], и подтверждается как экспериментально, так и расчетным путем с использованием более сложных моделей [27, 35, 36] в достаточно широком диапазоне изменения определяющих параметров. Поэтому интересующее нас течение в струе будем описывать следующими интегральными соотношениями количества движения, сохранения энергии и линейным соотношением для изменения ширины струи  $b$  [3, 27]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_0^b v^2 r dr &= g\beta \int_0^b \theta r dr, & \frac{d}{dz} \int_0^b v \theta r dr &= 0, \\ \theta &= T - T_w, & b &= Cz, & \frac{\rho - \rho_w}{\rho_0} &= -\beta(T - T_w). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Здесь  $v$  – локальная продольная составляющая скорости;  $\theta$  – локальная избыточная температура струи;  $T_w$  – температура окружающей среды;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $r$  – радиальная координата;  $C$  – эмпирический коэффициент ( $C = 0.22$ );  $z$  – продольная координата, направленная вертикально вверх. Начало координат расположено на срезе выходного отверстия, где  $z = 0$ . Решение задачи разыскивается для области  $z > z_\Phi$ . Как обычно, в теории турбулентных струй будем считать, что профили скорости и температуры вполне удовлетворительно описываются следующими универсальными зависимостями [27, 59]:

$$\begin{aligned} v/v_m &= 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, & \eta &= r/b, \\ \theta/\theta_m &= 1 - 3\eta^2 + 2.83\eta^3 - 0.75\eta^4, \end{aligned} \quad (6.89)$$

где  $v_m$  и  $\theta_m$  – осевые значения скорости и избыточной температуры. Зная профили скорости и температуры, вычисляем интересующие нас интегралы:

$$\int_0^b v^2 r dr = d_2 v_m^2 b^2, \quad \int_0^b \theta r dr = d_5 \theta_m b^2, \quad \int_0^b v \theta r dr = d_6 v_m \theta_m b^2, \quad (6.90)$$

где

$$d_2 = 0.0523; \quad d_5 = 0.1917; \quad d_6 = 0.064.$$

Подставляя значения соответствующих интегралов в исходные уравнения, приходим к системе уравнений

$$\frac{d}{dz}(v_m^2 b^2) = \frac{d_5}{d_2} g \beta \theta_m b^2, \quad (6.91)$$

$$\frac{d}{dz}(v_m \theta_m b^2) = 0, \quad (6.92)$$

$$b = Cz, \quad (6.93)$$

которую необходимо решать при сформулированных выше начальных условиях.

Второе уравнение можно сразу проинтегрировать, и с учетом начальных условий получим

$$v_m \theta_m b^2 = v_\Phi \theta_\Phi b_\Phi^2 = v_0 \theta_0 r_0^2,$$

где индекс “ $\Phi$ ” означает значение параметров при  $z = z_\Phi$ , а индекс “0” – при  $z = 0$ .

С учетом этого соотношения и выражения для ширины струи (6.93), первое уравнение системы преобразуется к виду

$$\frac{dv_m^3}{dz} + 3 \frac{v_m}{z} = \frac{3}{2} \frac{d_5}{d_2} \frac{g \beta}{C^2} \frac{v_0 \theta_0 r_0^2}{z}. \quad (6.94)$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$v_m^3 = \frac{C_1}{z^3} + A \text{Ri}_0 \frac{v_0^3 r_0}{z}, \quad (6.95)$$

где

$$\text{Ri}_0 = \frac{g \beta r_0 \theta_0}{v_0^2}; \quad A = \frac{3}{4} \frac{d_5}{d_2 C^2}.$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  определим из условия, что при  $z = z_\Phi$ , параметры струи заданы. После простых преобразований имеем:

$$C_1 = v_\Phi^3 z_\Phi^3 - A \text{Ri}_0 v_0^3 r_0 z_\Phi^2. \quad (6.96)$$

Используя это значение  $C_1$ , для осевой скорости окончательно находим:

$$v_m^3 = v_\Phi^3 \frac{z_\Phi^3}{z^3} \left( 1 - A \text{Ri}_0 \frac{v_0^3 r_0}{v_\Phi^3 z_\Phi} \right) + A \text{Ri}_0 v_0^3 \frac{r_0}{z}. \quad (6.97)$$

Полученное выражение для осевой скорости струи показывает, что оно состоит из трех составляющих. Первое слагаемое правой части

описывает инерционный механизм затухания осевой скорости. Он доминирует на ближнем участке струи, где силы инерции еще велики по сравнению с силами плавучести. Второе слагаемое учитывает переходный режим развития струи, когда силы плавучести сопоставимы по величине с силами инерции. Третье слагаемое учитывает чисто конвективный характер движения, который полностью определяется силами плавучести. Из формулы видно, что это слагаемое будет доминировать при больших значениях  $z$ . Поэтому в дальней области струи, пренебрегая первыми двумя слагаемыми, имеющими порядок  $1/z^3$ , по сравнению с третьим слагаемым, имеющим порядок  $1/z$ , для осевой скорости имеем

$$\tilde{v}_m = (ARi_0)^{1/3}(\tilde{z})^{-1/3}, \quad \tilde{v}_m = \frac{v_m}{v_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{r_0}, \quad A = 57. \quad (6.98)$$

Это выражение согласуется с известным в литературе асимптотическим законом затухания для термиков [3, 80]. Оно описывает изменение скорости на конвективном участке струи, который всегда имеет место в струях с положительной плавучестью [3]. Если теперь задать некоторым пороговым значением осевой скорости  $v_m = v_m^{\text{п}}$ , определяющим прекращение вертикального подъема факела, то эффективная высота подъема факела  $\tilde{z}_n$  в соответствии с выражением (6.97) определится соотношением

$$(v_m^{\text{п}})^3 = v_0^3 \tilde{v}_\Phi^3 \frac{\tilde{z}_\Phi^3}{\tilde{z}_n^3} \left( 1 - Ri_0 \frac{A}{\tilde{v}_\Phi^3 \tilde{z}_\Phi} \right) + ARi_0 \frac{v_0^3}{\tilde{z}_n^3}. \quad (6.99)$$

В метеорологии в качестве штилевых условий принято считать условия, когда скорость ветра  $W \leq 0.5$  м/с. Поэтому, естественно, в первом приближении принять это значение осевой скорости в качестве пороговой.

По формуле (6.99) были выполнены численные расчеты для оценки эффективной высоты подъема выбросов при различных начальных числах Ричардсона  $Ri_0$  и восьми значениях начальной скорости  $v_0$ . При этом в качестве необходимых исходных значений было принято  $v_m^{\text{п}} = 0.5$  м/с,  $\tilde{z}_\Phi = 30$ ,  $\tilde{v}_\Phi = 0.4$ . Результаты этих расчетов представлены на рис. 6.13. Легко видеть, что при положительной плавучести с ростом параметра  $Ri_0$  эффективная высота подъема  $\tilde{z}_n$  увеличивается и асимптотически стремится к соответствующему предельному значению. В целом расчеты показывают, что высота подъема носит условный характер и сильно зависит от начальной и пороговой скорости.

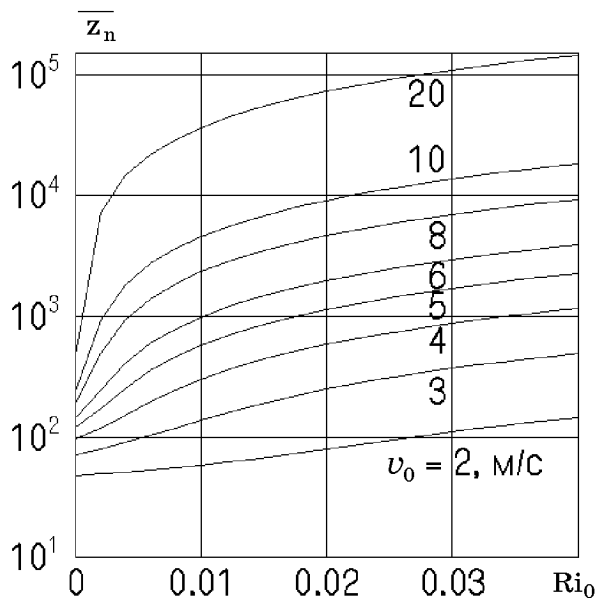


Рис. 6.13. Зависимость высоты подъема выбросов  $\bar{z}_n$  от параметра плавучести  $Ri_0$  при штилевых условиях и различных значениях начальной скорости выброса  $v_0$

## 6.10. Адекватность моделей атмосферной диффузии примеси и измерений концентрации

Проверка адекватности различных моделей атмосферной диффузии представляет большой практический интерес с точки зрения их рекомендации к использованию в соответствующих регламентирующих нормативных документах. Однако работ, посвященных грамотной оценке качества моделей атмосферной диффузии и пределов их применимости выполнено сравнительно мало. При проведении таких оценок необходимо отчетливо представлять, что измеренные концентрации примеси представляют собой всегда некоторые осредненные за время отбора проб значения концентрации, которые являются случайными величинами. В то же время теоретическая модель атмосферной диффузии типа гауссовой предсказывает некоторое детерминированное среднее значение концентрации в смысле математического ожидания, отвечающее среднему ветру и другим средним условиям, и поэтому нельзя требовать полного согласования между результатами модельного расчета и данными единичных измерений

концентрации, даже если бы модель была “идеально правильной”. В действительности для корректного сопоставления данных экспериментов с модельными расчетами должны браться средние по ансамблю значения концентрации для обоих случаев. При этом измеренные концентрации включаются в “ансамбль”, по которому производится осреднение, только в том случае, если есть соответствие метеорологических условий и условий выброса примеси. Тогда по совокупности наблюдений при идентичных условиях можно рассчитать среднее по ансамблю и стандартное отклонение от этого среднего для данной совокупности. Естественно, что для надежного анализа естественной изменчивости концентрации примеси необходим продолжительный натуральный эксперимент.

Большинство известных диффузионных моделей, особенно региональных, к сожалению, основано на представлении о пространственной однородности метеорологических параметров. Более того, при выполнении практических расчетов часто полагают, что значения метеорологических параметров, измеренных на ближайшей метеостанции, можно использовать для расчета диффузии во всей области распространения примеси, а это далеко не всегда соответствует действительности. Репрезентативность метеорологических данных является в этих задачах принципиально существенной. Например, агентство по охране окружающей среды США требует, чтобы при моделировании загрязнения воздуха использовался пятилетний ряд данных метеонаблюдений в рассматриваемом пункте.

При оценке адекватности и чувствительности моделей атмосферной диффузии необходимо помнить, что при каждой попытке сравнить экспериментальные результаты с модельными расчетами приходится сталкиваться с фактором изменения направления ветра с высотой, что моделями, как правило, не учитывается. Однако нет принципиальных причин, которые бы помешали учесть в моделях поворот ветра, но для этого потребуются больше входных данных и наблюдений. Поэтому, прежде чем усложнять модель, важно проанализировать назначение этой модели. Одним специалистам она нужна для научно обоснованного анализа натуральных экспериментов, другим – для проведения расчетов и прогнозных оценок поля концентраций токсических веществ при различных метеорологических условиях, третьим – в качестве нормативного документа при проектировании и строительстве соответствующих объектов и т.д. Поэтому трудно дать на все случаи какие-либо единые рекомендации. Обычно они определяются целями расчета.

## Глава 7

# ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПЛАВУЧИЕ СТРУИ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ

### 7.1. Особенности распространения турбулентных струй в поперечном потоке

Задача, связанная с описанием и расчетом проникновения плоской или круглой струи в сносящий поток жидкости или газа, относится к числу очень сложных и малоизученных задач в теории свободных турбулентных течений. Значительный интерес различных исследователей к ней стимулируется широким кругом ее приложений в различных областях техники, в том числе при выбросах примеси из дымовых и вентиляционных труб в сносящий ветровой поток. Наряду с большой важностью, задача смешения струи со сносящим боковым потоком обладает рядом особенностей, которые затрудняют теоретическое описание таких струй. В настоящее время по существу пока отсутствует общепризнанная модель такого течения. К числу указанных особенностей относятся прежде всего криволинейность струи, асимметрия ее основных параметров и наличие продольной и поперечной компонент скорости внешнего потока на передней выпуклой границе струи, а также образование области разряжения за струей, величина которого зависит от наличия и близости к срезу сопла экранирующей поверхности. В этих условиях форма поперечного сечения и основные параметры струи становятся сложными функциями турбулентного взаимодействия двух потоков с вихреобразованиями, при этом скорость и давление на границах струи изменяются вдоль ее оси, и закон их изменения заранее неизвестен, так как он формируется фактически при обтекании деформируемого препятствия неизвестной формы.

В литературе известен ряд работ теоретического и экспериментального плана, в которых рассматривались задачи этого класса [3, 5, 16, 17, 19, 22, 24, 26, 33, 56, 58, 60, 61, 64, 126, 219]. Первые работы в этой области [29, 45, 47–49, 83, 84] использовали простейшую схематизацию действительного течения, когда изогнутая струя рассматривалась как неизвестное квазитвердое тело. Результаты таких исследований были ограничены определением лишь траектории струи на основе простых эмпирических соотношений [66, 67, 93–95, 125, 150, 152, 153]. Лишь некоторые из них позволяли удовлетворительно предсказать положение условной оси струи, да и то в ограниченном диапазоне соотношения скоростей.



Многие исследователи рассматривали струю как некоторое препятствие в сносящем потоке и не учитывали процесса смещения струи с окружающей средой. Авторы более поздних работ [1, 6, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 60–64, 82, 96, 99, 123, 129, 139, 149, 154] в своих теориях отклоняемых струй уже пытались учитывать перенос количества движения вследствие турбулентного перемешивания. Эти исследования имели определенный прогресс и приближали к более глубокому пониманию механизма взаимодействия и смещения струи с поперечным потоком. Важный вклад в развитие теоретических и экспериментальных исследований этого направления внесла Т. А. Гиршович [3, 53, 60, 61, 63, 64].

Значительная часть работ в этой области посвящена экспериментальному исследованию струй и особенно струи, истекающей из круглого насадка в сносящий поток. Характерной чертой таких струй является наличие пары дискретных вихрей, образующихся за струей, подобно тому, как это имеет место при обтекании круглого цилиндра. Наряду с этим опыты с круглыми струями показали, что на передней выпуклой части струи давление имеет максимальное значение, а за струей образуется область разряжения с пониженным давлением, т. е. опять, как у цилиндра. Продолжая эту аналогию, отметим, что вне зоны смещения струи течение можно считать потенциальным, и там давление и скорость связаны уравнением Бернулли. В силу этого в каждом нормальном к оси струи поперечном сечении скорость внешнего потока жидкости имеет наименьшее значение на внешней выпуклой части струи и по аналогии с цилиндром должна плавно нарастать примерно до экваториальной плоскости, после которой она вновь начинает уменьшаться.

Однако такой характер течения имеет место лишь частично. По мере удаления от сопла указанная картина распределения давления и скоростей приводит к деформации поперечного сечения струи, что в свою очередь изменяет условия обтекания этого участка струи, и действительная картина течения принимает более сложный характер. Вблизи внешних границ струи скорости течения, как и в обычных струях, меньше, чем в центральной ее части, а поэтому здесь необходим меньший градиент давления для уравнивания центробежной силы. Указанное перераспределение давления приводит к тому, что в поперечном сечении круглой струи устанавливается возвратно-циркуляционное вторичное течение, направленное в боковые стороны от центральной выпуклой части струи, а в кормовой ее части, в силу условия сплошности, происходит интенсивная эжекция жидкости, направленная внутрь от задней вогнутой части к передней выпуклой (рис. 7.1). Это вторичное течение накладывается на основное и в результате устанавливается довольно сложное движение жидкости, при

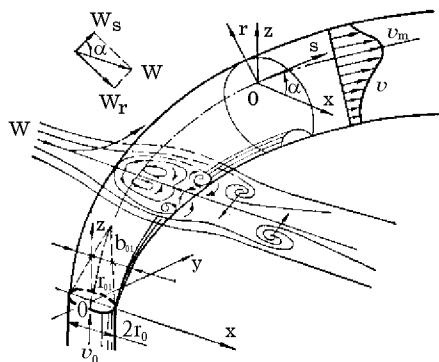


Рис. 7.1. Принципиальная схема распространения круглой струи в сносящем потоке

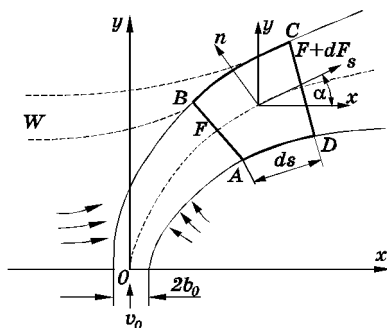


Рис. 7.2. Принципиальная схема струи в сносящем потоке с выделением элементарного объема

котором поперечное сечение струи на определенном участке принимает подковообразную форму [2, 3].

Говоря о результатах экспериментальных исследований струй, распространяющихся в сносящем ветровом потоке, необходимо отметить, что сравнительно хорошие данные имеются лишь о траекториях струи. Значительно меньшее количество работ посвящено измерению полей скорости и температуры, вторичных течений и структуры потока. Однако имеющиеся в этой области опытные данные свидетельствуют о подобии профиля продольных осредненных скоростей при соответствующем выборе масштаба длины и скорости [3, 53, 63, 124, 129, 211].

В силу изложенного, поведение круглой и плоской турбулентных струй в сносящем потоке пока не поддается достаточно четкому теоретическому описанию, так как в общем случае оно включает трехмерное силовое взаимодействие двух пересекающихся под углом потоков. В настоящее время уже известно несколько работ, в которых предпринята попытка ввести в рассмотрение вихревые структуры при анализе струй в сносящем потоке [5, 51, 99, 126, 142, 147, 195, 196]. Подробно этот подход обсуждается в главе 8.

Учитывая вышесказанное, начнем рассмотрение задачи о струе, распространяющейся в сносящем потоке, с вывода основных интегральных соотношений и формулировки основных гипотез и допущений, на базе которых можно исследовать этот класс течений, характеризующийся указанными особенностями, включая эффекты кри-

визны и плавучести.

## 7.2. Основные интегральные соотношения для струи в поперечном потоке

Принимая во внимание сложность задачи и ее особенности, при рассмотрении течений такого класса обратимся к интегральным методам [3, 27, 59].

Для вывода основных интегральных соотношений применительно к струям, истекающим в поперечный поток, используем закон сохранения массы, закон изменения количества движения и закон сохранения энергии в следующей интегральной форме [101]:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho d\tau + \iint_{\sigma} \rho V_n d\sigma = 0, \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau + \iint_{\sigma} \rho \vec{V} V_n d\sigma = \\ &= \iiint_{\tau} \rho \vec{F} d\tau - \iint_{\sigma} p \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma} \vec{\tau}_n d\sigma, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) d\tau + \iint_{\sigma} \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) V_n d\sigma + \\ &+ \iiint_{\tau} \rho (\vec{F} \vec{V}) d\tau + \iint_{\sigma} p (\vec{n} \vec{V}) d\sigma + \iint_{\sigma} (\vec{\tau}_n \vec{V}) d\sigma + \\ &+ \iint_{\sigma} q_n d\sigma + \iiint_{\tau} \rho \varepsilon d\tau. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь  $\vec{V}$  – местная скорость;  $\rho(\vec{V} d\tau)$  – поток массы;  $\tau$  – объем занимаемой массы жидкости в момент времени  $t$ ;  $\sigma$  – поверхность, ограничивающая объем  $\tau$ ;  $\rho$  – плотность среды;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к элементу поверхности  $d\sigma$ ;  $V_n$  – нормальная составляющая скорости;  $p$  – давление;  $\vec{F}$  – вектор массовых сил, отнесенных к единице массы;  $\vec{\tau}_n$  – вектор сил трения, действующий на единичную площадку, положение которой в пространстве определяется нормалью  $n$ ;  $U$  – внутренняя энергия единицы массы жидкости;  $q_n$  – количество тепла, проходящего через единицу поверхности  $\sigma$  внутрь объема  $\tau$  в единицу времени;  $\rho\varepsilon$  – объемное выделение тепла.

Применим эти уравнения для вывода основных интегральных соотношений для струи, истекающей в поперечный поток, который

имеет скорость  $W$ , направленную параллельно оси  $Ox$ . С этой целью рассмотрим рис. 7.2, где схематично показано истечение струи в поперечный поток и принята система координат. На рисунке штриховыми линиями обозначены линии тока, поверхность струи пересекается ими. Наряду с декартовой системой координат удобно ввести криволинейную систему координат  $s, n, \xi$  так, что ось струи совпадает с осью координат  $s$ , которая криволинейна, а  $n$  и  $\xi$  – прямолинейные нормали и бинормаль к ней. В качестве фиксированного объема  $\tau$  рассмотрим контур  $ABCD$  длиной  $ds$ , ограниченный двумя нормальными к оси струи сечениями:  $AB = F$  в точке  $s$  и  $CD = F + dF$  в точке  $s + ds$ . Поверхность  $\sigma$ , которая ограничивает выделенный объем, состоит из боковой поверхности  $w$  и поперечных сечений  $F$  и  $F + dF$ . Нормальная составляющая скорости в сечении  $AB$  равна  $-v_s$  и равна  $v_s$  в сечении  $CD$ . В данном случае объем  $\tau$  приближенно равен  $Fds$ , следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho dF ds. \quad (7.4)$$

Рассмотрим поверхностный интеграл, входящий в уравнение (7.1). Для рассматриваемого случая его можно записать в виде

$$\iint_{\sigma} \rho V_n d\sigma = - \iint_F \rho v_s dF + \iint_{F+dF} \rho v_s dF + \iint_w \rho v_{\eta} dw, \quad (7.5)$$

где  $\eta$  – внешняя нормаль к боковой поверхности  $w$  выделенного объема струи, и, следовательно,

$$v_{\eta} = v_s \cos(\eta s) + v_n \cos(\eta n) + v_{\xi} \cos(\eta \xi). \quad (7.6)$$

Поверхность  $w = \chi ds$ , где  $\chi$  – периметр поперечного сечения струи. Учитывая вышесказанное, уравнение (7.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho dF ds - \iint_F \rho v_s dF + \iint_{F+dF} \rho v_s dF + \iint_w \rho v_s \cos(\eta, s) dw + \\ + \iint_w \rho v_n \cos(\eta, n) dw + \iint_w \rho v_{\xi} \cos(\eta, \xi) dw = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (7.7) вспомним следующие формулы [46]:

$$\lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \iint_w f dw = \oint_{\chi} f \frac{1}{\sin(\eta, s)} d\chi, \quad \oint_{\chi} \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi = -\frac{\partial F}{\partial s}, \quad (7.8)$$

где  $f$  – произвольная функция. Учтя эти формулы, разделим уравнение (7.7) на  $ds$  и устремим  $ds$  к нулю, а при переходе к пределу примем во внимание следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_{F+dF} \rho v_s dF - \iint_F \rho v_s dF \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho dF ds \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho dF, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_w \rho v_s \cos(\eta, s) dw \right) &= \\
 &= \oint_{\chi} \rho v_s \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi = -\rho v_s \Big|_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s}, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_w \rho v_n \cos(\eta, n) dw \right) &= \oint_{\chi} \rho v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_w \rho v_{\xi} \cos(\eta, \xi) dw \right) &= \oint_{\chi} \rho v_{\xi} \frac{\cos(\eta, \xi)}{\sin(\eta, s)} d\chi.
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

В результате получим интегро-дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \\
 &= \rho v_s \Big|_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s} - \oint_{\chi} \rho v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi - \oint_{\chi} \rho v_{\xi} \frac{\cos(\eta, \xi)}{\sin(\eta, s)} d\chi.
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Для вывода интегрального соотношения, выражающего закон изменения количества движения (переноса импульса), воспользуемся уравнением (7.2) и распишем его для объема струи  $\tau = F ds$  подобно тому, как и при выводе уравнения сохранения массы. В целях удобства введем предварительно следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 p n_s &= \vec{p}_s, & p n_{\eta} &= \vec{p}_{\eta}, \\
 n_{\eta} &= \vec{i} \cos(\eta, s) + \vec{j} \cos(\eta, n) + \vec{k} \cos(\eta, \xi).
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Тогда уравнение (7.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho \vec{V} d\tau - \iint_F \rho v_s \vec{V} dF + \iint_{F+dF} \rho v_s \vec{V} dF + \\
 & + \iint_w \rho v_{\eta} \vec{V} dw = \iiint_{\tau} \rho \vec{\mathcal{F}} d\tau + \iint_F \vec{p}_s dF - \iint_{F+dF} \vec{p}_s dF - \\
 & - \iint_w \vec{p}_{\eta} dw - \iint_F \vec{\tau}_s dF + \iint_{F+dF} \vec{\tau}_s dF + \iint_w \vec{\tau}_{\eta} dw.
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Если разделить это уравнение на  $ds$  и перейти к пределу, когда  $ds \rightarrow 0$ , то, учитывая соотношения

$$\begin{aligned}
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_{F+dF} \rho v_s \vec{V} dF - \iint_F \rho v_s \vec{V} dF \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s \vec{V} dF, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_{F+dF} \vec{p}_s dF - \iint_F \vec{p}_s dF \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{p}_s dF, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_{F+dF} \vec{\tau}_s dF - \iint_F \vec{\tau}_s dF \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{\tau}_s dF, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_w \rho v_{\eta} \vec{V} dw \right) &= \oint_{\chi} \rho \vec{V} \frac{v_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_w \vec{p}_{\eta} dw \right) &= \oint_{\chi} \frac{\vec{p}_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi, \\
 \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_w \vec{\tau}_{\eta} dw \right) &= \oint_{\chi} \frac{\vec{\tau}_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

получаем следующую форму записи уравнения переноса импульса:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho \vec{V} dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s \vec{V} dF + \oint_{\chi} \rho \vec{V} \frac{v_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi = \\
 & = \iint_F \rho \vec{\mathcal{F}} dF - \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{p}_s dF - \oint_{\chi} \frac{\vec{p}_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi + \\
 & + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{\tau}_s dF + \oint_{\chi} \frac{\vec{\tau}_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Для того, чтобы записать векторное уравнение (7.14) в проекциях на оси криволинейной системы координат  $s, n, \xi$ , вычислим предварительно такие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s \vec{V} dF, \quad \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{p}_s dF, \quad \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{\tau}_s dF.$$

С этой целью запишем векторы  $\vec{V}$ ,  $\vec{p}_s$  и  $\vec{\tau}_s$  в проекциях на оси выбранной криволинейной системы координат в виде

$$\vec{V} = \vec{i}v_s + \vec{j}v_n + \vec{k}v_\xi, \quad \vec{p}_s = \vec{i}p, \quad \vec{\tau}_s = \vec{i}\tau_{ss} + \vec{j}\tau_{sn} + \vec{k}\tau_{s\xi},$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орты касательной нормали и бинормали к  $s$ , причем из-за криволинейности оси струи  $\vec{i} = \vec{i}(s)$ ,  $\vec{j} = \vec{j}(s)$ ,  $\vec{k} = \vec{k}(s)$ . Тогда имея ввиду, что  $d\vec{i}/ds = \vec{j}/R$ ,  $d\vec{j}/ds = \vec{i}/R - \vec{k}/\varkappa$ ,  $d\vec{k}/ds = -\vec{j}/\varkappa$ ,  $1/R = d\alpha/ds$ , (здесь  $\alpha$  – локальный угол между осью  $s$  и направлением сносящего потока  $\vec{W}$ ;  $R$  – радиус кривизны оси струи;  $\varkappa$  – радиус кручения оси  $s$ ), получим следующие интересные выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s \vec{V} dF &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s (\vec{i}v_s + \vec{j}v_n + \vec{k}v_\xi) dF = \\ &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF + \vec{j} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_n dF + \vec{k} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_\xi dF + \\ &+ \vec{j} \frac{1}{R} \iint_F \rho v_s^2 dF + \left( \frac{\vec{i}}{R} - \frac{\vec{k}}{\varkappa} \right) \iint_F \rho v_s v_n dF - \frac{\vec{j}}{\varkappa} \iint_F \rho v_s v_\xi dF, \\ \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{p}_s dF &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F p dF + \frac{\vec{j}}{R} \iint_F p dF, \\ \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \vec{\tau}_s dF &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{ss} dF + \vec{j} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{sn} dF + \vec{k} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{s\xi} dF + \\ &+ \vec{j} \frac{1}{R} \iint_F \tau_{ss} dF + \left( \frac{\vec{i}}{R} - \frac{\vec{k}}{\varkappa} \right) \iint_F \tau_{sn} dF - \frac{\vec{j}}{\varkappa} \iint_F \tau_{s\xi} dF. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Если теперь подставить выражения (7.15) в (7.14) и спроектировать (7.14) на оси  $s, n, \xi$ , то получим искомую запись уравнений движения, однако они будут иметь громоздкий вид, и в такой форме их выписывать здесь нецелесообразно. Для их упрощения применим ряд допущений. Пусть векторы скорости набегающего потока  $\vec{W}$  и струи  $\vec{V}$ , а также вектор сил тяжести  $\vec{g}$  лежат в одной плоскости  $sOn$ .

Тогда  $\varkappa = \infty$ , а векторы  $\vec{V}$ ,  $\vec{g}$  будут иметь лишь по две компоненты:

$$\vec{V}(v_s, v_n, 0), \quad \vec{g}(g_s, g_n, 0).$$

Поэтому члены уравнений, содержащие множители  $v_\xi$  и  $1/\varkappa$ , можно опустить. Далее члены уравнений, содержащие компоненты тензора вязких напряжений под знаком криволинейного интеграла по периметру  $\chi$  также можно принять равными нулю, так как внешний набегающий на струю поток считается потенциальным. Принимая это во внимание и учитывая, что  $\vec{p}_\eta = \vec{i}p \cos(\eta, s) + \vec{j}p \cos(\eta, n) + \vec{k}p \cos(\eta, \xi)$ , уравнение сохранения массы (7.10) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \rho v_s \Big|_\chi \frac{\partial F}{\partial s} - \oint_\chi \rho v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\xi, \quad (7.16)$$

а уравнения движения (7.14) в проекциях на оси  $s$ ,  $n$ ,  $\xi$  запишутся соответственно в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho v_s dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_n dF + \\ & + \oint_\chi \rho v_s^2 \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi + \oint_\chi \rho v_s v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \\ & = \iint_F^\chi \rho \mathcal{F}_s dF - \frac{\partial}{\partial s} \iint_F^\chi \rho dF - \oint_\chi p \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F^\chi \tau_{ss} dF + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F^\chi \tau_{sn} dF, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho v_n dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_n dF + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_n^2 dF + \\ & + \oint_\chi \rho v_n v_s \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi + \oint_\chi \rho v_n^2 \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \\ & = \iint_F^\chi \rho \mathcal{F}_n dF - \oint_\chi p \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F^\chi \tau_{sn} dF + \\ & + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F^\chi \tau_{ss} dF - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F^\chi p dF, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{s\xi} dF - \oint_\chi p \frac{\cos(\eta, \xi)}{\sin(\eta, s)} d\chi = 0. \quad (7.19)$$



Для выяснения физического смысла последнего интеграла в выражении (7.16) вспомним об эжекционных свойствах струи. Очевидно, что этот интеграл представляет собой присоединенный расход или эжекционную функцию. Если ввести в рассмотрение скорость эжекции или вовлечения

$$v_i = -\frac{1}{\chi} \oint_{\chi} v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi,$$

то уравнение сохранения массы примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \rho v_s |_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s} + \rho v_i \chi. \quad (7.20)$$

Прежде, чем приступить к анализу уравнения энергии (7.3), несколько преобразуем его. С этой целью умножим уравнение переноса количества движения (7.2) скалярно на  $\vec{V}$  и вычтем его почленно из уравнения (7.3). Тогда, с учетом соотношения (7.1), для уравнения энергии получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho U d\tau + \iint_{\sigma} \rho U v_n d\sigma = \iint_{\sigma} q_n d\sigma + \iiint_{\tau} \rho \varepsilon d\tau. \quad (7.21)$$

Замечая, что удельная внутренняя энергия  $U$  при определенных допущениях для несжимаемой жидкости будет

$$U = c_p T = cT,$$

уравнение энергии (7.21) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho c T d\tau + \iint_{\sigma} \rho c T v_n d\sigma = \iint_{\sigma} q_n d\sigma + \iiint_{\tau} \rho \varepsilon d\tau. \quad (7.22)$$

Воспользуемся этим общим соотношением для вывода интегрального соотношения энергии для струи в поперечном потоке. С этой целью распишем его как и ранее для объема струи  $\tau = F ds$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho c T dF ds - \iint_F \rho c T v_s dF + \\ & + \iint_{F+dF}^{\tau} \rho c T v_s dF + \iint_{\omega}^{\omega} \rho c T v_{\eta} d\omega = \\ & = - \iint_F q_s dF + \iint_{F+dF} q_s dF + \iint_{\omega}^{\omega} q_{\eta} d\omega + \iiint_{\tau} \rho \varepsilon dF ds. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Рассуждая аналогично тому, как и при выводе уравнения переноса количества движения, разделим уравнение (7.23) на  $ds$  и устремим  $ds$  к нулю. Рассматривая отдельные слагаемые и их пределы при  $ds \rightarrow 0$ , можно записать

$$\begin{aligned} \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( - \iint_F \rho c T v_s dF + \iint_{F+dF} \rho c T v_s dF \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho c T v_s dF, \\ \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_{\omega} \rho c T v_{\eta} d\omega \right) &= \oint_{\chi} \rho c T \frac{v_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi, \\ \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( - \iint_F q_s dF + \iint_{F+dF} q_s dF \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_F q_s dF, \\ \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \iint_{\omega} q_{\eta} d\omega \right) &= \oint_{\chi} \frac{q_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Тогда, учитывая соотношения (7.24), (7.8) и (7.6), из (7.23) получаем следующее уравнение переноса энергии для струи в поперечном потоке:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho c T dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho c T v_s dF + \\ &+ c T_w \left[ - \rho v_s \Big|_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s} + \oint_{\chi} \rho v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi + \oint_{\chi} \rho v_{\xi} \frac{\cos(\eta, \xi)}{\sin(\eta, s)} d\chi \right] = \\ &\frac{\partial}{\partial s} \iint_F q_s dF + \oint_{\chi} \frac{q_{\eta}}{\sin(\eta, s)} d\chi + \iint_F \rho \varepsilon dF, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где  $T_w = T|_{\chi}$  – температура на внешней границе струи, т. е. в окружающей струю среде.

Если теперь воспользоваться законом сохранения массы в форме (7.10) и учесть, что поток тепла под знаком криволинейного интеграла равен нулю в силу отсутствия там разности температур, то уравнение (7.25) преобразуется к более компактному виду:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho c T dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho c T v_s dF - \\ &- c T_w \left( \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF \right) = \frac{\partial}{\partial s} \iint_F q_s dF + \iint_F \rho \varepsilon dF. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Для стационарного случая уравнение (7.26) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho c T v_s dF - c T_w \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \frac{\partial}{\partial s} \iint_F q_s dF + \iint_F \rho \varepsilon dF. \quad (7.27)$$

Уравнение (7.27) также можно преобразовать с помощью тождества ( $\rho = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$ )

$$c T_w \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho c T_w v_s dF - \frac{\partial T_w}{\partial s} \iint_F \rho c v_s dF. \quad (7.28)$$

В результате для уравнения энергии имеем следующую окончательную форму:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho c (T - T_w) v_s dF = \\ & = - \frac{\partial T_w}{\partial s} \rho c \iint_F v_s dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F q_s dF + \iint_F \rho \varepsilon dF. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Полученные уравнения (7.17)–(7.20) и (7.29) представляют собой основные интегральные соотношения для плавучих струй в поперечном стратифицированном потоке.

### 7.3. Приближение пограничного слоя для уравнений струи в поперечном потоке

Полученная выше система интегро-дифференциальных уравнений описывает динамику турбулентной струи в поперечном потоке в достаточно общем виде и в математическом отношении остается по-прежнему довольно сложной. Предположив кривизну струи умеренной, упростим эти соотношения с помощью допущений, основанных на приближении пограничного слоя.

Суть приближения пограничного слоя, как известно [101, 151], состоит в том, что в механике жидкости и газа существует большой класс задач, в которых изменение характеристик потока вдоль направления движения мало по сравнению с их изменением в поперечном направлении. Хорошо известно, что слой смешения затопленных и спутных турбулентных струй обладает всеми свойствами пограничного слоя. Эти закономерности изучались рядом исследователей и достаточно полно изложены, например, у Г. Н. Абрамовича [3]. Если скорость сносящего поперечного потока меньше начальной скорости струи, то ее слой смешения также обладает свойствами пограничного слоя, поскольку изменение параметров течения

в поперечном направлении значительно превосходит их изменение в продольном направлении, и давление в поперечном сечении струи обычно меняется столь незначительно, что этим изменением в большинстве случаев можно пренебречь. Кроме того, существенную роль при преобразовании основных интегральных соотношений для струи в поперечном потоке играет то, что здесь мы имеем дело с параметрами струи, осредненными по площади поперечного сечения струи и по его периметру.

Рассмотрим подробно в рамках принятой выше схемы течения приближение пограничного слоя для турбулентной струи в поперечном потоке. Напомним, что вдоль криволинейной оси струи  $s$  скорость струи и другие параметры изменяются медленно по сравнению с их изменением вдоль оси  $n$ , нормальной к оси  $s$ . При этом толщина слоя смешения имеет порядок величины  $\delta$ , который достаточно мал по сравнению с расстоянием  $s$ , на котором интересуются закономерностями распространения струи.

Прежде всего рассмотрим уравнение сохранения массы (7.20) и оценим порядок его отдельных членов. Пусть характерными масштабами течения будут:  $\rho \sim \rho_0$ ,  $v_s \sim V_0$ ,  $s \sim L$ ,  $n \sim \delta$  (знак  $\sim$  означает порядок величины). При этом вследствие узости слоя смешения  $\delta/L \ll 1$ . Тогда для соответствующих членов рассматриваемого уравнения имеем следующие оценки:

$$\frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF \sim \frac{\rho_0 V_0 \delta^2}{L}, \quad \rho v_s |_\chi \frac{\partial F}{\partial s} \sim \frac{\rho_0 V_0 \delta^2}{L}, \quad \rho v_i \chi \sim \rho_0 v_i \delta. \quad (7.30)$$

Предположим, что все члены уравнения (7.20) имеют один и тот же порядок, тогда для скорости  $v_i$  имеем такую оценку:

$$v_i \sim v_n \sim \frac{V_0 \delta}{L} \quad \text{и, следовательно,} \quad \frac{v_n}{V_0} \sim \frac{\delta}{L} \ll 1. \quad (7.31)$$

Рассмотрим теперь уравнение движения (7.17) в проекции на ось  $s$ . В качестве масштаба времени примем  $T \sim L/V_0$ , а за масштаб давления примем удвоенный скоростной напор, т.е.  $p_0 \sim \rho V_0^2$ . Полагая далее, что составляющие тензора напряжений трения имеют масштаб  $\tau_0$ , и учитывая, что в общем случае величина напряжения сдвига зависит от коэффициентов корреляции и пропорциональна пульсационной составляющей скорости [148], для масштаба трения  $\tau_0$  имеем  $\tau_0 \sim \rho_0 V_0^2 \delta/L$ . Если предположить, что радиус кривизны велик  $R = (\partial\alpha/\partial s)^{-1} \sim L$ , то, учитывая вышесказанное, для соответству-

ющих членов уравнения (7.17) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho v_s dF &\sim \frac{1}{T} \rho_0 V_0 \delta^2 \sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^2}{L}, \\
 \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF &\sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^2}{L}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_n dF \sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^3}{L^2}, \\
 \oint \rho v_s^2 \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi &\sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^2}{L}, \quad \text{см. (7.8),} \\
 \oint \rho v_s v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi &\sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^2}{L}, \quad \oint p \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi \sim \rho_0 V_0^2 \delta, \\
 \frac{\partial}{\partial s} \iint_F p dF &\sim \frac{p_0 \delta^2}{L} \sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^2}{L}, \quad \oint p \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi \sim p_0 \frac{\delta^2}{L} \sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^2}{L}, \\
 \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{ss} dF &\sim \frac{\tau_0 \delta^2}{L} \sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^3}{L^2}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \tau_{sn} dF \sim \frac{\tau_0 \delta^2}{L} \sim \frac{\rho_0 V_0^2 \delta^3}{L^2}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\delta/L \ll 1$ , при сравнении порядка величин соответствующих слагаемых видим, что членами

$$\frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{ss} dF, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \tau_{sn} dF, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_n dF,$$

имеющими порядок  $\sim \delta^3/L^2$ , можно пренебречь по сравнению с остальными членами уравнения (7.17).

Аналогичным образом оцениваем члены уравнения (7.18). В результате находим, что в уравнении движения в проекции на ось  $n$  можно пренебречь членами

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho v_n dF, \quad \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s v_n dF, \quad \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \tau_{sn} dF, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \tau_{ss} dF$$

как величинами порядка  $\rho_0 V_0^2 \delta^3/L^2$  по сравнению с членами порядка  $\rho_0 V_0^2 \delta^2/L$ . Оценивая далее члены уравнения (7.19), видим, что первым членом уравнения можно пренебречь по сравнению со вторым.

Принимая во внимание выполненные оценки, основные интегральные соотношения для струи в сносящем потоке (7.17)–(7.19)

в приближении пограничного слоя принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho v_s dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF + \\
 & + \oint_{\chi} \rho v_s^2 \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi + \oint_{\chi} \rho v_s v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \\
 & = \iint_F \rho \mathcal{F}_s dF - \frac{\partial}{\partial s} \iint_F p dF - \oint_{\chi} p \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi,
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF + \oint_{\chi} \rho v_s v_n \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi + \oint_{\chi} \rho v_n^2 \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \\
 & = \iint_F \rho \mathcal{F}_n dF - \oint_{\chi} p \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F p dF,
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\oint_{\chi} p \frac{\cos(\eta, \xi)}{\sin(\eta, s)} d\chi = 0. \tag{7.34}$$

Несмотря на то, что исходная система уравнений значительно упростилась, она по-прежнему остается достаточно сложной для выполнения конкретных расчетов. Поэтому целесообразно продолжить приближенный анализ и соответствующие упрощения. Так, основываясь на постоянстве давления в плоскости поперечного сечения струи, можно записать следующее интересующее нас соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial s} \iint_F p dF = p \frac{\partial F}{\partial s} + F \frac{\partial p}{\partial s}. \tag{7.35}$$

Далее с помощью формулы (7.8) третий член уравнения (7.32) в левой части и последний член в правой части преобразуется к виду

$$\oint_{\chi} \rho v_s^2 \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi = -\rho v_s^2 \Big|_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s}, \quad \oint_{\chi} p \operatorname{ctg}(\eta, s) d\chi = -p \frac{\partial F}{\partial s}. \tag{7.36}$$

Используя соотношения (7.35) и (7.36), основное уравнение движения (7.32) в продольном  $s$  направлении запишется в форме

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho v_s dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF - \rho v_s^2 \Big|_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s} + \\
 & + \oint_{\chi} \rho v_s v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \iint_F \rho \mathcal{F} dF - F \frac{\partial p}{\partial s}.
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Введем теперь понятие о границе струи. На данном этапе границу струи будем определять как линию постоянной локальной избыточной скорости, отличающейся от осевой избыточной скорости на наперед заданную величину  $\varepsilon$ . Исходя из этого определения, можно записать, что

$$v_s|_{\chi} = W_s + \varepsilon(v_{sm} - W_s), \quad v_n|_{\chi} = W_n, \quad (7.38)$$

где  $W_s$  и  $W_n$  – соответствующие компоненты скорости внешнего поперечного потока на границе струи;  $v_{sm}$  – максимальная компонента скорости струи вдоль направления  $s$ . Тогда, используя теорему Бернулли на границе раздела струя – поперечный поток, для давления имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho W_s \frac{\partial W_s}{\partial s}. \quad (7.39)$$

Кроме того, третий член уравнения (7.37) может быть записан в виде

$$\oint_{\chi} \rho v_s v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = v_s|_{\chi} \oint_{\chi} \rho v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi,$$

который затем с помощью уравнения (7.16) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \oint_{\chi} \rho v_s v_n \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \\ & = v_s|_{\chi} \left[ \rho v_s|_{\chi} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho dF - \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF \right]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Подставляя теперь соотношения (7.38)–(7.40) в (7.37) для уравнения движения вдоль оси  $s$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho(v_s - W_s) dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF - \\ & - W_s \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \iint_F \rho \mathcal{F}_s dF + \rho F W_s \frac{\partial W_s}{\partial s}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Здесь член с параметром  $\varepsilon$  опущен в силу того, что  $\varepsilon$  может быть принято любой наперед заданной малой величиной.

Для дальнейшего преобразования уравнения (7.41) воспользуемся тождеством

$$W_s \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s W_s dF - \frac{\partial W_s}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF. \quad (7.42)$$

Тогда, подставляя (7.42) в (7.41), после несложных преобразований получаем окончательную интегральную форму уравнения движения для струи в поперечном потоке в продольном  $s$  направлении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_F \rho(v_s - W_s) dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s (v_s - W_s) dF = \\ = -\frac{\partial W_s}{\partial s} \iint_F \rho(v_s - W_s) dF + \iint_F \rho \mathcal{F}_s dF. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Нетрудно заметить, что когда объемные силы отсутствуют ( $\mathcal{F}_s = 0$ ) и течение стационарно, то уравнение (7.43) становится тождественным известному уравнению импульсов Кармана, если продольную компоненту скорости сносящего потока  $W_s$  заменить скоростью набегающего потока  $V_\infty$  в случае течения в пограничном слое.

Обратимся теперь к преобразованию уравнения движения в проекции на ось  $n$  (7.33). Легко видеть, что после группировки второго и третьего членов уравнения и использования уравнения сохранения массы в форме (7.16), уравнение (7.33) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF - W_n \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \\ = \iint_F \rho \mathcal{F}_n dF - \oint_\chi p \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F p dF. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Контурный интеграл от давления по периметру струи  $\chi$  физически представляет собой силу сопротивления струи длиной  $ds$ . Тогда, вводя в рассмотрение коэффициент сопротивления струи  $\lambda$ , для этого члена уравнения можно записать

$$\oint_\chi p \frac{\cos(\eta, n)}{\sin(\eta, s)} d\chi = \pi b \lambda \rho W_n^2, \quad (7.45)$$

где  $b$  – локальный радиус струи. Используя это соотношение, получаем окончательную форму уравнения движения в проекции на ось  $n$  в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \rho v_s^2 dF - W_n \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho v_s dF = \\ = \iint_F \rho \mathcal{F}_n dF + -\lambda \pi b \rho W_n^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F p dF. \end{aligned} \quad (7.46)$$



Перейдем теперь к анализу уравнения переноса энергии (7.29). Пусть масштаб температуры будет  $T_0$ . Нетрудно видеть, что если диссипативными эффектами пренебречь, то в приближении пограничного слоя все члены уравнения имеют одинаковый порядок, и оно имеет вид

$$\rho c \frac{\partial}{\partial s} \iint_F (T - T_w) v_s dF = -\frac{\partial T_w}{\partial s} \rho c \iint_F v_s dF + \frac{\partial}{\partial s} \iint_F q_s dF. \quad (7.47)$$

В случае, когда температура струи  $T$  отличается от температуры окружающей среды  $T_w$ , струя будет испытывать действие архимедовых сил и станет плавучей, причем плавучесть в общем случае может быть и положительной, и отрицательной.

Полученные уравнения (7.20), (7.43), (7.46) и (7.47) представляют собой основные интегральные соотношения для плавучих струй в сносящем поперечном стратифицированном потоке в приближении пограничного слоя.

В случае рассмотрения задачи о стационарной струе, истекающей в сносящий поток из круглого сопла, при допущении, что ее поперечное сечение не деформируется, а остается круглым с некоторым эффективным радиусом  $b^*(s) = \sqrt{F/\pi}$  ( $F$  – поперечное сечение струи), причем  $F = \pi r^2$ ,  $dF = 2\pi r dr$ , система полученных выше исходных интегральных соотношений запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s r dr = v_i b^* + W_s \frac{db^*}{ds}, \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s (v_s - W_s) r dr = \int_0^{b^*} \mathcal{F}_s r dr - \frac{\partial W_s}{\partial s} \int_0^{b^*} (v_s - W_s) r dr, \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s^2 r dr = W_r \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s r dr + \int_0^{b^*} \mathcal{F}_r r dr - \lambda \pi b^* W_r^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \int_0^{b^*} p r dr, \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s (T - T_w) r dr = -\frac{\partial T_w}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s r dr. \quad (7.51)$$

Таким образом, если считать струю круглой с радиусом  $b^*$ , то в рамках этого допущения выписанная система уравнений позволяет рассчитать основные характеристики круглой струи в поперечном потоке. Ниже такая задача будет рассмотрена подробно. Однако

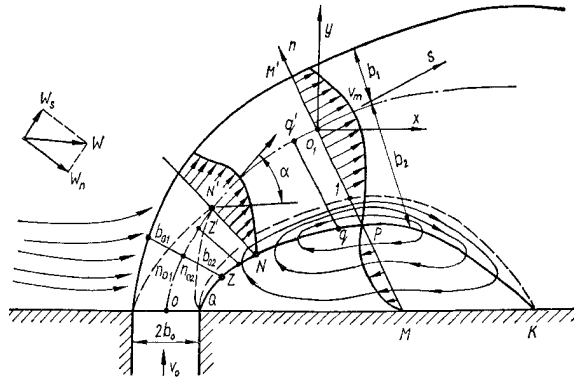


Рис. 7.3. Схема плоской струи в сносящем потоке для определения скорости вовлечения

следует заметить, что в действительности поперечное сечение такой струи будет деформироваться под воздействием поперечного потока, и поэтому в дальнейшем будет рассмотрена и другая модель, учитывающая вихревые образования и позволяющая учесть деформацию поперечного сечения струи, распространяющейся в сносящем потоке.

#### 7.4. Основные уравнения для плоской струи в поперечном потоке

Плоские струи имеют важное практическое значение при расчете различного рода воздушных завес и в ряде других случаев.

При выводе основных интегральных уравнений для струи в сносящем потоке на поперечное сечение струи никаких особых ограничений не накладывалось, поэтому в такой общей форме они применимы как для струй, истекающих из плоского насадка, так и для струй, истекающих из круглого насадка. В случае плоской струи ее поперечное сечение, например на основном участке, будет  $F = b_1 + b_2$ ,  $dF = dn$ , где  $b_1$  и  $b_2$  – полуширины передней выпуклой и задней вогнутой зон смещения струи (рис. 7.3), а вектор скорости набегающего на струю потока  $W$  будет иметь две компоненты  $W_s$  и  $W_n$ . Следовательно, соответствующие исходные уравнения в стационарной задаче для плоской струи в поперечном потоке в рамках приближения Буссинеска в соответствии с полученными выше общими интегральными соотно-

шениями будут иметь вид

$$\frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn = v'_i + v''_i + W_s \left( \frac{db_1}{ds} + \frac{db_2}{ds} \right), \quad (7.52)$$

$$\frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s (v_s - W_s) dn = \int_{-b_2}^{b_1} \mathcal{F}_s dn - \frac{dW_s}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} (v_s - W_s) dn, \quad (7.53)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s^2 dn = \int_{-b_2}^{b_1} \mathcal{F}_n dn + W_n \frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn - \lambda W_n^2, \quad (7.54)$$

$$\frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} (T - T_w) v_s dn = -\frac{\partial T_w}{\partial s} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn, \quad (7.55)$$

где  $v'_i$  и  $v''_i$  – скорости вовлечения на передней выпуклой и внутренней вогнутой границах струи.

Для того, чтобы система уравнений (7.52)–(7.55) была замкнутой, необходимо выразить введенную скорость вовлечения  $v_i$  через величины, характеризующие основное движение. В настоящее время это удастся сделать лишь с помощью полуэмпирических зависимостей. Известно, что наиболее просто эта цель достигается в случае плоской затопленной струи [3, 27], когда задача имеет аналитическое решение. В этом случае легко показать [27], что скорость вовлечения (в одну половину струи) прямо пропорциональна осевой скорости струи:

$$v_1 = E v_m, \quad (7.56)$$

где  $v_m$  – скорость на оси струи;  $E$  – эмпирический параметр вовлечения.

Действительно, по определению для затопленной прямолинейной струи

$$E = \frac{v_1}{v_m(x, 0)} = \left( \frac{d}{dx} \int_F u dF \right) / u_m(x, 0) = \left( \frac{d}{dx} \int_0^b u dy \right) / u_m.$$

Предполагая универсальность профиля скорости  $u/u_m = f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4$ ,  $\eta = y/b$ , для параметра вовлечения получаем

$$E = \frac{a_1}{u_m} \frac{d}{dx} (u_m b) = \frac{a_1}{u_m} \left( u_m \frac{db}{dx} + b \frac{du_m}{dx} \right).$$

Вспоминая, что для затопленной плоской струи согласно [27]

$$\frac{db}{dx} = 4\alpha \frac{a_4}{a_3}, \quad b \frac{du_m}{dx} = -2\alpha \frac{a_4}{a_3} u_m,$$

где  $a_i$  – константы [27], после простых преобразований находим

$$E = 2a_1 \frac{a_4}{a_3} \alpha \approx 5\alpha.$$

Учитывая, что для начального участка плоской струи  $\alpha = 0.0063$ , тогда  $E = 0.0315$ , а для основного  $\alpha = 0.011$ , тогда  $E = 0.055$ . Отметим, что здесь рассматривалась лишь одна половина струи. Для струи в целом эжекция удвоится, т. е.  $E_{\Pi} = 2E \approx 10\alpha$ .

Зависимость (7.56) для скорости вовлечения в случае затопленной струи естественно обобщить на случай струи в спутном потоке

$$v_i = E(v_m - W) \quad (7.57)$$

и в боковом сносящем потоке

$$v_i = E(v_m - W_s - E_1 W_n), \quad (7.58)$$

где  $E_1$  – опытная константа.

Если струя плавучая, то параметр вовлечения  $E$  дополнительно зависит от локального числа Ричардсона  $E = E(\text{Ri})$ . Учитывая сказанное и то, что у плоской струи в сносящем боковом потоке на передней выпуклой границе скорость будет иметь компоненты  $W_s$  и  $W_n$ , а на внутренней вогнутой границе будет лишь эжекционная скорость  $v_2$ , которая будет определена ниже, уравнение (7.52) для плоской струи записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn = E(v_m - W_s - E_1 W_n) + \\ + E(v_m + E_2 v_2) + W_s \left( \frac{db_1}{ds} + \frac{db_2}{ds} \right). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Используя уравнение (7.59), систему уравнений движения (7.53) и

(7.54) для полостной струи можно также записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s^2 dn = \int_{-b_2}^{b_1} \mathcal{F}_s dn + EW_s(v_m - W_s - E_1W_n) + \\ + EW_s(v_m + E_2v_2) + W_s^2 \left( \frac{db_1}{ds} + \frac{db_2}{ds} \right) - \\ - (b_1 + b_2)W_s \frac{dW_s}{ds} - \frac{dW_s}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn, \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s^2 dn = \int_{-b_2}^{b_1} \mathcal{F}_n dn + EW_n(v_m - W_s - E_1W_n) - \\ - E(v_m + E_2v_2)v_2 + W_nW_s \left( \frac{db_1}{ds} + \frac{db_2}{ds} \right) - \lambda \frac{W_n^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Если скорость эжекции на внутренней вогнутой границе струи  $v_2$  известна, то система уравнений (7.60) и (7.61) может служить основой для расчета характерных параметров плоской струи в сносящем потоке. Для определения эжекционной скорости  $v_2$  обратимся к построению физической схемы течения при проникновении плоской струи в сносящий поток.

Выполненные эксперименты с плоскими струями показывают, что за струей образуется область разрежения, которая приводит к существованию циркуляционных течений, в результате чего там образуется дополнительный слой смешения. Учитывая сказанное, общую схему течения плоской струи в сносящем потоке при наличии экранирующей поверхности, в которой расположена сопловая щель, можно представить в виде, показанном на рис. 7.3. Внешняя граница этого слоя смешения обозначена линией  $Q_1K$ , которая отделяет рециркуляционную область от струи. В точке  $K$  линия  $Q_1$  пересекается со стенкой  $QK$ . Все линии тока, лежащие ниже  $Q_1K$ , являются замкнутыми кривыми, т. е. образуют циркуляционную область с осью, перпендикулярной плоскости  $Oxy$ . Часть этой области, лежащая ниже  $QPK$ , заполнена жидкостью, которая движется в направлении, противоположном основному струйному течению.

Через поверхность  $QP$  происходит поперечное перетекание жидкости из области обратного тока в область прямого тока, а через поверхность  $PK$  – в противоположном направлении. Линия  $QPK$  есть линия нулевых продольных скоростей. Рециркуляционная область имеет центр  $P$ . Линия, нормальная к оси струи и проходящая через этот центр, делит циркуляционную область на две части. Уча-

сток циркуляционной области до линии  $MM'$  будем называть первым участком, а участок, расположенный за линией  $MM'$  – вторым. Выше линии  $QPK$  продольные составляющие скорости потока в зоне смещения положительны, а ниже ее – отрицательны. На линии нулевых значений продольной скорости  $QPK$  существуют только поперечные составляющие скорости. Точка  $P$  является особой точкой, в ней как продольные, так и поперечные скорости равны нулю.

Рассмотрим подробно начальный участок струи и выделим в нем произвольный контур  $OZ'ZQ$ . Для этого контура должен выполняться интегральный закон сохранения массы:

$$\int_{\sigma} v_n d\sigma = 0, \quad (7.62)$$

где  $\sigma$  – поверхность выделенного контура;  $v_n$  – проекция вектора скорости на нормаль к контуру  $\sigma$ , причем  $v_n > 0$ , если она совпадает с внешней нормалью к контуру, и  $v_n < 0$  – в противном случае. Для выделенного контура это уравнение сохранения массы принимает вид

$$-v_{0m}b_0 + v_{0m}n_{02} + \int_{n_{02}}^{n_{02}+b_{02}} v dn - v_1 s_H = 0, \quad (7.63)$$

где  $v_{0m}$  – осевая скорость струи;  $n_{02}$  и  $b_{02}$  – ширина соответственно потенциального ядра и зоны смещения во внутренней вогнутой половине струи;  $v_1$  – скорость вовлечения или эжекции через боковую поверхность  $QZ$ ;  $s_H$  – длина начального участка струи. Линия контура  $OZ'$  является осью струи и на ней по предположению поперечные скорости отсутствуют. Профиль скорости в зоне смещения сечения  $ZZ'$  можно описать следующей универсальной зависимостью:

$$\frac{v}{v_{0m}} = 1 - 6\eta^2 - 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad \eta = (n + n_{02})/b_{02}.$$

Тогда

$$\int_{n_{02}}^{n_{02}+b_{02}} v dn = a_1 v_{0m} b_{02}, \quad a_1 = 0.4. \quad (7.64)$$

Учитывая равенство (7.64), из (7.63) для поперечной скорости втекания на внутренней вогнутой границе струи находим

$$v_1 = \frac{v_{0m}(n_{02} + a_1 b_{02} - b_0)}{s_H}. \quad (7.65)$$

Для определения скорости вовлечения на той же внутренней границе на основном участке струи по аналогии с предыдущим рассмотрим контур  $NN'q'q$ . Для выделенного контура запишем уравнение сохранения расхода:

$$-\int_0^{b_{00}} vdn + \int_0^{b_2} vdn - v_2(s - s_H) = 0, \quad (7.66)$$

где  $b_{00}$  и  $b_2$  – значение ширины зоны смещения в конце начального участка и на основном участке соответственно.

Описывая профиль скорости в зоне смещения основного участка функцией А. С. Гиневского [59]

$$\frac{v}{v_m} = 1 - 6\eta^2 - 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad \eta = n/b_2, \quad (7.67)$$

после вычисления соответствующих интегралов для  $v_2$  находим

$$v_2 = \frac{v_m a_1 (b_2 - b_{00} v_0 / v_m)}{s - s_H}, \quad s > s_H. \quad (7.68)$$

Имеется и другая возможность для решения рассматриваемой задачи о струе в сносящем боковом потоке. Она связана с иным способом замыкания исходной системы уравнений, который успешно использовался при анализе затопленных и спутных струй, когда вместо уравнения сохранения массы, следуя А. С. Гиневскому [59], дополнительно привлекается к рассмотрению интегральное соотношение для переноса кинетической энергии. В этом варианте исходными уравнениями для плоской плавучей струи в сносящем потоке будут:

уравнение переноса импульса в  $s$ -направлении

$$\frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s (v_s - W_s) dn = \int_{-b_2}^{b_1} \mathcal{F}_s dn - \frac{dW_s}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} (v_s - W_s) dn, \quad (7.69)$$

уравнение переноса импульса в  $n$ -направлении

$$\frac{d\alpha}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s^2 dn = \int_{-b_2}^{b_1} \mathcal{F}_s dn + W_n \frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn - \lambda W_n^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F p dF, \quad (7.70)$$

уравнение переноса кинетической энергии

$$\frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} v_s (v_s^2 - W_s^2) dn = 2 \int_{-b_2}^{b_1} v_s \mathcal{F}_s dn - 2 \int_{-b_2}^{b_1} \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial v_s}{\partial n} dn, \quad (7.71)$$

уравнение сохранения плавучести

$$\frac{d}{ds} \int_{-b_2}^{b_1} (T - T_w) v_s dn = -\frac{\partial T_w}{\partial s} \int_{-b_2}^{b_1} v_s dn. \quad (7.72)$$

Для завершения математической постановки задачи исходные уравнения (7.69)–(7.72) необходимо дополнить очевидными геометрическими соотношениями, связывающими декартовы координаты с криволинейными

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \quad (7.73)$$

а также начальными условиями.

При втором способе замыкания для струи, распространяющейся из круглого насадка, аналогичная система исходных интегральных соотношений записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s (v_s - W_s) r dr = \int_0^{b^*} \mathcal{F}_s r dr - \frac{\partial W_s}{\partial s} \int_0^{b^*} (v_s - W_s) r dr, \quad (7.74)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s^2 r dr = W_r \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s r dr + \int_0^{b^*} \mathcal{F}_r r dr - \lambda b^* W_r^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \int_0^{b^*} p r dr, \quad (7.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s (v_s^2 - W_s^2) r dr = 2 \int_0^{b^*} v_s \mathcal{F}_s r dr - 2 \int_0^{b^*} \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial v_s}{\partial r} r dr, \quad (7.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s (T - T_w) r dr = -\frac{\partial T_w}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s r dr. \quad (7.77)$$

Легко видеть, что оба рассматриваемых способа замыкания исходной системы уравнений эквивалентны. Трудности первого подхода связаны с необходимостью полуэмпирического определения скорости вовлечения  $v_i$ , а при втором способе замыкания необходимо определить турбулентное трение  $\tau$ . Учитывая, что для определения  $\tau$  накоплено больше информации, чем для определения  $v_i$ , и к тому же  $\tau$ , являясь локальной характеристикой, входит под знак интеграла, который сглаживает ошибку при его моделировании, при рассмотрении задач этого класса предпочтительней использовать второй способ. Кроме того, поскольку затопленные и спутные струи рассматривались нами с тех же позиций [27], то появляется возможность проверки предельных случаев, когда сносящий поток отсутствует.



Следует заметить, что если в струе дополнительно имеется пассивная примесь, то в силу сходства дифференциальных уравнений теплопроводности и диффузии интегральное соотношение для концентрации  $C$  в соответствии с уравнением (7.77) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{b^*} v_s C r dr = 0. \quad (7.78)$$

Приведенная выше система основных интегральных соотношений для струй в сносящем потоке является фундаментальной. Она используется ниже при решении конкретных задач интегральным методом.

## 7.5. Гипотеза турбулентной вязкости и выбор профилей скорости и температуры

Поскольку аналитическое и численное решение рассматриваемых задач является чрезвычайно сложным, а для инженерных приложений часто оказывается достаточным иметь приближенное решение, то для анализа турбулентных струй, распространяющихся в сносящем потоке, целесообразно развивать интегральные методы, а при таком подходе для получения замкнутой системы уравнений необходимо дополнительно знать распределение скорости и касательных напряжений поперек струи. Очевидно, что в первом приближении турбулентное трение может быть принято по Прандтлю–Буссинеску с соответствующей поправкой для турбулентной вязкости на влияние сносящего потока. Рассмотрим более подробно один из вариантов введения такой поправки.

Проанализируем сначала случай плоской струи. Вследствие асимметрии течения для задач такого класса целесообразно в струе выделять внешнюю выпуклую половинку струи и внутреннюю вогнутую. При этом распределение скоростей и касательных напряжений в обеих половинках будет не одинаковым. Кроме того, в рассматриваемом случае на условных границах струи помимо обычных нормальных компонент скорости, характерных для затопленной струи, имеются еще и дополнительные. Так, на передней выпуклой части струи такую добавку вносит нормальная компонента от вектора скорости набегающего потока  $W_n$ . На внутренней же, вогнутой границе струи эта добавка обусловлена наличием дополнительного разрежения за струей. Модель турбулентности, описывающая смещение струи со сносящим потоком, должна учитывать влияние на процесс смешения этих дополнительных составляющих поперечной скорости. Математически это означает, что если для этого класса задач использовать

градиентную модель турбулентности Прандтля, то в выражение для турбулентной вязкости необходимо внести дополнительное слагаемое, учитывающее влияние нормальной компоненты скорости. Тогда турбулентную вязкость для внешней зоны смещения плоской струи можно представить в следующем виде:

$$\nu_{t1} = \alpha L(v_m - W_s - \alpha_1 W_n), \quad (7.79)$$

где  $W_s$  и  $W_n$  – продольная и поперечная компоненты скорости набегающего потока на внешней выпуклой границе струи;  $L$  – масштаб длины;  $\alpha_1$  – эмпирическая константа. А во внутренней (подветренной) зоне смещения для турбулентной вязкости, по аналогии с предыдущим принимаем

$$\nu_{t2} = \alpha L(v_m + \alpha_2 v_i),$$

где  $v_i$  – скорость эжекции через внутреннюю вогнутую границу струи, обусловленная дополнительным разряжением;  $\alpha_2$  – эмпирический коэффициент.

При рассмотрении круглой струи в сносящем потоке картина течения значительно сложнее. Поэтому в этой задаче при таком подходе целесообразно говорить о некоторой средней по сечению (интегральной) турбулентной вязкости.

В таком случае для ее математического описания можно использовать следующую аналогичную уравнению (7.79) зависимость:

$$\nu_t = \alpha L(v_s - W_s - \alpha_3 W_r), \quad (7.80)$$

где  $\alpha_3$  – эмпирическая константа для круглой струи;  $W_s$  и  $W_r$  – средние по периметру поперечного сечения скорости внешнего потока.

Нетрудно видеть, что при таком подходе для решения практических задач необходимо количественно определить значение компонентов скорости  $W_s$ ,  $W_n$ ,  $W_r$  и иметь информацию о введенных трех эмпирических константах  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ .

Кроме того, для решения задачи о распространении турбулентных струй в сносящем потоке классическим интегральным методом необходимо знать профиль скоростей в поперечном сечении струи. В настоящее время этому вопросу посвящен ряд работ [3, 58, 63, 129], в которых экспериментально подтверждается приближенное подобие безразмерных профилей скорости аналогично тому, как это имеет место в случае затопленных и спутных струй при соответствующем выборе масштабов длины и скорости.

Получим выражение для профилей скорости на начальном и основном участках для плоской струи, истекающей в боковой сносящий

поток, используя метод полиномиальной аппроксимации турбулентного трения [59, 146]. Общая схема исследуемого течения и основные обозначения представлены на рис. 7.3. Рассмотрим сначала начальный участок. Учитывая особенности и асимметрию анализируемого струйного течения относительно линии максимальных скоростей, введем в качестве независимых переменных две величины

$$\eta_1 = (n - n_{01})/b_{01}, \quad \eta_2 = (n + n_{02})/b_{02} \quad (7.81)$$

для внешней и внутренней половинок струи соответственно. Причем будем полагать, что  $n_{01} = -n_{02}$ ,  $b_{01} \neq b_{02}$ .

Представим касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  для внешней и внутренней областей струи соответственно в виде следующих полиномов:

$$\tau_1 = \sum_{i=0}^3 a_i (n - n_{01})^i, \quad \tau_2 = \sum_{j=0}^3 c_j (n + n_{02})^j, \quad (7.82)$$

коэффициенты которых определим из граничных условий

$$\tau_1 = 0, \quad d\tau_1/dn = A(s), \quad \eta_1 = 0, \quad (7.83)$$

$$\tau_2 = 0, \quad d\tau_2/dn = A(s), \quad \eta_2 = 0,$$

$$\tau_1 = d\tau_1/dn = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad (7.84)$$

$$\tau_2 = d\tau_2/dn = 0, \quad \eta_2 = -1,$$

где  $A(s)$  – функция, подлежащая определению. В результате получим

$$\tau_1 = A(s)b_{01}\eta_1(1 - \eta_1)^2, \quad (7.85)$$

$$\tau_2 = A(s)b_{02}\eta_2(1 + \eta_2)^2.$$

В то же время, используя модифицированные формулы Прандтля для турбулентной вязкости (7.78) и (7.79), в каждой из половинок плоской струи для трения имеем

$$\tau_1 = \rho \alpha b_{01} (v_{0m} - W_s - \alpha_1 W_n) \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (7.86)$$

$$\tau_2 = \rho \alpha b_{02} (v_{0m} + \alpha_2 v_1) \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Приравнивая соответствующие выражения (7.85) и (7.86) и выполняя интегрирование, находим

$$\rho \alpha (v_{0m} - W_s - \alpha_1 W_n) (v - v_{0m}) = A(s)b_{01} \left( \frac{1}{2}\eta_1^2 - \frac{2}{3}\eta_1^3 + \frac{1}{4}\eta_1^4 \right), \quad (7.87)$$

$$\rho \alpha (v_{0m} + \alpha_2 v_1)(v - v_{0m}) = A(s) b_{02} \left( \frac{1}{2} \eta_2^2 + \frac{2}{3} \eta_2^3 + \frac{1}{4} \eta_2^4 \right), \quad (7.88)$$

при этом постоянные интегрирования определяются из условий на оси струи, где  $v = v_{0m}$  при  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

Соотношения (7.87) и (7.88) должны также удовлетворять граничным условиям на внешней и внутренней границах струи. Полагая  $v = W_s$  при  $\eta_1 = 1$  и  $v = 0$  при  $\eta_2 = -1$ , приходим к следующим двум соотношениям:

$$\begin{aligned} (v_{0m} - W_s - \alpha_1 W_n)(v_{0m} - W_s) &= -\frac{A(s) b_{01}}{12 \rho \alpha}, \\ (v_{0m} + \alpha_2 v_1) v_{0m} &= -\frac{A(s) b_{02}}{12 \rho \alpha}, \end{aligned} \quad (7.89)$$

из которых легко находим связь между ординатами внешней и внутренней границы струи и значение функции  $A(s)$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{b_{01}}{b_{02}} &= \left( 1 - \frac{W_s}{v_{0m}} \right) \left( 1 - \frac{W_s}{v_{0m}} - \alpha_1 \frac{W_n}{v_{0m}} \right) / \left( 1 + \alpha_2 \frac{v_1}{v_{0m}} \right), \\ A(s) &= -\frac{12 \rho \alpha v_{0m}^2}{b_{02}} \left( 1 + \alpha_2 \frac{v_1}{v_{0m}} \right). \end{aligned} \quad (7.90)$$

Подставляя уравнения (7.90) в соотношения (7.87) и (7.88) и проводя простые преобразования, получаем следующий закон распределения скорости во внешней и внутренней областях смещения начального участка струи:

$$\frac{v - W_s}{v_{0m} - W_s} = 1 - 6\eta_1^2 + 8\eta_1^3 - 3\eta_1^4, \quad n > 0, \quad (7.91)$$

$$\frac{v}{v_{0m}} = 1 - 6\eta_2^2 - 8\eta_2^3 - 3\eta_2^4, \quad n < 0. \quad (7.92)$$

Нетрудно заметить, что относительный профиль скорости в каждой из половинок струи, истекающей в сносящий поток, описывается уже знакомой универсальной зависимостью А. С. Гиневского [59].

Рассмотрим теперь основной участок. Поскольку симметрия скорости во внешней и внутренней половинках струи на основном участке также, как и на начальном, отсутствует, для описания профиля введем в рассмотрение две независимые переменные  $\eta_1 = n/b_1$  и  $\eta_2 = n/b_2$  для внешней и внутренней половинок соответственно. Следуя методу полиномиальной аппроксимации профиля касательных на-

пряжений [24, 59, 146], представим  $\tau$ , как и выше, в каждой из половинок струи в виде полиномов

$$\tau_1 = \sum_{i=0}^3 a_i n^i, \quad \tau_2 = \sum_{j=0}^3 c_j n^j, \quad (7.93)$$

коэффициенты которых  $a_i$  и  $c_j$  определим из следующих граничных условий:

$$\tau_1 = 0, \quad d\tau_1/dn = A(s) \quad \eta_1 = 0,$$

$$\tau_2 = 0, \quad d\tau_2/dn = A(s) \quad \eta_2 = 0,$$

$$\tau_1 = d\tau_1/dn = 0 \quad \eta_1 = 1,$$

$$\tau_2 = d\tau_2/dn = 0 \quad \eta_2 = -1.$$

В результате простых преобразований находим

$$\tau_1 = A(s)b_1\eta_1(1-\eta_1)^2, \quad (7.94)$$

$$\tau_2 = A(s)b_2\eta_2(1-\eta_2)^2.$$

Для получения закона распределения скорости по сечению струи в каждой из половинок воспользуемся модифицированными формулами Прандтля для трения

$$\tau_1 = \rho\alpha b_1(v_m - W_s - \alpha_1 W_n) \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (7.95)$$

$$\tau_2 = \rho\alpha b_2(v_m + \alpha_2 v_2) \frac{\partial v}{\partial n},$$

где  $v_m$  – осевая скорость струи;  $b_1$  и  $b_2$  – соответствующие полуширины струи на основном участке. Приравнивая выражения (7.94) и (7.95) и интегрируя их, приходим к следующим соотношениям:

$$(v_m - W_s - \alpha_1 W_n)(v - v_m) =$$

$$= A(s) \frac{b_1}{12\rho\alpha} (6\eta_1^2 - 8\eta_1^3 + 3\eta_1^4) \quad n > 0, \quad (7.96)$$

$$(v_m + \alpha_2 v_2)(v - v_m) =$$

$$= A(s) \frac{b_2}{12\rho\alpha} (6\eta_2^2 + 8\eta_2^3 + 3\eta_2^4) \quad n < 0, \quad (7.97)$$

при этом постоянные интегрирования определялись из условий на оси струи, где  $v = v_m$  при  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

Соотношения (7.96) и (7.97) должны также удовлетворять граничным условиям на внешней границе струи. Полагая в них  $v = W_s$  при  $\eta_1 = 1$  и  $v = 0$  при  $\eta_2 = -1$ , получаем два соотношения

$$(v_m - W_s - \varkappa W_n)(v_m - W_s) = -\frac{A(s)b_1}{12\rho\varkappa}, \quad (7.98)$$

$$(v_m + \varkappa_2 v_2)v_m = -\frac{A(s)b_2}{12\rho\varkappa},$$

из которых легко найти следующую связь между ординатами внешней и внутренней границы струи на основном участке:

$$b_1 = b_2 \left(1 - \frac{W_s}{v_m}\right) \left(1 - \frac{W_s}{v_m} - \varkappa_1 \frac{W_n}{v_m}\right) / \left(1 + \varkappa_2 \frac{v_2}{v_m}\right) \quad (7.99)$$

и выражение

$$A(s) = -\frac{12\rho\varkappa}{b_2} v_m^2 \left(1 + \varkappa_2 \frac{v_2}{v_m}\right). \quad (7.100)$$

Подставляя выражение (7.100) в (7.96) и (7.97) и используя (7.99), получаем следующий профиль скорости на основном участке струи:

$$\frac{v - W_s}{v_m - W_s} = 1 - 6\eta_1^2 + 8\eta_1^3 - 3\eta_1^4, \quad n > 0, \quad (7.101)$$

$$\frac{v}{v_m} = 1 - 6\eta_2^2 - 8\eta_2^3 - 3\eta_2^4, \quad n < 0. \quad (7.102)$$

Легко видеть, что и на основном участке в каждой из половинок струи распределение скорости совпадает с известным универсальным профилем для затопленных и спутных струй с той лишь разницей, что во внешней зоне смещения роль спутной скорости выполняет продольная компонента скорости набегающего потока на внешней границе струи. Для определения закона распределения трения в обеих половинках струи подставим выражение (7.100) в (7.94). Тогда после простых преобразований имеем

$$\tau_1 = -12\rho\varkappa v_m \left(1 - \frac{W_s}{v_m}\right) \left(1 - \frac{W_s}{v_m} - \varkappa_1 \frac{W_n}{v_m}\right) \eta_1 (1 - \eta_1)^2, \quad (7.103)$$

$$\tau_2 = -12\rho\varkappa v_m^2 (1 + \varkappa_2 v_2) \eta_2 (1 - \eta_2)^2.$$

Пример использования вышеизложенного подхода для расчета параметров плоской струи в боковом сносящем потоке имеется в ранних работах автора [19–21, 23, 24, 26].

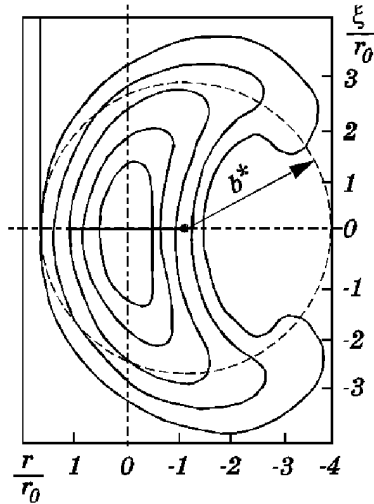


Рис. 7.4. Типичное поперечное сечение круглой струи в сносящем потоке

Рассмотрим теперь случай струи, истекающей в сносящий поток из круглого сопла. Такое течение в общем случае носит трехмерный характер, и его строгое изучение связано с большими трудностями. В этих условиях неизбежно приходится вводить дополнительные гипотезы, заботясь, однако, о том, чтобы упрощенная модель содержала основные черты исследуемого течения.

Учитывая особенности рассматриваемого течения, условимся, как и прежде, под границей струи понимать геометрическое место точек, где  $v_s = \varepsilon v_m = \text{const}$  ( $\varepsilon < 1$ ), и наряду с этим введем в рассмотрение некоторый эквивалентный радиус  $b^*(s)$ , как показано на рис. 7.4, определяемый соотношением  $b^* = \sqrt{F/\pi}$ , где  $F$  – площадь деформированного поперечного сечения струи, границы которого определены по указанному принципу.

Экспериментальные данные [129] и данные, обработанные с помощью введенного фиктивного радиуса  $b^*$ , свидетельствуют о наличии подобия профилей осредненной продольной скорости и избыточной температуры для круглой струи, истекающей в сносящий поток. Это дает основание принять следующее, аналогичное плоской струе радиальное распределение скорости и температуры для круглой эквивалентной струи:

- на начальном участке

$$\frac{v - W_s}{v_{0m} - W_s} = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad (7.104)$$

$$\eta = (r - r_{01}^*)/b_{01}^*,$$

- на основном участке

$$\frac{v - W_s}{v_m - W_s} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4,$$

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = 1 - 3\eta^2 + 2.83\eta^3 - 0.75\eta^4, \quad (7.105)$$

$$\eta = r/b^*,$$

для турбулентного трения по аналогии с выражением (7.103) имеем

$$\tau = -12\rho\alpha v_m^2 \left(1 - \frac{W_s}{v_m}\right) \left(1 - \frac{W_s}{v_m} - \alpha z \frac{W_r}{v_m}\right) \eta(1 - \eta)^2. \quad (7.106)$$

Несмотря на такую, казалось бы, грубую схематизацию течения, все же использование таких допущений представляется оправданным, поскольку решение этой задачи в более строгой постановке, даже интегральным методом, чрезвычайно сложно.

Приведенные зависимости для турбулентных вязкости, трения и профилей скорости и температуры позволяют получить замкнутую систему интегральных соотношений и выполнить расчет основных параметров плавучих струй, распространяющихся в сносящем потоке, интегральным методом.

Если плотность струи будет отличаться от плотности сносящего потока, то при рассмотрении таких задач в выражениях для турбулентной вязкости необходимо дополнительно учесть влияние сил плавучести на процессы турбулентного переноса в соответствии с рекомендациями, рассмотренными в разделе плавучих струй [27].

## 7.6. Расчет параметров круглой плавучей турбулентной струи в поперечном стратифицированном потоке

Проблема изучения характеристик турбулентных струй, истекающих из плоского или круглого сопла в сносящий однородный или стратифицированный поток, актуальна для многих практических



приложений. Применительно к проблеме атмосферной диффузии газоаэрозольных выбросов большой практический интерес представляет задача о круглой плавучей струе, распространяющейся в сносящем ветровом потоке. Закономерности распространения таких струй определяются параметром  $u = W/v_0$ , представляющим собой отношение скорости сносящего потока  $W$  к начальной скорости струи  $v_0$ , числом Ричардсона

$$\text{Ri} = \frac{gL}{V^2} \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{gL\beta(T - T_w)}{V^2},$$

$$\Delta\rho = \rho_w - \rho,$$

характеризующим влияние сил плавучести, и параметром стратификации  $G = \gamma L / (T_0 - T_{w0})$ , представляющим собой отношение вертикального градиента температуры внешней среды  $\gamma$  к избыточной температуре струи на уровне среза сопла.

Как обычно, в теории турбулентных струй рассматриваемый метод расчета указанного класса течений строится на ряде допущений. Прежде всего предполагается, что жидкость несжимаема, справедливо приближение пограничного слоя, течение вне струи является потенциальным, течение в струе имеет развитый турбулентный характер и считается установившимся, молекулярной вязкостью по сравнению с турбулентной пренебрегается, изменение плотности учитывается лишь в членах, характеризующих действие объемных сил плавучести (приближение Буссинеска). Другие специальные допущения, касающиеся, например, турбулентной вязкости и распределения скорости и температуры, обсуждались выше.

Задачу о влиянии сносящего потока, сил плавучести и стратификации внешней среды на основные закономерности развития турбулентной струи будем решать интегральным методом. Основными искомыми характеристиками при этом будут являться: траектория струи, интенсивность расширения ее зон смешения, длина начального участка, а также характер изменения вдоль струи осевых избыточных скорости и температуры (концентрации).

Предполагается, что предложенная Г. Н. Абрамовичем [2] принципиальная схема прямолинейных струй, при которой поле течения разбивается на начальный, переходной и основной участки струи, справедлива и для искривленных струй в сносящем потоке. При нашем подходе протяженность переходного участка считается малой, и решения для начального и основного участков в переходном сечении будут удовлетворять условию сопряжения.

Итак, рассмотрим задачу о распространении вертикальной плавучей струи, вытекающей из круглого сопла диаметром  $d_0 = 2r_0$  со

скоростью  $v_0$ , давлением в сопле  $p_0$ , начальной температурой  $T_0$  и начальной концентрацией примеси  $C_0$  в однородный плоско-параллельный поток, имеющий скорость  $W = \text{const}$ , и неоднородную температуру  $T_w(z)$ , распределенную, например, по линейному закону

$$T_w = T_{w0} + \gamma z, \quad (7.107)$$

где  $T_{w0}$  – температура внешнего потока на уровне среза сопла;  $\gamma$  – параметр вертикальной стратификации.

Будем рассматривать лишь такие течения, когда вектор скорости сносящего потока  $\vec{W}$  и вектор начальной скорости струи  $\vec{v}_0$  находятся в одной плоскости. Начальный угол между их направлениями обозначим через  $\alpha_0$ . Движение жидкости будем рассматривать как квазидвумерное в криволинейной ортогональной системе координат  $Osr$ , начало которой  $O$  находится в центре сопла. Начало декартовой системы координат поместим в ту же точку  $O$ , при этом вертикальную ось обозначим через  $z$ , а ось  $x$  направим горизонтально и параллельно  $\vec{W}$  так, чтобы она попала в плоскость  $Osr$ , где лежит и вектор  $\vec{v}_0$ . Проекции скорости в струе на оси  $s$  и  $r$  обозначим соответственно через  $v_s$  и  $v_r$ . Под осью струи будем понимать геометрическое место точек, в которых скорость максимальна ( $v_s = v_m$ ). Координата  $s$  совпадает с осью струи, а  $r$  – нормаль к ней. Локальный угол между ортом оси  $s$  и направлением  $\vec{W}$  обозначим через  $\alpha$ . Общая схема рассматриваемого течения, принятая система координат и основные обозначения с выделением начального и основного участков приведены на рис. 7.1.

Рассмотрим сначала **начальный участок** струи. Обозначим осевую скорость на нем через  $v_{0m}$ , которая в общем случае не постоянна. Пусть  $r_{01}^*$  – радиус потенциального ядра струи,  $b_{01}^*$  – соответствующий радиус зоны смешения круглой струи. При сделанных выше допущениях в соответствии с уравнениями (7.74)–(7.78) система исходных интегральных соотношений для импульса, энергии, кривизны, плавучести и концентрации на начальном участке круглой струи запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s (v_s - W_s) r dr = \\ & = - \frac{dW_s}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} (v_s - W_s) r dr + g\beta \sin \alpha \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} \theta r dr, \end{aligned} \quad (7.108)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s (v_s^2 - W_s^2) r dr = \\
& = -2 \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial v_s}{\partial r} r dr + 2g\beta \sin \alpha \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s \theta r dr,
\end{aligned} \tag{7.109}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (r_{01}^* + b_{01}^*)^2 (p_0 + \rho_0 v_0^2) \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\lambda}{2} W_r^2 (r_{01}^* + b_{01}^*) + \\
& + W_r \frac{d}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s r dr + g\beta \cos \alpha \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} \theta r dr,
\end{aligned} \tag{7.110}$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s \theta r dr = -\frac{dT_w}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s r dr, \quad \frac{d}{ds} \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s C r dr = 0, \tag{7.111}$$

где  $\tau$  – турбулентной трение;  $r$  – локальный радиус;  $\theta = T - T_w$  – локальная избыточная температура струи;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\beta$  – коэффициент объемного расширения;  $C$  – концентрация газоаэрозольного вещества;  $\lambda$  – суммарный коэффициент сопротивления струи;  $W_s$  и  $W_r$  – соответствующие осредненные компоненты скорости сносящего потока на внешней границе струи. Интегрирование выполняется от оси до динамической границы струи.

Для завершения постановки задачи к системе уравнений (7.108) – (7.111) необходимо присоединить еще два очевидных геометрических соотношения

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \tag{7.112}$$

связывающих декартовы координаты с криволинейными, и следующие начальные условия при  $s = 0$ :

$$\begin{aligned}
& \alpha(0) = \alpha_0 = \pi/2, \quad v_{0m}(0) = v_0, \\
& r_{01}^*(0) = r_0, \quad b_{01}^*(0) = 0, \quad C(0) = C_0, \\
& T_w(0) = T_{w0}, \quad \theta(0) = T_0 - T_{w0} = \theta_{00},
\end{aligned} \tag{7.113}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Нетрудно заметить, что последнее уравнение в (7.111) относительно концентрации  $C$  может быть сразу проинтегрировано и, следовательно,

$$\int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s C r dr = \text{const} = v_0 C_0 \frac{r_0^2}{2}.$$

Предполагая постоянство осевой температуры и концентрации на начальном участке струи и свойство подобия профилей скорости, избыточной температуры и концентрации в зонах смешения, принимаем следующее поперечное распределение для скорости, температуры и концентрации:

$$\begin{aligned} v_s &= v_{0m}, & C &= C_0, & \tau &= 0 \\ \theta &= \theta_0 = T_0 - T_w, \\ (0 \leq r \leq r_{01}^*), \end{aligned} \tag{7.114}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_s - W_s}{v_{0m} - W_s} &= \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{C}{C_0} = f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \\ \eta &= \frac{r - r_{01}^*}{b_{01}^*} \quad (r_{01}^* \leq r \leq r_{01}^* + b_{01}^*), \end{aligned}$$

где  $v_{0m}$  – скорость на оси струи;  $\theta_0$  – начальная избыточная температура;  $C_0$  – начальная концентрация;  $T_w$  – задано выражением (7.107).

Для турбулентного трения в зоне смешения начального участка струи принимаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho_0} &= -12\alpha v_{0m}^2 \left(1 - \frac{W_s}{v_{0m}}\right) \left(1 - \frac{W_s}{v_{0m}} - \alpha_3 \frac{W_r}{v_{0m}}\right) \times \\ &\times \eta(1 - \eta^2) \exp(-5\text{Ri}), \end{aligned} \tag{7.115}$$

учитывающее влияние сил плавучести, где  $\text{Ri} = g\beta(r_{01}^* + b_{01}^*)\theta_0/v_{0m}^2$  – локальное число Ричардсона для начального участка круглой струи;  $\alpha = 0.0059$ ;  $\alpha_3$  – эмпирический коэффициент.

Использував соотношения (7.114), (7.115), вычислим значения следующих интегралов, входящих в систему (7.108)–(7.111):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s^2 r dr = v_{0m}^2 \left[ \frac{1}{2} r_{01}^{*2} + (d_2 b_{01}^{*2} + a_2 r_{01}^* b_{01}^*) (1-U)^2 + \right. \\
&\quad \left. + U^2 \left( \frac{1}{2} b_{01}^{*2} + r_{01}^* b_{01}^* \right) + 2U(1-U)(d_1 b_{01}^{*2} + a_1 r_{01}^* b_{01}^*) \right], \\
I_2 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s r dr = v_{0m} \left[ \frac{1}{2} r_{01}^{*2} + (d_1 b_{01}^{*2} + a_1 r_{01}^* b_{01}^*) (1-U) + \right. \\
&\quad \left. + U \left( \frac{1}{2} b_{01}^{*2} + r_{01}^* b_{01}^* \right) \right], \\
I_3 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} \theta r dr = \theta_0 \left( \frac{1}{2} r_{01}^{*2} + d_1 b_{01}^{*2} + a_1 r_{01}^* b_{01}^* \right), \\
I_4 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s (v_s - W_s) r dr = v_{0m}^2 \left\{ \frac{1}{2} r_{01}^{*2} (1-U) + \right. \\
&\quad \left. + b_{01}^{*2} [d_1 U (1-U) + d_2 (1-U)^2] + r_{01}^* b_{01}^* \times \right. \\
&\quad \left. \times [a_1 U (1-U) + a_2 (1-U)^2] \right\}, \\
I_5 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} (v_s - W_s) r dr = \\
&= v_{0m} \left( \frac{1}{2} r_{01}^{*2} + d_1 b_{01}^{*2} + a_1 r_{01}^* b_{01}^* \right) (1-U), \\
I_6 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s (v_s^2 - W_s^2) r dr = v_{0m}^2 \left\{ \frac{1}{2} r_{01}^{*2} (1-U^2) + \right. \\
&\quad \left. + b_{01}^{*2} [2d_1 U^2 (1-U) + 3d_2 U (1-U)^2 + d_3 (1-U)^3] + \right. \\
&\quad \left. + r_{01}^* b_{01}^* [2a_1 U^2 (1-U) + 3a_2 U (1-U)^2 + a_3 (1-U)^3] \right\}, \\
I_7 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial v_s}{\partial r} r dr = \alpha v_{0m}^3 (1-U)^2 (1-U - \alpha_3 V) \times \\
&\quad \times (d_4 b_{01}^* + a_4 r_{01}^*) \exp(-5\text{Ri}), \\
I_8 &= \int_0^{r_{01}^* + b_{01}^*} v_s \theta r dr = v_{0m} \theta_0 \left[ \frac{1}{2} r_{01}^{*2} + (d_2 b_{01}^{*2} + a_2 r_{01}^* b_{01}^*) \times \right. \\
&\quad \left. \times (1-U) + U (d_1 b_{01}^{*2} + a_1 r_{01}^* b_{01}^*) \right],
\end{aligned} \tag{7.116}$$

где  $U = W_s/v_{0m}$ ;  $V = W_r/v_{0m}$ , и на основе численных экспериментов принято, что на начальном участке  $W_s = W/5 \cos \alpha$ ;  $W_r = -W/5 \sin \alpha$ . При этом  $a_i$  и  $d_i$  – известные коэффициенты,  $i = 1, 2, \dots, 4$ ,

$$\begin{aligned} a_1 = 0.4, \quad a_2 = 0.2857, \quad a_3 = 0.2321, \quad a_4 = 1.3714, \\ d_1 = 0.1, \quad d_2 = 0.0523, \quad d_3 = 0.0350, \quad d_4 = 0.5142. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Введем в рассмотрение безразмерные величины

$$\begin{aligned} V_m = v_{0m}/v_0, \quad B_{01} = b_{01}/r_0, \\ R_{01} = r_{01}^*/r_0, \quad u = W/v_0, \quad T = \theta_0/\theta_{00}, \\ S = s/r_0, \quad X = x/r_0, \quad Y = y/r_0, \\ G = \gamma r_0/\theta_{00}, \quad Ri_0 = g\beta r_0\theta_{00}/v_0^2, \end{aligned} \quad (7.118)$$

где  $Ri_0$  – начальное число Ричардсона. Тогда, подставляя значения полученных интегралов в исходные уравнения (7.76)–(7.79) и переходя к новым переменным, после соответствующих преобразований получаем систему из шести обыкновенных дифференциальных уравнений с шестью неизвестными  $V_m, R_{01}, B_{01}, \alpha, X, Y$ :

$$\begin{aligned} V'_m f_1 + R'_{01} f_2 + B'_{01} f_3 + \alpha' f_4 = f_5, \\ V'_m f_6 + R'_{01} f_7 + B'_{01} f_8 + \alpha' f_9 = f_{10}, \\ V'_m f_{11} + R'_{01} f_{12} + B'_{01} f_{13} + \alpha' f_{14} = f_{15}, \\ V'_m f_{16} + R'_{01} f_{17} + B'_{01} f_{18} + \alpha' f_{19} = f_{20}, \end{aligned} \quad (7.119)$$

$$X' = \cos \alpha, \quad Y' = \sin \alpha,$$

где штрих обозначает производную по  $S$  и приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 2 \left\{ \frac{1}{2} R_{01}^2 (1-U) + B_{01}^2 [d_1 U (1-U) + d_2 (1-U)^2] + \right. \\
&\quad \left. + R_{01} B_{01} [a_1 U (1-U) + a_2 (1-U)^2] \right\} - U \left\{ -\frac{1}{2} R_{01}^2 + \right. \\
&\quad \left. + B_{01}^2 [d_1 (1-U) - d_1 U - 2d_2 (1-U)] + \right. \\
&\quad \left. + R_{01} B_{01} [a_1 (1-U) - a_1 U - 2a_2 (1-U)] \right\}; \\
f_2 &= V_m \{ R_{01} (1-U) + B_{01} [a_1 U (1-U) + a_2 (1-U)^2] \}; \\
f_3 &= V_m \{ 2B_{01} [d_1 U (1-U) + d_2 (1-U)^2 + \\
&\quad + R_{01} [a_1 U (1-U) + a_2 (1-U)^2]] \}; \\
f_4 &= V V_m \{ B_{01}^2 [2(1-U)(d_1 - d_2) - d_1 U] + \\
&\quad + R_{01} B_{01} [2(1-U)(a_1 - a_2) - a_1 U] \}; \\
f_5 &= \text{Ri}_0 \frac{T}{V_m} \sin \alpha \left( \frac{1}{2} R_{01}^2 + d_1 B_{01}^2 + a_1 R_{01} B_{01} \right); \\
f_6 &= 3 \left\{ \frac{1}{2} R_{01}^2 (1-U^2) + B_{01}^2 [2d_1 U^2 (1-U) + \right. \\
&\quad \left. + 3d_2 U (1-U)^2 + d_3 (1-U)^3] + \right. \\
&\quad \left. + R_{01} B_{01} [2a_1 U^2 (1-U) + 3a_2 U (1-U)^2 + \right. \\
&\quad \left. + a_3 (1-U^2)] \right\} - U \{ -R_{01}^2 U + B_{01}^2 [4d_1 U (1-U) - 2d_1 U^2 + \\
&\quad + 3d_2 (1-U)^2 - 6d_2 U (1-U) - 3d_3 (1-U)^2] + \\
&\quad + R_{01} B_{01} [4a_1 U (1-U) - 2a_1 U^2 + 3a_2 (1-U)^2 - \\
&\quad - 6a_2 U (1-U) - 3a_3 (1-U)^2] \}; \\
f_7 &= V_m \{ R_{01} (1-U^2) + B_{01} [2a_1 U^2 (1-U) + \\
&\quad + 3a_2 U (1-U)^2 + a_3 (1-U)^3] \}; \\
f_8 &= V_m \{ 2B_{01} [2d_1 U^2 (1-U) + \\
&\quad + 3d_2 U (1-U)^2 + d_3 (1-U)^3] + \\
&\quad + R_{01} [2a_1 U^2 (1-U) + 3a_2 U (1-U)^2 + a_3 (1-U)^3] \}; \\
f_9 &= V V_m \{ -R_{01}^2 U + B_{01}^2 [4d_1 U (1-U) - 2d_1 U^2 + \\
&\quad + 3d_2 (1-U)^2 - 6d_2 U (1-U) - 3d_3 (1-U)^2] + \\
&\quad + R_{01} B_{01} [4a_1 U (1-U) - 2a_1 U^2 + 3a_2 (1-U)^2 - \\
&\quad - 6a_2 U (1-U) - 3a_3 (1-U)^2] \};
\end{aligned} \tag{7.120_1}$$

$$\begin{aligned}
f_{10} &= -2\alpha V_m(1-U)^2(1-U-\alpha_3 V)(d_4 B_{01} + a_4 R_{01}) \times \\
&\quad \times \exp(-5\text{Ri}) + 2\text{Ri}_0 \frac{T}{V_m} \sin \alpha \left[ \frac{1}{2} R_{01}^2 + (1-U) \times \right. \\
&\quad \left. \times (d_2 B_{01}^2 + a_2 R_{01} B_{01}) + U(d_1 B_{01}^2 + a_1 R_{01} B_{01}) \right]; \\
f_{11} &= \frac{V}{V_m} [R_{01}^2/2 + (1-U)(d_1 B_{01}^2 + a_1 R_{01} B_{01}) + \\
&\quad + U(B_{01}^2/2 + R_{01} B_{01})] - \\
&\quad - \frac{UV}{V_m} \left[ \left( \frac{1}{2} - d_1 \right) B_{01}^2 + (1 - a_1 R_{01} B_{01}) \right]; \\
f_{12} &= V \{ R_{01} + [U + a_1(1-U)] B_{01} \}; \\
f_{13} &= V[(1-U)(2d_1 B_{01} + a_1 R_{01}) + U(R_{01} + B_{01})]; \\
f_{14} &= V^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - d_1 \right) B_{01}^2 + (1 - a_1) R_{01} B_{01} \right] - \left[ R_{01}^2/2 + \right. \\
&\quad \left. + (d_2 B_{01}^2 + a_2 R_{01} B_{01})(1-U)^2 + U^2 \left( \frac{1}{2} B_{01}^2 + R_{01} B_{01} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2U(1-U)(d_1 B_{01}^2 + a_1 R_{01} B_{01}) \right]; \tag{7.120_2} \\
f_{15} &= \frac{\lambda}{2} V^2 (R_{01} + B_{01}) - \text{Ri}_0 \frac{T}{V_m^2} \cos \alpha (R_{01}^2/2 + \\
&\quad + d_1 B_{01}^2 + a_1 R_{01} B_{01}); \\
f_{16} &= T[R_{01}^2/2 + (1-U)(d_2 B_{01}^2 + a_2 R_{01} B_{01}) + U(d_1 B_{01}^2 + \\
&\quad + a_1 R_{01} B_{01})] - UT[(d_1 - d_2) B_{01}^2 + (a_1 - a_2) R_{01} B_{01}]; \\
f_{17} &= V_m T [R_{01} + a_2(1-U) B_{01} + a_1 U B_{01}]; \\
f_{18} &= V_m T [(2d_2 B_{01} + a_2 R_{01})(1-U) + (a_1 R_{01} + 2d_1 B_{01}) U]; \\
f_{19} &= V V_m T [(d_1 - d_2) B_{01}^2 + (a_1 - a_2) R_{01} B_{01}]; \\
f_{20} &= -G V_m \sin \alpha \{ [(d_1 - d_2) B_{01}^2 + \\
&\quad + (a_1 - a_2) B_{01} R_{01}] (1-U) + \\
&\quad + U[(0.5 - d_1) B_{01}^2 + (1 - a_1) B_{01} R_{01}] \}; \\
\text{Ri} &= \text{Ri}_0 (B_{01} + R_{01}) (1 - GY) / V_m^2.
\end{aligned}$$

Рассматривая систему уравнений (7.119), легко видеть, что для удобства численного решения ее целесообразно преобразовать к каноническому виду.

Поскольку определитель  $D$  рассматриваемой системы отличен от нуля и, следовательно, система определенная, ее корни находятся



по формулам Крамера через определители  $D$  и  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ).  
Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\begin{aligned} V'_m &= D_1/D, & R'_{01} &= D_2/D, & B'_{01} &= D_3/D, \\ \alpha' &= D_4/D, & X' &= \cos \alpha, & Y' &= \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7.121)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \\ &= f_1(f_7 f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{17} + f_9 f_{12} f_{18} - f_9 f_{13} f_{17} - f_7 f_{14} f_{18} - f_8 f_{12} f_{19}) - \\ &- f_2(f_6 f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{18} - f_9 f_{13} f_{16} - f_6 f_{14} f_{18} - f_8 f_{11} f_{19}) + \\ &+ f_3(f_6 f_{12} f_{19} + f_7 f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{17} - f_9 f_{12} f_{16} - f_6 f_{14} f_{17} - f_7 f_{11} f_{19}) \\ &f_4(f_6 f_{12} f_{18} + f_7 f_{13} f_{16} + f_8 f_{11} f_{17} - f_8 f_{12} f_{16} - f_6 f_{13} f_{17} - f_7 f_{11} f_{18}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \\ &= f_5(f_7 f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{17} + f_9 f_{12} f_{18} - f_9 f_{13} f_{17} - f_7 f_{14} f_{18} - f_8 f_{12} f_{19}) - \\ &- f_2(f_{10} f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{20} + f_9 f_{15} f_{18} - f_9 f_{13} f_{20} - f_{10} f_{14} f_{18} - f_8 f_{15} f_{19}) + \\ &+ f_3(f_{10} f_{12} f_{19} + f_7 f_{14} f_{20} + f_9 f_{15} f_{17} - f_9 f_{12} f_{20} - f_{10} f_{14} f_{17} - f_7 f_{15} f_{19}) - \\ &- f_4(f_{10} f_{12} f_{18} + f_7 f_{13} f_{20} + f_8 f_{15} f_{17} - f_8 f_{12} f_{20} - f_{10} f_{13} f_{17} - f_7 f_{15} f_{18}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \\ &= f_1(f_{10} f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{20} + f_9 f_{15} f_{18} - f_9 f_{13} f_{20} - f_{10} f_{14} f_{18} - f_8 f_{15} f_{19}) - \\ &- f_5(f_6 f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{18} - f_9 f_{13} f_{16} - f_6 f_{14} f_{18} - f_8 f_{11} f_{19}) + \\ &+ f_3(f_6 f_{15} f_{19} + f_{10} f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{20} - f_9 f_{15} f_{16} - f_6 f_{14} f_{20} - f_{10} f_{11} f_{19}) - \\ &- f_4(f_6 f_{15} f_{18} + f_{10} f_{13} f_{16} + f_8 f_{11} f_{20} - f_8 f_{15} f_{16} - f_6 f_{13} f_{20} - f_{10} f_{11} f_{13}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \\ &= f_1(f_7 f_{15} f_{19} + f_{10} f_{14} f_{17} + f_9 f_{12} f_{20} - f_9 f_{15} f_{17} - f_7 f_{14} f_{20} - f_{10} f_{12} f_{19}) - \\ &- f_2(f_6 f_{15} f_{19} + f_{10} f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{20} - f_9 f_{15} f_{16} - f_6 f_{14} f_{20} - f_{10} f_{11} f_{19}) + \\ &+ f_5(f_6 f_{12} f_{19} + f_7 f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{17} - f_9 f_{12} f_{16} - f_6 f_{14} f_{17} - f_7 f_{11} f_{19}) - \\ &- f_4(f_6 f_{12} f_{20} + f_7 f_{15} f_{16} + f_{10} f_{11} f_{17} - f_{10} f_{12} f_{16} - f_6 f_{15} f_{17} - f_7 f_{11} f_{20}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4 &= \\ &= f_1(f_7 f_{13} f_{20} + f_8 f_{15} f_{17} + f_{10} f_{12} f_{18} - f_{10} f_{13} f_{17} - f_7 f_{15} f_{18} - f_8 f_{12} f_{20}) \\ &- f_2(f_6 f_{13} f_{20} + f_8 f_{15} f_{16} + f_{10} f_{11} f_{18} - f_{10} f_{13} f_{16} - f_6 f_{15} f_{18} - f_8 f_{11} f_{20}) + \\ &+ f_3(f_6 f_{12} f_{20} + f_7 f_{15} f_{16} + f_{10} f_{11} f_{17} - f_{10} f_{12} f_{16} - f_6 f_{15} f_{17} - f_7 f_{11} f_{20}) - \\ &- f_5(f_6 f_{12} f_{18} + f_7 f_{13} f_{16} + f_8 f_{11} f_{17} - f_8 f_{12} f_{16} - f_6 f_{13} f_{17} - f_7 f_{11} f_{18}). \end{aligned} \quad (7.122)$$

Таким образом, для решения задачи о начальном участке круглой плавучей струи, распространяющейся в сносящем боковом по-

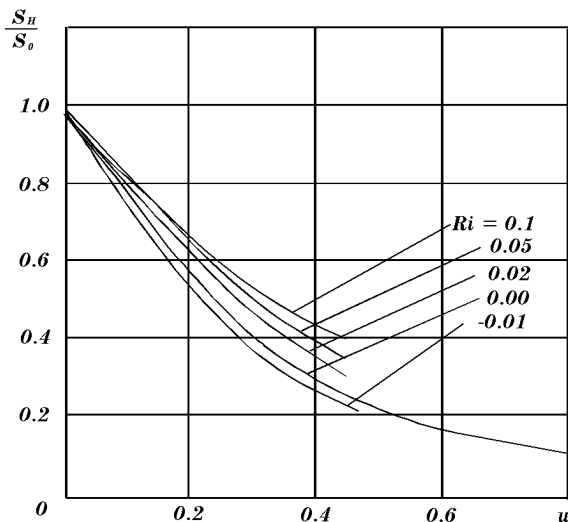


Рис. 7.5. Зависимость длины начального участка круглой плавучей струи от параметра сносящего потока при различных  $Ri_0$

токе, необходимо решать систему уравнений (7.121) при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} V_m(0) = 1, \quad R_{01}(0) = 1, \quad B_{01}(0) = 0, \\ \alpha(0) = \pi/2, \quad X(0) = 0, \quad Y(0) = 0. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Заметим, что по предположению осевые температура и концентрация в потенциальном ядре начального участка струи постоянны. Кроме того, отметим, что для неплавучей струи ( $Ri_0 = 0$ ) при отсутствии поперечного потока ( $W = 0$ ) выполняется предельный переход к случаю круглой затопленной струи, и задача решается аналитически.

Полная задача Коши (7.121)–(7.123) решалась численно методом Рунге–Кутты. Расчеты выполнялись с целью исследования влияния сносящего потока, сил плавучести и стратификации окружающей среды на основные характеристики начального участка круглой струи.

Основные результаты расчета параметров начального участка струи представлены ниже на рис. 7.5–7.7. На рис. 7.5 приведена зависимость безразмерной длины начального участка круглой плавучей струи от параметра сносящего потока  $u = W/v_0$  при различных начальных числах Ричардсона в случае однородной внешней среды

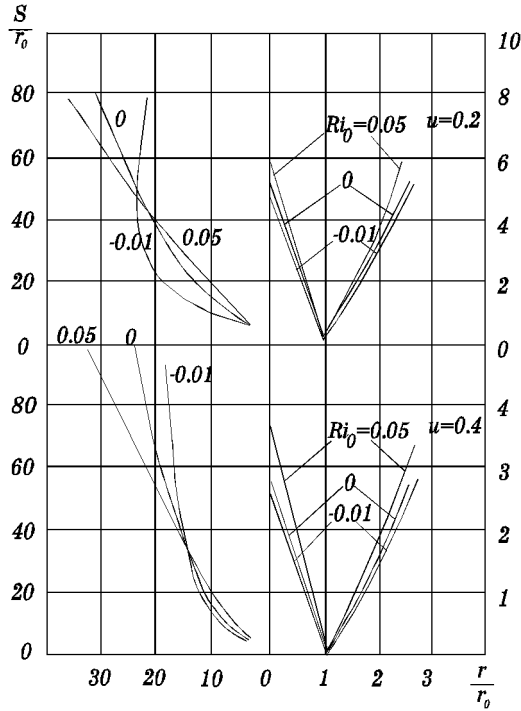


Рис. 7.6. Зависимость ширины области смешения в круглой плавучей струе в сносящем потоке от расстояния на начальном (справа) и основном (слева) участках при различных  $u$  и  $Ri_0$

( $G = 0$ ). Расчеты показывают, что длина начального участка струи с ростом параметра  $u$  убывает по сравнению со случаем затопленной струи при всех рассмотренных числах  $Ri_0$ . Длина начального участка у подогретой струи ( $Ri_0 > 0$ ) больше, а у охлажденной ( $Ri_0 < 0$ ) – меньше. На рис. 7.6 (справа) представлены результаты расчета границ зон смешения в системе криволинейных координат  $s, r$  при двух значениях параметра сносящего потока и трех различных числах Ричардсона. Нетрудно заметить слабую нелинейность границ зон смешения при  $u$  и  $Ri_0$ , отличных от нуля. На рис. 7.7 показано влияние сил плавучести на положение оси струи на начальном участке в координатах  $x, y$  при четырех значениях параметра сносящего потока и трех значениях начального числа Ричардсона, откуда видно, что динамическая ось струи на начальном участке при всех указанных  $u$  и

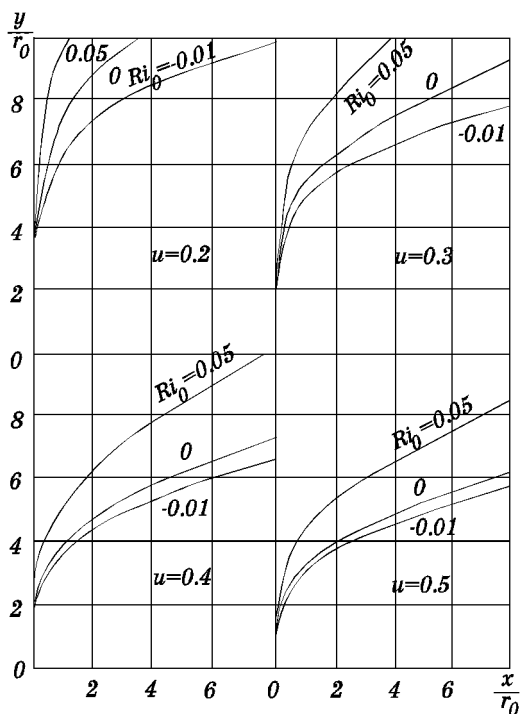


Рис. 7.7. Положение оси круглой плавучей струи на начальном участке при различных  $u$  и  $Ri_0$

подогретой струи ( $Ri_0 > 0$ ) несколько выше, чем у неплавучей струи, а у охлажденной наоборот.

Влияние стратификации внешней среды, характеризующейся значением параметра  $G = \gamma r_0 / \theta_{00}$ , на характеристики начального участка струи, как показали расчеты, сказывается слабо. Поэтому оценку этого влияния целесообразно рассматривать на материалах расчета основного участка струи, что будет сделано ниже.

**Основной участок.** Рассмотрим основной участок плавучей струи, истекающей из круглого сопла диаметром  $d_0 = 2r_0$  с начальной скоростью  $v_0$ , температурой  $T_0$  и концентрацией  $C_0$  в сносящий стратифицированный поток, имеющий температуру  $T_w = T_{w0} + \gamma z$ . Будем предполагать, что начальные условия для параметров основного участка определены из условия сопряжения параметров на на-

чальном и основном участках при  $s = s_n$  и имеют вид

$$\begin{aligned} C_m(s_n) &= C_0, \quad \theta_m(s_n) = \theta_{00} + \gamma y_n, \quad b^*(s_n) = b_{00}, \\ \alpha(s_n) &= \alpha_n, \quad v_m(s_n) = v_{0m}, \quad x(s_n) = x_n, \quad y(s_n) = y_n, \end{aligned} \quad (7.124)$$

где  $\theta_m$  – осевая избыточная температура;  $C_m$  – осевая концентрация;  $\theta_m = T_m - T_w$ ;  $\theta_{00} = T_0 - T_{w0}$ ;  $b_{00}$  – ширина зоны смешения эквивалентной круглой струи в конце начального участка;  $\gamma$  – параметр стратификации внешнего потока; индекс “н” указывает конец начального участка и начало основного;  $v_m$  – осевая скорость.

Исходная система интегральных соотношений для импульса, энергии, кривизны, плавучести и концентрации на основном участке эквивалентной круглой струи согласно (7.74) – (7.78) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^{b^*} v_s (v_s - W_s) r dr &= -\frac{dW_s}{ds} \int_0^{b^*} (v_s - W_s) r dr + g\beta \sin \alpha \int_0^{b^*} \theta r dr, \\ \frac{d}{ds} \int_0^{b^*} v_s (v_s^2 - W_s^2) r dr &= -2 \int_0^{b^*} \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial v_s}{\partial r} r dr + 2g\beta \sin \alpha \int_0^{b^*} v_s \theta r dr, \\ \frac{d\alpha}{ds} \int_0^{b^*} v_s^2 r dr &= -\frac{\lambda}{2} W_r^2 b^* + W_r \frac{d}{ds} \int_0^{b^*} v_s r dr + g\beta \cos \alpha \int_0^{b^*} \theta r dr, \\ \frac{d}{ds} \int_0^{b^*} v_s \theta r dr &= -\frac{dT_w}{ds} \int_0^{b^*} v_s r dr, \quad \frac{d}{ds} \int_0^{b^*} v_s C r dr = 0, \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \quad (7.126)$$

где  $b^*$  – эффективный радиус струи на основном участке;  $\lambda$  – суммарный коэффициент сопротивления струи;  $W_s = W \cos(p\alpha)$  и  $W_r = -W \sin(p\alpha)$  – осредненные компоненты скорости на внешней границе струи;  $p$  – эмпирический коэффициент, равный 0.7.

Предполагая подобие безразмерных профилей скорости, температуры и концентрации с учетом влияния сил плавучести и сносящего потока на процессы смешения, принимаем для них и для турбу-

лентного трения следующие обоснованные выше зависимости:

$$\frac{v_s - W_s}{v_m - W_s} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4,$$

$$\frac{\theta}{\theta_m} = \frac{C}{C_m} = 1 - 3\eta^2 + 2.83\eta^3 - 0.75\eta^4, \quad (7.127)$$

$$\frac{\tau}{\rho_0} = -12 \alpha v_m^2 \left(1 - \frac{W_s}{v_m}\right) \left(1 - \frac{W_s}{v_m} - \alpha_3 \frac{W_r}{v_m}\right) \eta (1 - \eta)^2 \exp(-5\text{Ri}),$$

где  $\eta = r/b^*$ ;  $\text{Ri} = g\beta b^* \theta_m / v_m^2$  для основного участка круглой струи.

Используя соотношения (7.127), вычислим входящие в исходную систему уравнений интегралы

$$I_1 = \int_0^{b^*} v_s (v_s - W_s) r dr = v_m^2 b^{*2} [d_1 U (1 - U) + d_2 (1 - U)^2],$$

$$I_2 = \int_0^{b^*} (v_s - W_s) r dr = v_m b^{*2} d_1 (1 - U),$$

$$I_3 = \int_0^{b^*} \theta r dr = \theta_m b^{*2} d_5,$$

$$I_4 = \int_0^{b^*} v_s (v_s^2 - W_s) r dr =$$

$$= v_m^3 b^{*2} [2d_1 U^2 (1 - U) + 3d_2 U (1 - U)^2 + d_3 (1 - U)^3],$$

$$I_5 = \int_0^{b^*} \frac{\tau}{\rho_0} \frac{\partial v_s}{\partial r} r dr = \alpha v_m^3 b^* d_4 (1 - U)^2 (1 - U - \alpha_3 V) \exp(-5\text{Ri}), \quad (7.128)$$

$$I_6 = \int_0^{b^*} v_s \theta r dr = v_m \theta_m b^{*2} [d_6 (1 - U) + d_5 U],$$

$$I_7 = \int_0^{b^*} v_s^2 r dr = v_m^2 b^{*2} \left[ d_2 (1 - U)^2 + \frac{1}{2} U^2 + 2d_1 U (1 - U) \right],$$

$$I_8 = \int_0^{b^*} v_s r dr = v_m b^{*2} \left[ d_1 (1 - U) + \frac{1}{2} U \right],$$

$$I_9 = \int_0^{b^*} v_s C r dr = v_m C_m b^{*2} [d_6 (1 - U) + d_5 U],$$

где  $U = W_s/v_m$ ;  $V = W_r/v_m$ ;  $d_5 = 0.1917$ ;  $d_6 = 0.064$ .

Рассмотрим сначала задачу расчета концентрации  $C$ . Легко видеть, что последнее уравнение (7.125) можно сразу проинтегрировать. Тогда, используя выражение для интеграла  $I_9$  и условие сопряжения с начальным участком, имеем

$$v_m C_m b^{*2} [d_6(1-U) + d_5 U] = v_{0m} C_0 r_0^2 / 2,$$

откуда

$$\tilde{C} = \frac{C_m}{C_0} = \frac{v_{0m} r_0^2}{v_m b^{*2}} \frac{1}{2[d_6(1-U) + d_5 U]}. \quad (7.129)$$

Следовательно, безразмерная осевая концентрация  $\tilde{C}(s)$  определяется аналитически, если известны локальные осевая скорость струи  $v_m$  и ее радиус  $b^*$ . Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено определению динамических и геометрических характеристик струи, через которые концентрация легко рассчитывается по вышеприведенной формуле (7.129).

Введем в рассмотрение безразмерные величины

$$V_m = \frac{v_m}{v_0}, \quad B = \frac{b^*}{r_0}, \quad T = \frac{\theta_m}{\theta_{00}}, \quad S = \frac{s}{r_0}, \quad X = \frac{x}{r_0},$$

$$Y = \frac{y}{r_0}, \quad u = \frac{W}{v_0}, \quad S_H = \frac{s_H}{r_0}, \quad B_{00} = \frac{b_{00}}{r_0}, \quad G = \frac{\gamma r_0}{\theta_{00}}.$$

Подставляя полученные значения интегралов (7.128) в исходные уравнения (7.125) и переходя к новым безразмерным переменным, получаем систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений с шестью неизвестными  $V_m, T, B, \alpha, X, Y$ :

$$\begin{aligned} V'_m f_1 + B' f_3 + \alpha' f_4 &= f_5, \\ V'_m f_6 + B' f_8 + \alpha' f_9 &= f_{10}, \\ V'_m f_{11} + B' f_{13} + \alpha' f_{14} &= f_{15}, \\ V'_m f_{16} + T' f_{17} + B' f_{18} + \alpha' f_{19} &= f_{20}, \\ X' &= \cos \alpha; \quad Y' = \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7.130)$$

где штрих обозначает производную по  $S$  и приняты следующие обозначения (ниже  $Ri = Ri_0 B T / V_m^2$ ):

$$\begin{aligned}
f_1 &= 2B[d_1U(1-U) + d_2(1-U)^2] - \\
&\quad - u \cos(p\alpha) \frac{B}{V_m} [d_1(1-U) - d_1U - 2d_2(1-U)]; \\
f_3 &= 2V_m[d_1U(1-U) + d_2(1-U)^2]; \\
f_4 &= pu \sin(p\alpha)B[d_1U + 2(d_2 - d_1)(1-U)]; \\
f_5 &= \text{Ri}_0 \frac{BT}{V_m} \sin \alpha d_5; \\
f_6 &= 3B[2d_1U^2(1-U) + 3d_2U(1-U)^2 + d_3(1-U)^3] - \\
&\quad - \frac{u}{V_m} B \cos(p\alpha) [4d_1U(1-U) - 2d_1U^2 + \\
&\quad + 3d_2(1-U)^2 - 6d_2U(1-U) - 3d_3(1-U)^2]; \\
f_8 &= 2V_m[2d_1U^2(1-U) + 3d_2U(1-U)^2 + d_3(1-U)^3]; \\
f_9 &= -pu \sin(p\alpha)B[4d_1U(1-U) - 2d_1U^2 + 3d_2(1-U)^2 - \\
&\quad - 6d_2U(1-U) - 3d_3(1-U)^2]; \\
f_{10} &= -2\alpha V_m d_4(1-U)^2(1-U - \alpha_3 V) \exp(-5\text{Ri}) + \\
&\quad + 2\text{Ri}_0 B \frac{T}{V_m} \sin \alpha [d_6(1-U) + d_5U]; \tag{7.131} \\
f_{11} &= u \sin(p\alpha) \left[ Bd_1(1-U) + BU/2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{u}{V_m} B \cos(p\alpha)(0.5 - d_1) \right]; \\
f_{13} &= uV_m \sin(p\alpha)[2d_1(1-U) + U]; \\
f_{14} &= V_m^2 B \left[ d_2(1-U)^2 + \frac{1}{2}U^2 + 2d_1U(1-U) \right] - \\
&\quad - pu^2 B \sin^2(p\alpha)(0.5 - d_1); \\
f_{15} &= -\frac{\lambda}{2} [u \sin(p\alpha)]^2 + \text{Ri}_0 d_5 BT \cos \alpha; \\
f_{16} &= BT \left[ d_6(1-U) + d_5U - \frac{u}{V_m} \cos(p\alpha)(d_5 - d_6) \right]; \\
f_{17} &= V_m B [d_6(1-U) + d_5U]; \\
f_{18} &= 2V_m T [d_6(1-U) + d_5U]; \\
f_{19} &= -puB \sin(p\alpha)T(d_5 - d_6); \\
f_{20} &= -GV_m B [d_1(1-U) + U/2] \sin \alpha.
\end{aligned}$$



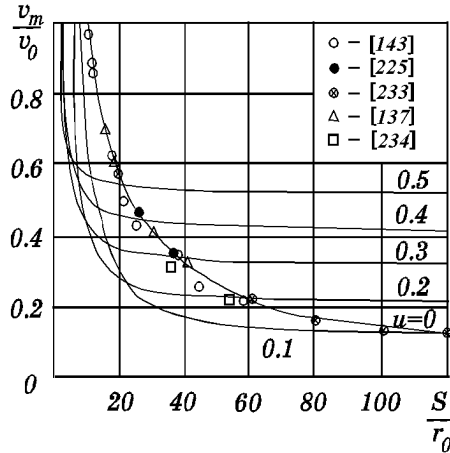


Рис. 7.8. Зависимость осевой скорости в круглой струе от расстояния при различных значениях  $u$

Пользуясь правилами решения систем линейных дифференциальных уравнений, подобно тому, как это сделано при рассмотрении начального участка, преобразуем систему уравнений (7.130) к каноническому виду:

$$\begin{aligned} V'_m &= D_1/D, & T' &= D_2/D, & B' &= D_3/D, \\ \alpha' &= D_4/D, & X' &= \cos \alpha, & Y' &= \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7.132)$$

где

$$D = f_1 f_{17} (f_8 f_{14} - f_9 f_{13}) + f_3 f_{17} (f_9 f_{11} - f_6 f_{14}) - f_4 f_{17} (f_8 f_{11} - f_6 f_{13});$$

$$D_1 = f_5 f_{17} (f_8 f_{14} - f_9 f_{13}) + f_3 f_{17} (f_9 f_{15} - f_{10} f_{14}) - f_4 f_{17} (f_8 f_{15} - f_{10} f_{13});$$

$$\begin{aligned} D_2 = & f_1 (f_{10} f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{20} + f_9 f_{15} f_{18} - f_9 f_{13} f_{20} - f_{10} f_{14} f_{18} - f_8 f_{15} f_{19}) - \\ & - f_5 (f_6 f_{13} f_{19} + f_8 f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{18} - f_9 f_{13} f_{16} - f_6 f_{14} f_{18} - f_8 f_{11} f_{19}) + \\ & + f_3 (f_6 f_{15} f_{19} + f_{10} f_{14} f_{16} + f_9 f_{11} f_{20} - f_9 f_{15} f_{16} - f_6 f_{14} f_{20} - f_{10} f_{11} f_{19}) - \\ & - f_4 (f_6 f_{15} f_{18} + f_{10} f_{13} f_{16} + f_8 f_{11} f_{20} - f_8 f_{15} f_{16} - f_6 f_{13} f_{20} - f_{10} f_{11} f_{18}); \end{aligned}$$

$$D_3 = f_1 f_{17} (f_{10} f_{14} - f_9 f_{15}) + f_5 f_{17} (f_9 f_{11} - f_6 f_{14}) - f_4 f_{17} (f_{10} f_{11} - f_6 f_{15});$$

$$D_4 = f_1 f_{17} (f_8 f_{15} - f_{10} f_{13}) + f_3 f_{17} (f_{10} f_{11} - f_6 f_{15}) - f_5 f_{17} (f_8 f_{11} - f_6 f_{13}).$$

Начальные условия (7.124) в новых безразмерных переменных

принимают вид

$$\begin{aligned} V_m(S_n) = V_n, \quad T_m(S_n) = 1 - GY_n, \quad B(S_n) = B_{00}, \\ \alpha(S_n) = \alpha_n, \quad X(S_n) = X_n, \quad Y(S_n) = Y_n, \end{aligned} \quad (7.133)$$

где значения параметров с индексом “*n*” определены по результатам расчета начального участка.

Таким образом, для решения задачи об основном участке круглой струи необходимо совместно решать систему шести линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (7.132) с начальными условиями (7.133).

Нетрудно убедиться в том, что при  $Ri_0 = 0$  и  $u = 0$  система уравнений значительно упрощается и сводится к уравнениям для затопленной круглой струи, которая имеет аналитическое решение.

Полная задача Коши (7.132), (7.133) решалась численно методом Рунге–Кутты при различных значениях параметра сносящего потока  $u$ , начального числа Ричардсона  $Ri_0$  и параметра стратификации  $G$ . При выполнении расчетов для эмпирических коэффициентов приняты следующие значения:  $\lambda = 0.1 + u$ ;  $p = 0.7$ ;  $\alpha_3 = 10 + 50u$  для начального участка и  $\alpha_3 = 10 + 10u$  для основного участка при  $u \leq 0.2$ , а при  $u > 0.2$   $\alpha_3 = 30$ . Эти значения определены в результате численных экспериментов из условия наилучшего согласования теоретических и опытных данных.

Результаты расчета основных характеристик круглой плавучей струи, распространяющейся в сносящем потоке, представлены ниже. На рис. 7.8 приведены зависимости изменения осевой скорости круглой неплавучей струи ( $Ri_0 = 0$ ), распространяющейся в однородной среде, при шести различных значениях параметра сносящего потока. Кривая  $u = 0$  соответствует случаю затопленной струи и хорошо согласуется с приведенными там же опытными данными различных авторов. Нетрудно видеть, что наличие сносящего потока приводит к более интенсивному уменьшению осевой скорости, которая затем асимптотически стремится к скорости сносящего потока  $W$ . На рис. 7.9 приведены результаты расчета траектории круглой неплавучей струи при шести различных значениях параметра сносящего потока. Легко видеть, что чем больше  $u$ , тем больше кривизна струи.

Для проверки достоверности полученных теоретических результатов выполнено сопоставление расчетов с экспериментальными данными [83, 124, 126, 192]. На рис. 7.10 приведены результаты расчета изменения безразмерной избыточной скорости круглой неплавучей струи в зависимости от расстояния при шести различных значениях параметра сносящего потока в сравнении с экспериментальными данными других авторов. На рис. 7.11 приведены результаты

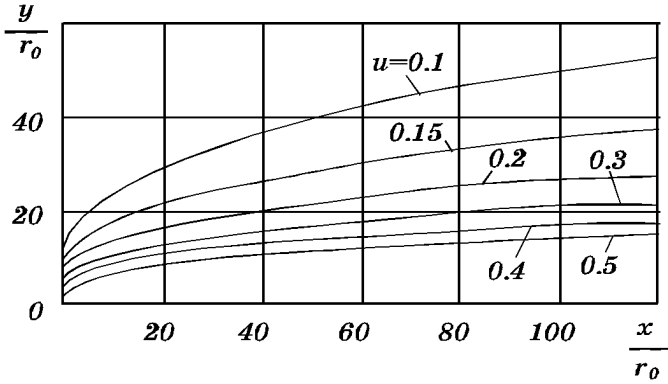


Рис. 7.9. Положение оси круглой струи при различных значениях  $u$

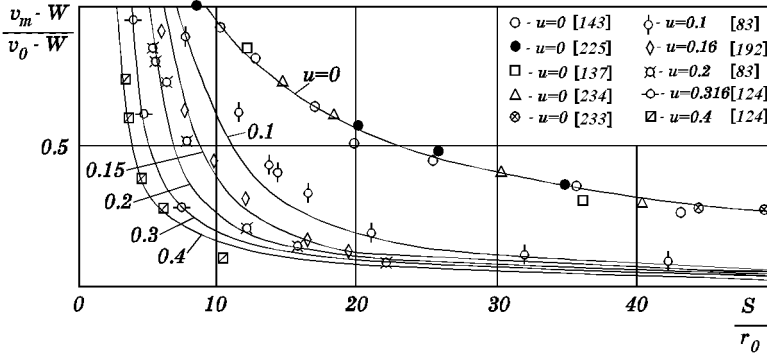


Рис. 7.10. Зависимость осевой избыточной скорости в круглой струе от расстояния при различных значениях  $u$

расчета криволинейной оси струи при четырех значениях параметра сносящего потока в сравнении с экспериментальными данными работ [126, 192]. Оба рисунка свидетельствуют о хорошем совпадении расчетных и экспериментальных данных.

На рис. 7.12 в координатах  $x, y$  представлены расчетные траектории круглой плавучей струи ( $Ri_0 = 0.01$ ), распространяющейся в стратифицированном сносящем потоке ( $u = 0.4$ ) при семи различных значениях параметра стратификации. Из рисунка видно, что величина и знак параметра стратификации существенно влияют на траекторию распространения струи. Кроме того, на достаточно большом удалении от источника при  $G > 0$  траектория струи в стратифициро-

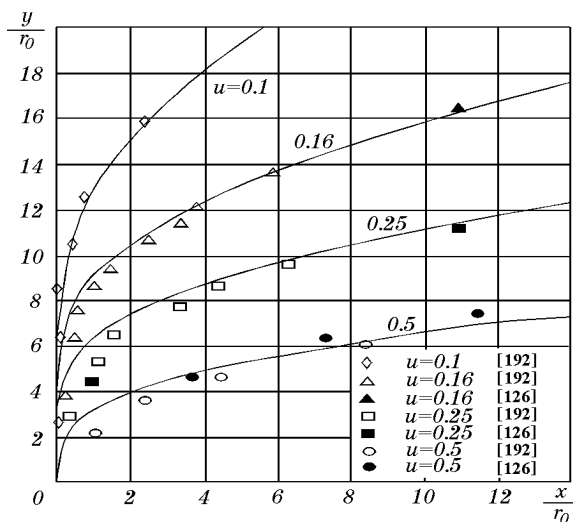


Рис. 7.11. Сравнение расчетного положения оси круглой струи с экспериментальным при различных значениях  $u$

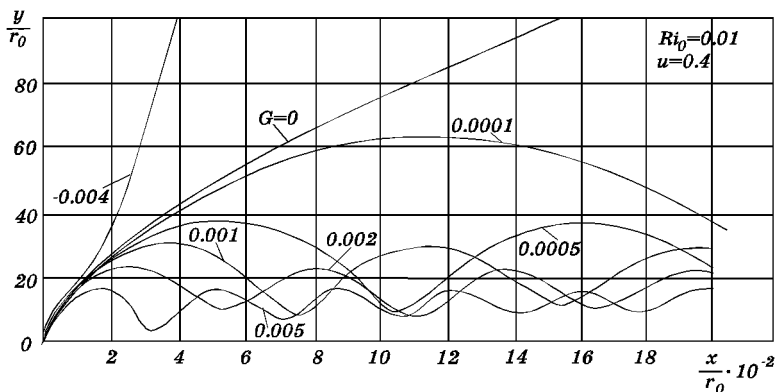


Рис. 7.12. Расчетное положение оси круглой плавучей струи, распространяющейся в боковом сносном потоке в зависимости от параметра стратификации  $G$  при  $Ri_0 = 0.01$  и  $u = 0.4$

ванной среде носит осциллирующий характер. Физически это означает, что плавучая струя при определенном градиенте внешнего поля плотности сначала всплывает, но, достигнув определенного уровня, где плотность уже иная, ее собственная плавучесть становится отри-

Табл. 7.1. Расчетные значения основных параметров выброса в конце струйного участка при различных  $u$  и  $Ri_0$

$u = W/v_0$	$Z_n = z/r_0$	$X_n = x/r_0$	$B_c = b_c/r_0$	$\tilde{C}_{m0} = C_{m0}/C_0$
$Ri_0 = 0$				
0.1	51.3	107.5	53.7	$1.88 \cdot 10^{-2}$
0.2	31.2	78.8	26.6	$2.82 \cdot 10^{-2}$
0.3	21.4	68.2	21.7	$3.44 \cdot 10^{-2}$
0.5	14.2	57.9	15.4	$4.30 \cdot 10^{-2}$
0.7	11.0	52.5	13.1	$5.10 \cdot 10^{-2}$
0.9	9.32	48.8	12.6	$5.74 \cdot 10^{-2}$
$Ri_0 = 0.005$				
0.1	88.2	123.0	58.9	$0.95 \cdot 10^{-2}$
0.2	33.2	83.5	30.5	$2.18 \cdot 10^{-2}$
0.3	24.5	69.4	22.4	$2.85 \cdot 10^{-2}$
0.5	15.0	56.7	16.0	$4.05 \cdot 10^{-2}$
0.7	11.5	51.4	13.5	$4.83 \cdot 10^{-2}$
0.9	9.75	48.7	12.4	$5.61 \cdot 10^{-2}$
$Ri_0 = 0.01$				
0.1	111.6	131.0	69.7	$0.63 \cdot 10^{-2}$
0.2	49.8	100.7	36.8	$1.62 \cdot 10^{-2}$
0.3	27.6	72.6	24.1	$2.41 \cdot 10^{-2}$
0.5	16.1	57.5	16.6	$3.70 \cdot 10^{-2}$
0.7	12.2	52.3	14.1	$4.60 \cdot 10^{-2}$
0.9	9.64	47.8	12.2	$5.24 \cdot 10^{-2}$
$Ri_0 = 0.02$				
0.1	139.6	133	82.3	$0.5 \cdot 10^{-2}$
0.2	72.6	105	42.6	$1.2 \cdot 10^{-2}$
0.3	34.2	80	27.7	$1.9 \cdot 10^{-2}$
0.5	18.2	60	17.9	$3.2 \cdot 10^{-2}$
0.7	12.7	51	14.3	$4.3 \cdot 10^{-2}$
0.9	9.97	47	12.5	$5.0 \cdot 10^{-2}$
$Ri_0 = 0.03$				
0.1	150	142	85.8	$0.35 \cdot 10^{-2}$
0.2	79	111	50.3	$0.95 \cdot 10^{-2}$
0.3	41	93	31.9	$1.70 \cdot 10^{-2}$
0.5	20	62	18.6	$2.79 \cdot 10^{-2}$
0.7	14	52	14.6	$3.89 \cdot 10^{-2}$
0.9	10	47	12.7	$4.75 \cdot 10^{-2}$

цательной, и она начинает опускаться. Затем, достигнув уровня, где архимедовы силы плавучести в объеме струи снова становятся положительными, струя опять проявляет тенденцию к всплытию. Как показывают расчеты, этот волновой процесс повторяется, но с удалением от источника он затухает. Период колебаний зависит от параметра стратификации  $G$ . При  $G < 0$  струя всплывает монотонно, но быстрее, чем в случае однородной среды. Интересно отметить, что эти теоретические результаты качественно подтверждаются лабораторными экспериментами работы [186], где приводятся фотоснимки подкрашенных струй, распространяющихся в стратифицированной среде.

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что на основе приведенной модели плавучей турбулентной струи в поперечном стратифицированном потоке выполнена серия расчетов по определению параметров струи, включая осевую концентрацию, необходимых для реализации струйно-диффузионной модели рассеивания газо-аэрозольных выбросов в атмосфере. В качестве критерия определения конца струйного участка принималось условие  $d\alpha/ds \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малая наперед заданная величина. Результаты этих расчетов систематизированы и приведены в сводной табл. 7.1, данные которой позволяют применять струйно-диффузионную модель для расчета полей концентрации примеси, не обращая каждый раз к решению струйной задачи. Однако следует заметить, что изложенная теория струи в поперечном потоке имеет ограничение на величину параметра сносящего потока  $u$  и на начальное число Ричардсона  $Ri_0$ . Поэтому при необходимости использования более широкого диапазона изменения этих параметров можно воспользоваться методом экстраполяции, как это сделано при составлении табл. 6.1.

## Глава 8

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУЙ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

### 8.1. Краткая характеристика состояния вопроса

Если говорить строго, то турбулентная струя, развивающаяся в поперечном потоке, характеризуется более сложной структурой течения, чем та, которая рассматривалась выше. Осесимметричная в начальном сечении струя с удалением от отверстия приобретает “подковообразную” форму [3, 27]. Это происходит из-за того, что сразу же по выходе из отверстия, вследствие интенсивного перемешивания с жидкостью поперечного потока, образуется турбулентный слой смешения. Периферийная часть жидкости струи, которая имеет меньшую продольную скорость, чем жидкость потенциального ядра, сильнее отклоняется поперечным потоком от первоначального направления и движется по более изогнутой траектории, что и приводит к образованию “подковы” в поперечном сечении струи. Одновременно с этим, в результате взаимодействия поперечного потока со струей, периферийная часть жидкости все больше отходит от плоскости симметрии, внутри нее происходит перераспределение давления и это приводит к возникновению вторичного циркуляционного движения в поперечном сечении струи в виде пары стационарных стоячих вихрей с противоположным направлением вращения и системы парных “подковообразных” вихрей на передней границе струи. Эти явления приводят к тому, что, строго говоря, параметры профиля продольной скорости в струе не обладают свойством автомодельности обычного струйного течения.

Поэтому для решения задачи о распространении турбулентной струи в поперечном потоке с более строгих позиций необходимо иметь более совершенную математическую модель смешения и учитывать деформацию площади поперечного сечения струи. Наиболее перспективным в этом отношении, по-видимому, является подход, в котором учитываются вихревые структуры, моделирующие различные вихревые процессы при проникновении турбулентной струи в поперечный поток, которые изучались экспериментально и теоретически в работах А. Н. Вискова [50], Р. Фиэрна [147], Д. Крауше [195], Е. Куша [196] и других. Отдельно отметим работу А. А. Мигдала [111], в которой рассмотрена математическая модель для вихревых структур различной природы на основе динамики вихревых нитей,

согласующаяся с моделями вихревой пелены на границе раздела струя – поперечный поток.

Теоретические и экспериментальные исследования формирования вихревых пар основаны на развитии нестационарной двумерной модели вихревой пелены, введенной Чен-Лу [166]. В этих моделях течение внутри и вне струи считается потенциальным, и граница между ними является вихревой пеленой. При разъединении этой пелены на некоторое число вихревых нитей, которые определенным образом выстраиваются вдоль траектории струи, Р. Маргасон [201] рассчитал деформацию поперечного сечения струи посредством вычисления моментов вихревых нитей. Перемещение завихренности, предсказанное этими моделями, ведет к ее концентрации в кормовой части вихревой пелены и процессу “свертывания” (развития во времени пары вихрей), что отражает некоторые качественные особенности реальной струи. Однако, согласно этим моделям, вихревая пара формируется только концентрацией осевой компоненты завихренности, а поперечная компонента в этом процессе не учитывается. Это приводит к тому, что полная циркуляция не зависит от отношения скорости струи и поперечного потока, тем самым противореча экспериментальным данным Р. Фиерна [147].

Возможные причины разногласий между этими моделями и экспериментальными измерениями состоят в том, что игнорируется трехмерность турбулентного перемешивания и предлагается двумерное приближение для ярко выраженной трехмерной модели вихревой пелены.

В работе С. Колхо [168] рассмотрена невязкая трехмерная модель вихревой пелены для начального участка сильной струи (скорость истечения струи намного больше скорости поперечного потока), истекающей из круглого насадка в поперечный поток. Решение, основанное на такой модели, показывает, что основным механизмом, управляющим этим идеализированным течением, является механизм изменения главной поперечной компоненты завихренности, которая генерируется добавочной осевой и поперечной компонентами завихренности внутри сопла благодаря градиенту давления, индуцированного внешним потоком, а также вследствие конвекции обеих компонент завихренности от лобовой к кормовой части струи.

Деформация поперечного сечения струи, описанная невязкой трехмерной моделью, сравнивается с деформацией, предсказанной широко используемой нестационарной двумерной моделью вихревой пелены. Имеющиеся различия объясняются тем, что последняя модель не учитывает эффекты перемещения поперечной компоненты завихренности, в то время как невязкая трехмерная модель вихревой



пелены дает симметричную деформацию поперечного сечения струи и не совсем правильное отклонение струи в направлении поперечного потока по сравнению с экспериментом. Учитывая эффекты вязкости, начальный участок сильной струи моделируется в работе Колхо [168] вихрево-пеленной моделью “вовлечения”, которая действует подобно полосе вихрей, перераспределяя завихренность в пограничном слое струи и производя несимметричные деформации поперечного сечения струи. Это ведет к правильному отклонению струи в направлении потока, хотя существует и недостаток в данной модели – ось струи не рассчитывается, а задается в форме квадратичной кривой.

Одной из важных характеристик струи является параметр (или несколько параметров) профиля скорости. Обычно выбор такого параметра диктуется свойством автомодельности струйного течения, которое в случае турбулентной струи в поперечном потоке отсутствует. В связи с этим еще Д. Кеффер [192] предложил разбить область течения струи на три участка, внутри каждого из которых течение можно считать автомодельным: начальный участок, включающий потенциальное ядро, участок развитого турбулентного течения и участок “дальнего” поля течения. Он предполагал, что наиболее значительные изменения формы поперечного сечения струи происходят на дальнем участке, однако данные измерений Ю. Камотани [88] это предположение не подтвердили. Более того, этот автор пришел к заключению, что искривленные струи не обладают свойством автомодельности. Поэтому для решения задачи о распространении турбулентной струи в поперечном потоке необходимо иметь более адекватную математическую модель смещения, расчет по которой следует проводить одновременно с расчетом изменения скорости, давления, формы поперечного сечения и интенсивности расширения струи.

В работах Р. Стоя [219] и П. Вулера [232] процесс эжекции жидкости в струю рассчитывается на основе разности скоростей струи и поперечного потока, а в работе Д. Сукеса [221] предложены способы расчета эжекции на основе динамики площади поперечного сечения струи и уравнения неразрывности. В. Бейнс и Д. Кеффер [191, 192] на этом пути сделали шаг вперед и рассматривали эжекцию как сумму составляющих: эжекция прямой струей и эжекция в окружном направлении (точнее вдоль спирали). Д. Шварц и М. Тулин [216, 226] местное нарастание толщины струи моделируют с помощью пары вихрей.

Приведенные выше модели описывают лишь отдельные аспекты поведения турбулентной струи в поперечном потоке. Имеются и другие работы, объясняющие общий механизм смещения, которые обсу-

ждались в литературе Д. Адлером [5] и М. Шварцманом [215]. Весьма интересной является работа Д. Адлера [5], в которой предпринята попытка обобщить идеи, описанные в [88, 192, 216, 220, 226]. Однако ряд принятых там допущений противоречит экспериментальным данным. Это касается эжекционной способности струи, которая считается растущей с уменьшением отношения скорости струи к скорости поперечного потока. В наших работах [32–34] В. Г. Кузьменко использовал комплексный подход к решению этой задачи, где предприняты попытки учесть главные механизмы сложного взаимодействия струи с поперечным потоком. Этот подход ниже рассмотрен подробно.

## 8.2. Постановка задачи о струе в сносящем потоке с целью учета деформации ее поперечного сечения

Для описания динамики струи в сносящем потоке, как и в предыдущей главе, будем использовать криволинейную систему координат  $s, n, \xi$  и исходные интегро-дифференциальные уравнения движения в форме (7.43)–(7.46) только без учета влияния сил плавучести. Компоненты скорости поперечного потока вблизи границы раздела струя–поперечный поток и безразмерную продольную компоненту скорости струи представим в виде

$$W_s = W \cos(p^* \alpha), \quad W_n = -W \sin(p^* \alpha), \quad \frac{v_s - W_s}{v_{sm} - W_s} = \Phi, \quad (8.1)$$

откуда для продольной составляющей скорости струи имеем

$$v_s = W \cos(p^* \alpha) + \Delta v_m \Phi,$$

где  $\Delta v_m = v_{sm} - W_s$  ( $\Delta v_m$  – максимальная продольная избыточная компонента скорости струи в плоскости поперечного сечения струи);  $\Phi$  – неизвестная пока функция распределения избыточной продольной компоненты скорости струи по плоскости поперечного сечения;  $p^*$  – эмпирический коэффициент, учитывающий реальное значение скорости поперечного потока на границе раздела струя–поперечный поток. Такое представление  $v_s$ ,  $W_s$  и  $W_n$  обеспечивает учет неавто-модельности задачи.

Подставив соотношения (8.1) в уравнение движения (7.43), полу-

чим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \iint_F \rho (W \cos(p^* \alpha) + \Delta v_m \Phi) \Phi \Delta v_m dF = \\ = \frac{\partial \alpha}{\partial s} p^* W \sin(p^* \alpha) \iint_F \rho \Delta v_m \Phi dF. \end{aligned} \quad (8.2)$$

В целях удобства введем следующие обозначения:

$$I_1 = \iint_F \Phi dF; \quad I_2 = \iint_F \Phi^2 dF.$$

Тогда уравнение (8.2) после соответствующих преобразований приобретает следующую форму:

$$\begin{aligned} (I_1 W \cos(p^* \alpha) + 2I_2 \Delta v_m) \frac{\partial(\Delta v_m)}{\partial s} = 2p^* W \sin(p^* \alpha) \times \\ \times \Delta v_m I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial s} - W \cos(p^* \alpha) \Delta v_m \frac{\partial I_1}{\partial s} - (\Delta v_m)^2 \frac{\partial I_2}{\partial s}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Аналогичным образом преобразуем уравнение движения в проекции на ось  $n$  (7.46) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F (W \cos(p^* \alpha) + \Delta v_m \Phi)^2 dF + \\ + W \sin(p^* \alpha) \frac{\partial}{\partial s} \iint_F (W \cos(p^* \alpha) + \Delta v_m \Phi) dF = \\ = -\pi b c_d W^2 \sin^2(p^* \alpha) - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \frac{p}{\rho} dF. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Воспользуемся теперь уравнением Бернулли и условием постоянства давления в плоскости поперечного сечения струи. Тогда последний член уравнения (8.4) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F p dF = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \iint_F \left( p_0 + \frac{\rho W_s^2}{2} - \rho \frac{v_s^2}{2} \right) dF = \\ = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \left[ p_0 F - \rho W_s I_1 \Delta v_m - \frac{\rho}{2} I_2 (\Delta v_m)^2 \right], \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $p_0$  – статическое давление на выходе из отверстия, равное статическому давлению в поперечном потоке.

Теперь, подставив соотношения (8.1) и (8.5) в (8.4), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \alpha}{\partial s} \left[ \frac{F p_0}{\rho} + W^2 F (\cos^2(p^* \alpha) - p^* \sin^2(p^* \alpha)) + \right. \\
 & \quad \left. + W \cos(p^* \alpha) I_1 \Delta v_m + \frac{I_2}{2} (\Delta v_m)^2 \right] = \\
 & = -I_1 W \sin(p^* \alpha) \frac{\partial (\Delta v_m)}{\partial s} - W^2 \sin(p^* \alpha) \cos(p^* \alpha) \frac{\partial F}{\partial S} - \\
 & \quad - W \sin(p^* \alpha) \Delta v_m \frac{\partial I_1}{\partial s} - \pi b c_d W^2 \sin^2(p^* \alpha).
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Таким образом, для описания динамики неплавучей струи в поперечном потоке имеются два уравнения движения (8.3) и (8.6), которые содержат пять неизвестных величин:  $\alpha$ ,  $\Delta v_m$ ,  $F$ ,  $I_1$  и  $I_2$  зависящих только от переменной  $s$ . Следовательно, производные от этих величин по переменной  $s$  являются обыкновенными производными. Основные неизвестные величины в задаче – это локальный угол  $\alpha$  и избыточная продольная компонента скорости  $\Delta v_m$ .

Приведем эти уравнения к канонической форме относительно этих величин. Тогда после несложных преобразований уравнения (8.3) и (8.6) примут вид

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{f_3 f_4 - f_6 f_1}{f_5 f_1 - f_2 f_4}, \tag{8.7}$$

$$\frac{d\Delta v_m}{ds} = \frac{f_3 f_5 - f_6 f_2}{f_5 f_1 - f_2 f_4}, \tag{8.8}$$

где введены следующие обозначения:

$$f_1 = I_1 W \cos(p^* \alpha) + 2I_2 \Delta v_m;$$

$$f_2 = 2p^* W \sin(p^* \alpha) \Delta v_m I_1;$$

$$f_3 = -W \cos(p^* \alpha) \Delta v_m \frac{dI_1}{ds} - (\Delta v_m)^2 \frac{dI_2}{ds};$$

$$f_4 = I_1 W \sin(p^* \alpha);$$

$$f_5 = -\frac{p_0}{\rho} F - W^2 F [\cos^2(p^* \alpha) - p^* \sin^2(p^* \alpha)] -$$

$$-W \cos(p^* \alpha) I_1 \Delta v_m - \frac{I_2}{2} (\Delta v_m)^2;$$

$$f_6 = -\frac{dF}{ds} W^2 \sin(p^* \alpha) - \frac{dI_1}{ds} \Delta v_m W \sin(p^* \alpha) - \pi b c_d W^2 \sin^2(p^* \alpha).$$

Уравнения (8.7) и (8.8) дополним геометрическими соотношениями, которые связывают декартовы координаты  $x$  и  $z$  с криволинейной координатой  $s$  и углом  $\alpha$ :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad (8.9)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \alpha. \quad (8.10)$$

Уравнения (8.9) и (8.10) являются уравнениями оси струи. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (8.7) – (8.10), описывающих динамику струи в поперечном потоке, оказывается пока незамкнутой, так как имеется четыре уравнения и семь неизвестных величин  $\alpha$ ,  $F$ ,  $\Delta v_m$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $x$  и  $z$ . Отметим, что для определения  $I_1$  и  $I_2$  следует найти не только функцию  $\Phi$ , но и координаты контура поперечного сечения струи. Поэтому для получения замкнутой системы необходимо привлечь дополнительные уравнения. Одним из них будет служить уравнение для описания эволюции площади поперечного сечения  $F$ , а также соотношение для определения функции  $\Phi$  и соотношения для расчета координат контура поперечного сечения.

### 8.3. Использование динамики вихревых структур для описания эволюции площади поперечного сечения струи

Моделирование динамики поперечного сечения струи в сносимом боковом потоке является исключительно сложной задачей. Поэтому при ее решении естественно использовать полуэмпирический подход, опирающийся на экспериментальные данные. Выше уже говорилось о возможных вариантах, предлагаемых различными авторами для описания процесса эжекции жидкости в струю, распространяющуюся в поперечном потоке. Используя эти результаты, обратимся к более комплексному подходу при математическом описании эволюции площади поперечного сечения рассматриваемой струи. С этой целью будем полагать, что эволюция площади поперечного сечения струи связана с тремя процессами:

- 1) увеличением площади поперечного сечения вследствие эжекции, идентичной механизму затопленной турбулентной струи (с поправкой на криволинейность струи в поперечном потоке);
- 2) развитием пары стационарных стоячих вихрей с противоположным направлением вращения;
- 3) развитием системы парных “подковообразных” вихрей.

В дальнейшем оказывается целесообразно ввести понятие эквивалентного радиуса струи  $R$ , из условия, что определенная с его помощью площадь круглого поперечного сечения  $F = \pi R^2$  будет равна действительной площади деформированного поперечного сечения струи. Тогда в соответствии с принятой схемой смещения эволюцию площади поперечного сечения турбулентной струи в поперечном потоке представим в виде трех составляющих:

$$\frac{dF}{ds} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \quad (8.11)$$

где  $s$  – продольная криволинейная координата. Оценим каждую из этих составляющих.

Будем, как обычно, полагать, что для затопленной турбулентной струи изменение ее эквивалентного радиуса происходит линейно по  $s$  и описывается формулой

$$\frac{dR}{ds} = A_0. \quad (8.12)$$

Параметр  $A_0$  – это константа, и, согласно Г. Абрамовичу [3], для круглых затопленных турбулентных струй  $A_0 = 0.22$ .

Для случая же искривленной струи Д. Адлер и А. Барон [5] предложили следующую модификацию уравнения (8.12):

$$\frac{dR}{ds} = A_0 \frac{\Delta v_m}{\Delta v_m + W_s}. \quad (8.13)$$

Поэтому первая составляющая правой части уравнения (8.11) с учетом того, что  $R = \sqrt{F/\pi}$ , будет

$$\varphi_1 = 2\sqrt{\pi F} A_0 \frac{\Delta v_m}{\Delta v_m + W \cos(p^* \alpha)}. \quad (8.14)$$

Процесс развития пары стационарных стоячих вихрей исследовался М. Тулиным и Д. Шварцем [226]. Они предложили для нарастания эквивалентного безразмерного радиуса поперечного сечения

струи следующую формулу:

$$\frac{1}{\delta} \frac{d\bar{R}}{ds} = \left( k_1 - \frac{k_2}{\delta} \frac{d\bar{R}}{ds} \right) \bar{R}^{(1-A_b)}. \quad (8.15)$$

Переходя к безразмерной эквивалентной площади  $\bar{F}$ , имеем

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = 2\sqrt{\pi\bar{F}} \frac{\delta k_1}{\{(\pi/\bar{F})^{(1-A_b)/2} + k_2\}}, \quad (8.16)$$

где  $\delta k_1 = 0.38$ ;  $k_2 = 0.5$ ;  $A_b$  - параметр, который определяет степень убывания завихренности вследствие взаимного ослабления вихрей. Для случая трехмерной турбулентной струи динамику параметра  $A_b$  будем описывать зависимостью [5]:

$$A_b = \exp(-sW/(\pi v_0 R_0)) v_0 / (6.2W). \quad (8.17)$$

Тогда, используя поправку Д. Адлера и А. Барона [5] на искривленность струи, представим второе слагаемое в правой части уравнения (8.11), учитывающее процесс развития пары стационарных стоячих вихрей в турбулентной струе, распространяющейся в поперечном потоке, следующим выражением:

$$\varphi_2 = \frac{2\sqrt{\pi\bar{F}}W \sin(p^*\alpha)}{[\Delta v_m + W \cos(p^*\alpha)]} \frac{\delta k_1}{\{(\pi R_0^2/F)^{(1-A_b)/2} + k_2\}}. \quad (8.18)$$

Для оценки третьего слагаемого в правой части уравнения (8.11) воспользуемся результатами работ Т. Гиршович [53, 62, 64], А. Вискова и Ю. Горелова [51, 68]. При этом учтем данные экспериментов, выполненных под руководством Т. Гиршович [53, 62], которые показали, что эжекция зависит от величины параметра поперечного потока и имеет экстремальный характер. Сначала эжекция возрастает с увеличением параметра  $m = W/v_0$ , так, что расход при  $m \sim 0.13$  становится значительно большим, чем у обычной затопленной турбулентной струи. При  $m > 0.13$  нарастание расхода становится менее интенсивным и приближается к нарастанию расхода в обычной затопленной струе. Наличие экстремума в эжекционной способности струи связано с дополнительной массой жидкости, которая втекает в струю из поперечного потока через ее лобовую поверхность, и последующим растеканием в боковых направлениях под воздействием градиента давления. При малых  $m$  струя искривляется слабее, так что поверхность, через которую происходит проникновение жидкости из поперечного потока, больше, чем при больших  $m$ . Поэтому

существует такое  $m$ , при котором процесс смещения струи с поперечным потоком является наиболее интенсивным.

В то же время, в работах А. Вискова и Ю. Горелова [51, 68] показано, что присутствие на лобовой поверхности струи системы парных “подковообразных” вихрей делает вихревую поверхность струи как бы “проницаемой” и, следовательно, увеличивается количество вовлекаемой жидкости в струю из поперечного потока.

Учитывая эти обстоятельства и используя экспериментальные результаты А. Вискова и Ю. Горелова [51, 68] о величине втекаемой массы в струю посредством системы парных “подковообразных” вихрей и ширине зоны втекания на всем протяжении изучаемого участка струи, будем описывать вклад системы парных “подковообразных” вихрей в процесс изменения площади поперечного сечения струи эмпирическим соотношением

$$\varphi_3 = 2\sqrt{\pi F} m (s/R_0 + 1)^{-2.73m - 0.158}. \quad (8.19)$$

Подставляя выражения (8.14), (8.18) и (8.19) в уравнение (8.11), получим полуэмпирическое дифференциальное уравнение эволюции площади поперечного сечения турбулентной струи в сносящем потоке в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} = 2\sqrt{\pi F} \left[ A_0 \frac{\Delta v_m}{\Delta v_m + W \cos(p^* \alpha)} + \frac{W \sin(p^* \alpha)}{\Delta v_m + W \cos(p^* \alpha)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta k_1}{\{(\pi R_0^2/F)^{(1-A_b)/2} + k_2\}} + m (s/R_0 + 1)^{-2.73m - 0.158} \right]. \end{aligned} \quad (8.20)$$

В случае отсутствия сносящего потока ( $W = m = 0$ ) уравнение (8.20) вырождается в уравнение, аналогичное (8.12), характерное для затопленной турбулентной струи и имеет вид

$$\frac{dF}{ds} = 2\sqrt{\pi F} A_0.$$

#### 8.4. Расчет функции поперечного распределения продольной скорости струи

Для расчета функции поперечного распределения избыточной скорости струи  $\Phi$  используем метод работы Д. Адлера [5]. При этом будем учитывать, что профили скорости струи неавтономные и трехмерные. Вместе с тем метод Д. Адлера [5] определяет не сами профили скорости, а только параметры семейства профилей. Для



нахождения параметров семейства профилей согласно Д. Адлеру используем вспомогательную функцию  $T$ , удовлетворяющую уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = q,$$

подобно тому, как это было сделано Л. Г. Лойцяным [101] при определении поперечного распределения скорости в трубе произвольного поперечного сечения. Тогда в рамках принятой схемы течения функция  $T$  и два параметра  $A$  и  $B$  фактически будут определять поперечное распределение параметров семейства профилей скорости.

В результате использования этого подхода функция поперечного распределения избыточной продольной компоненты скорости струи  $\Phi$  определяется по следующим формулам: на начальном участке в потенциальном ядре

$$\Phi = 1;$$

на начальном участке вне потенциального ядра

$$\Phi = (T/T_p)^{(T/T_p)(-B)+B+1},$$

где параметр  $T_p$  – значение функции  $T$  на границе потенциального ядра.  $T_p$  выбирается таким образом, чтобы на границе потенциального ядра  $\Phi = 1$ ; на основном участке

$$\Phi = (T/T_{\max})^{(T/T_{\max})(A-B)+B+1}.$$

Параметр  $A$  определяет деформацию профиля во внутренней области струи, а  $B$  – деформацию профиля избыточной продольной компоненты скорости струи вблизи границы поперечного сечения струи. Эти параметры вычисляются, согласно работе [5], так:

$$A = 0.15 + 0.126(s - s_n)/(30R_0 - s_n), \quad B = 0.945.$$

Здесь  $T_{\max}$  – максимальное значение функции  $T$  в плоскости поперечного сечения струи,  $s_n$  – длина начального участка струи.

Учитывая результаты наших предыдущих расчетов по определению длины начального участка для струй в поперечном потоке, примем следующее полуэмпирическое соотношение для определения длины начального участка  $s_n$  при различных значениях параметра поперечного потока  $m$ :

$$s_n = 1.8R_0/(0.19 + 0.83m). \quad (8.21)$$

Выбор значения постоянной  $q$  в уравнении Пуассона не оказывает влияния на результаты вычислений, так как величина  $\Phi$  выражается через безразмерную функцию  $T/T_{\max}$ . Поэтому для простоты в расчетах принимается  $q = -1$ .

Уравнение Пуассона решалось численно с помощью метода прямых [112]. Его решение, удовлетворяющее условию  $T = 0$  на границе струи, записывалось в форме

$$T_k(n) = \sum_{i=1}^I (-1)^{k+i} C_i \sin \frac{ki}{I+1} \operatorname{ch}(\beta_i n) + \frac{k(I+1-k)}{2} h_a^2, \quad (8.22)$$

где

$$\beta_i^2 = -\frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i/12)h_a^2};$$

$$\lambda_i = -2 \left( 1 + \cos \frac{\pi i}{I+1} \right); \quad h_a = \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min}}{I}.$$

При расчетах поверхность поперечного сечения разбивалась  $I+1$  прямыми, параллельными оси  $\xi$ , расстояния между которыми  $h_a$  и  $\xi_k = \xi_{\min} + kh_a$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, I$ ;  $\xi_{\max}$  и  $\xi_{\min}$  – максимальное и минимальное значение координаты  $\xi$  на контуре поперечного сечения струи. Произвольные постоянные  $C_i$  определялись из алгебраической системы, которая получается из решения (8.22) после подстановки граничных условий. Значение функции  $T_k(n)$  находилось с помощью соотношений (8.22) в точке с координатами  $(\xi_k, n)$ .

Для вычисления функции распределения продольной избыточной компоненты скорости струи  $\Phi$  необходимо сначала определить координаты контура поперечного сечения струи  $\xi_l, n_l$ .

## 8.5. Описание формы поперечного сечения струи с помощью уравнений динамики вихревых нитей

Задачу определения формы поперечного сечения струи, т.е. определения координат  $\xi_l, n_l$  на контуре поперечного сечения будем решать путем нахождения траекторий движения системы вихревых нитей по поверхности раздела струя – поперечный поток. Выбор именно такой методики обусловлен следующим. При истечении струи в поперечный поток на поверхности раздела струя – поперечный поток образуются вихревые структуры. Анализ работы С. Колхо [168] показывает, что основополагающие механизмы, управляющие рассматриваемым течением, наиболее удачно описываются трехмерной вихрево-пеленной моделью “вовлечения”, хотя, строго говоря, она

пригодна только для вязких струй на начальном участке при малых значениях  $m$ .

Модель движения системы  $N$  вихревых нитей состоит в следующем. В начальный момент времени  $N$  прямолинейных вихревых нитей одинаковой длины расположены вдоль периметра отверстия и при этом сопряжены в узловых точках, которые непосредственно находятся на срезе отверстия. Под воздействием струи и поперечного потока  $N$  вихревых нитей перемещаются по границе раздела струя – поперечный поток, взаимодействуя между собой путем взаимного индуцирования дополнительной скорости  $\vec{v}(v_\xi, v_n, v_s)$  непосредственно на самих вихревых нитях. Поэтому траектория движения системы  $N$  вихревых нитей определяется путем интегрирования трех очевидных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_i}{dt} &= V_{c\xi}^{(i)} + v_\xi^{(i)}, \\ \frac{dn_i}{dt} &= V_{cn}^{(i)} + v_n^{(i)}, \\ \frac{ds_i}{dt} &= V_{cs}^{(i)} + v_s^{(i)},\end{aligned}\tag{8.23}$$

где  $V_{c\xi}^{(i)}$ ,  $V_{cn}^{(i)}$ ,  $V_{cs}^{(i)}$  – компоненты скорости струи на ее границе;  $i$  – номер узловой точки соответствующей вихревой нити,  $i = \overline{1, N}$ . В соответствии с определенным выше понятием границы струи имеем:

$$\begin{aligned}V_{c\xi}^{(i)} &= 0, & V_{cn}^{(i)} &= 0, \\ V_{cs}^{(i)} &= W \cos(p^* \alpha) + \varepsilon(V_{sm} - W \cos(p^* \alpha)).\end{aligned}\tag{8.24}$$

Методика определения индуцированной скорости  $\vec{v}$  такова. Сначала скорость  $\vec{v}$  вычисляется в рамках движения невязкой жидкости, а затем производится модификация формул с учетом реальных процессов в вязкой жидкости.

Согласно закону Био – Савара для невязкой жидкости определим элементарную скорость, которую индуцирует элементарный отрезок  $d\vec{l}$  вихревой нити с интенсивностью  $\Gamma$  в  $i$ -ой точке (точка  $M$ ):

$$d\vec{v}^{(i)} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}.$$

На рис. 8.1 показана схема взаимосвязи элементарного отрезка вихревой нити и криволинейной системы координат  $O_1\xi ns$ .

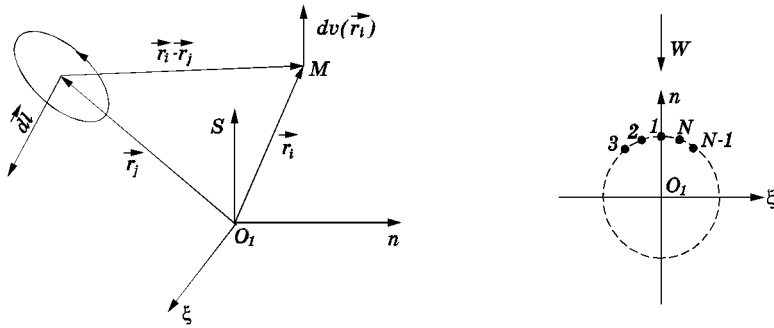


Рис. 8.1. Элементарный участок вихревой нити  $d\vec{l}$  в криволинейной системе координат  $O_1sn\xi$  и нумерация точек сопряжения  $N$  вихревых нитей

Важным условием существования вихревых нитей на границе раздела струя – поперечный поток является условие определения границы струи как поверхности тангенциального разрыва в рамках принятой схемы течения. Тогда в невязкой жидкости уравнение для скорости, индуцированной системой  $N$  вихревых нитей в  $i$ -й узловой точке записывается в виде

$$\vec{v}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \int_{C_j} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}. \quad (8.25)$$

Для вычисления интеграла (8.25) разбиваем каждую нить  $C_j$  на конкретное для каждой нити количество интервалов  $N_j$  с длиной интервала интегрирования  $\Delta C = |\Delta \vec{l}_j|$ , где вектор

$$\Delta \vec{l}_j = \left\{ \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{N_j}; \frac{n_{j+1} - n_j}{N_j}; \frac{s_{j+1} - s_j}{N_j} \right\},$$

$N_j = |C_j|/\Delta C$ ;  $|C_j|$  – абсолютная величина  $j$ -той прямолинейной вихревой нити;  $\Delta C = 0.01R_0$ . Поэтому уравнение (8.25) в дискретном варианте запишется следующим образом:

$$\vec{v}^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \left[ \sum_{k=1}^{N_j} \frac{\Delta \vec{l}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{jk})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{jk}|^3} \right] + \frac{\Gamma_i}{4\pi} \frac{\Delta \vec{l}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_i|^3}. \quad (8.26)$$

При анализе выражения (8.26) видно, что последнее слагаемое в правой части является величиной неограниченной. Это оказыва-

ется результатом того, что классическая теория вихревых нитей для невязкой жидкости страдает от двух серьезных недостатков:

- 1) скорость жидкости на вихревой нити становится неограниченной;
- 2) скорость движения вихревой нити является величиной неопределенной.

Но в реальной вязкой жидкости поле скорости и ее градиент должны оставаться ограниченными везде. Во внутреннем регионе вихревой нити (назовем его  $h$ -окрестностью вихревой нити) скорость и градиент скорости стремятся стать очень большими величинами, а, в свою очередь, эффекты вязкости являются механизмом, который уменьшает скорость и ее градиент. Поэтому дефекты классической невязкой теории для движения вихревых нитей могут быть исключены, если невязкое решение для скорости определяется как главное во внешней части вихревой нити, а эффекты вязкости, кроме того, становятся важными уже во внутренней части. Поэтому если выбрать вид вязкостных выражений таким образом, чтобы скорость была бы ограниченной везде, то это позволит ограничить скорость вихревой нити во внутреннем регионе.

С учетом вышесказанного представим соотношение (8.26) в следующей форме:

$$\vec{v}^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \left[ \sum_{k=1}^{N_j} \frac{\Delta \vec{l}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{jk})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{jk}|^3} \right] + \frac{\Gamma_i}{4\pi} \frac{\Delta \vec{l}_i \times \vec{H}_i}{h^2}, \quad (8.27)$$

где  $\vec{H}_i$  – единичный ортонормированный вектор

$$\vec{H}_i = \lim_{|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|};$$

постоянная величина  $h$  связана с выбором масштаба  $h$ -окрестности вихревой нити.

Таким образом, скорость, индуцированная системой  $N$  вихревых нитей в квазивязкой жидкости и определяемая в любой точке пространства, в том числе и в  $h$ -окрестности вихревой нити, будет конечной величиной, вычисляемой с помощью выражения (8.27).

Определение численного значения величины  $h$  связано с учетом эффектов вязкости. В данной модели  $h = 0.01R_0$ , а шаг счета  $\Delta C$  в соотношении (8.27) выбран равным  $h$ . Выбор таких условий обеспечивает качественный и количественный учет эффектов вязкости и их корректную реализацию при численном методе решения.

В свою очередь, так как вектор  $\vec{H}_i$  является характеристикой  $h$ -окрестности вихревой нити, его направление в пространстве фактически определяет учет эффектов вязкости. Поэтому вектор  $\vec{H}_i(H_\xi, H_n, H_s)$  определяем как вектор, перпендикулярный вектору  $\Delta \vec{l}_i$ , направленный внутрь струи и при этом  $H_s > 0$ . Таким образом обеспечивается условие того, что в квазивязкой жидкости вихревые нити в рамках выбранной схемы течения будут двигаться по поверхности раздела струя – поперечный поток и будет наблюдаться расширение струи вдоль ее оси.

Данная математическая модель предполагает, что интенсивность вихревой нити  $\Gamma_j$  является величиной, которая зависит от параметра поперечного потока  $m$ , номера вихревой нити и от процесса затухания интенсивностей вихревых нитей при их движении и взаимодействии между собой в квазивязкой жидкости. Поэтому интенсивность вихревых нитей  $\Gamma_j$  представляем в виде выражения

$$\Gamma_j = \Gamma_s^* f(j, m), \quad (8.28)$$

где  $f(j, m)$  – функция распределения интенсивностей вихревых нитей по периметру отверстия;  $\Gamma_s^*$  – величина, характеризующая изменение интенсивностей вихревых нитей вдоль оси  $s$ , причем  $f(j, 0) = 1$ .

Из анализа работ Л. Н. Войтовича, Т. А. Гиринович [53] и С. Т. Кашафутдинова [90] следует, что функция распределения интенсивностей вихревых нитей по периметру отверстия прямо пропорциональна функции распределения скорости струи по этому же периметру. Поэтому для определения вида функции распределения интенсивностей вихревых нитей  $f(j, m)$  поступим следующим образом. Рассмотрим сначала распределение величины коэффициента давления по периметру отверстия при различных значениях параметра  $m$ , представленного на рис. 8.2, который заимствован из работы С. Т. Кашафутдинова [90], и выразим локальную скорость  $v_c^j$  по периметру отверстия для  $j$ -той точки через коэффициент давления  $c_p^j$ . С этой целью воспользуемся свойством постоянства для  $0 \leq m \leq 1$  полного давления по периметру отверстия:

$$\frac{\rho(v_c^j)^2}{2} + p_{ст}^j = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_{00} = \text{const}, \quad (8.29)$$

где  $p_{ст}^j$  – статическое давление по периметру отверстия для  $0 \leq m \leq 1$ , и, в частности,  $p_{00}$ ,  $v_0$  – статическое давление и скорость по периметру отверстия при  $m = 0$ . Но в то же время,  $p_{00} = p_\infty$  ( $p_\infty$  – статическое давление в поперечном потоке). Теперь вводим в рассмотрение

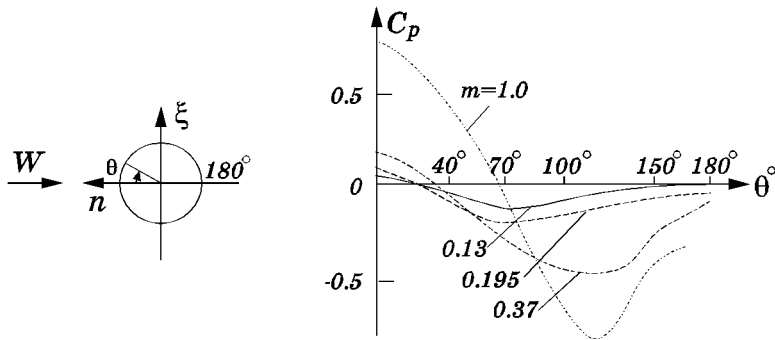


Рис. 8.2. Экспериментальное распределение коэффициента давления по периметру отверстия при различных значениях параметра  $m = W/v_0$

коэффициент давления

$$c_p^j = \frac{p_{ст}^j - p_\infty}{1/2 \rho v_0^2}. \quad (8.30)$$

Преобразовав уравнение (8.29) с помощью (8.30), получим следующее выражение:

$$v_c^j = v_0 \sqrt{1 - c_p^j}. \quad (8.31)$$

В случае отсутствия поперечного потока  $m = 0$ ,  $p_{ст}^j = p_\infty$ ,  $c_p^j = 0$ . Используя теперь выражение (8.31), получаем выражение для функции  $f(j, m)$  в виде  $f(j, m) = v_c^j/v_0$ , и, следовательно,

$$f(j, m) = \sqrt{1 - c_p^j}. \quad (8.32)$$

Величина  $\Gamma_s^*$  в выражении (8.28) определяется из решения полной задачи о распространении турбулентной струи в поперечном потоке. При этом используется условие совпадения значений площади поперечного сечения струи, полученных, с одной стороны, с помощью уравнения эволюции площади поперечного сечения (8.20) и, с другой стороны, площади поперечного сечения, полученной путем обработки результатов решения системы уравнений (8.23) для  $\xi_i$ ,  $n_i$ ,  $s_i$  в координаты точек поперечного сечения струи  $\xi_l$ ,  $n_l$ , где  $l = 1, 2, \dots, N$ .

## 8.6. Расчет основных параметров струи и обсуждение результатов численных исследований

Учитывая вышеизложенные результаты, становится ясно, что для определения основных характеристик струи необходимо решать систему дифференциальных уравнений (8.7)–(8.10) и (8.20), в которую входит неизвестная пока функция  $\Phi$ , определяемая в плоскости поперечного сечения струи. Поэтому сначала рассмотрим подробнее процесс определения формы поперечного сечения струи и используемую для этого систему дополнительных уравнений движения  $N$  вихревых нитей по поверхности раздела струя – поперечный поток во взаимосвязи с основными уравнениями движения.

Задача определения траекторий движения системы  $N$  вихревых нитей является нестационарной, но результатом решения этой задачи будет конечное множество точек на поверхности раздела струя – поперечный поток, при этом координаты точек этого множества, записанные в переменных  $x, y, z$ , не изменяются во времени. Поэтому используем результаты решения системы уравнений движения  $N$  вихревых нитей для определения координат  $\xi_l, n_l$  на контурах поперечных сечений струи вдоль оси  $s$ . Зная координаты  $\xi_l, n_l$ , определяем функцию  $\Phi$ , которая используется для решения системы уравнений (8.7)–(8.10) и (8.20) относительно величин  $F, \alpha, \Delta v_m, x$  и  $z$ . Величина  $\Gamma_s^*$ , характеризующая изменение интенсивностей вихревых нитей вдоль оси  $s$ , определяется с помощью итерационного процесса при соблюдении условия равенства площади поперечного сечения  $F$ , получаемой при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и площади поперечного сечения  $F_s$ , определенной с помощью координат  $\xi_l, n_l$ .

Для завершения математической постановки задачи присоединим следующие очевидные начальные условия при  $s = 0$ :

$$\begin{aligned} F(0) &= \pi R_0^2, & \alpha(0) &= \frac{\pi}{2}, & \Delta v_m(0) &= v_0, \\ x(0) &= 0, & z(0) &= 0, \\ \Phi(0) &= 1, & \xi_l^2(0) + n_l^2(0) &= R_0^2, \end{aligned} \tag{8.33}$$

$$\Gamma_s^* = \Gamma_{0m}, \quad \xi_i^2 + n_i^2 = R_0^2 \quad \text{при} \quad S_i = 0,$$

а также условие на границе струи:

$$\begin{aligned} V_{c\xi} &= 0, & V_{cn} &= 0, \\ V_{cs} &= W \cos(p^* \alpha) + \varepsilon(v_{cm} - W \cos(p^* \alpha)). \end{aligned} \tag{8.34}$$



Величина  $\Gamma_{0m}$  принимается равной  $5.8R_0v_0/N$ , так как согласно экспериментальным данным Р. Фиэрна [147] начальная интенсивность пары стационарных стоячих вихрей в струе равна  $5.8R_0v_0$ , малый параметр  $\epsilon$  принят равным  $10^{-5}$  и  $p^* = 1$ .

Используя начальные и граничные условия (8.33), (8.34) и нулевое приближение для  $\Gamma_s^*$ , находим решение системы уравнений движения  $N$  вихревых нитей (8.23) на начальном участке  $0 < s_i < s_b$ . На основе полученных результатов после простых преобразований находим координаты точек на контуре поперечного сечения струи  $\xi_l, n_l$  при  $s = s_a$  ( $0 < s_a < s_b$ ). Затем определяем функцию  $\Phi$  с помощью вышеприведенных соотношений и координат  $\xi_l, n_l$ . Зная  $\Phi, \xi_l$  и  $n_l$ , решаем на участке  $0 < s < s_a$  систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений (8.7)–(8.10) и (8.20), записанных в каноническом виде относительно величин  $F, \alpha, \Delta v_m, x$  и  $z$ . Величина  $\Gamma_s^*$  определяется с помощью итерационного процесса при соблюдении условия равенства площади поперечного сечения  $F$  и площади поперечного сечения  $F_s$ , определенной с помощью координат  $\xi_l, n_l$ . Это составляет один цикл решения замкнутой системы уравнений.

В рамках принятой схемы течения численный расчет проводился на отрезке  $0 \leq s \leq 50R_0$  вдоль оси струи. Выбранный отрезок разбивался на 50 равных участков и, соответственно, имел следующие точки разбиения 0,  $s_a$  и т.д. Величина  $s_b$  служит в качестве конца участка при решении системы уравнений движения вихревых нитей в пределах одного цикла и определяется следующим условием: как только минимальное значение координаты  $s_i$  становится больше  $s_a$ , то  $s_b = (s_i)_{\min}$ .

Используя 50 раз этот цикл, решаем поставленную задачу о смешении турбулентной струи с поперечным потоком в заранее выбранном объеме пространства.

Дополнительно заметим, что для решения системы уравнений (8.23) используются соотношения (8.24), в которые входит угол  $\alpha$ . В качестве нулевого приближения для итерационной схемы он определялся из формулы Г. Шандорова [150]:

$$\frac{x}{2R_0} = m^2 \left( \frac{z}{2R_0} \right)^{2.55}$$

согласно соотношению

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{dz}{dx} \right).$$

Для решения поставленной задачи расчетная область струи разбивается на начальный, основной и дальний участок, на котором

$v_{sm} = W_s$ . Остановимся подробнее на особенностях течения на начальном участке.

Как известно из работы Г. Н. Абрамовича [3], на начальном участке турбулентной струи имеется ядро постоянного полного давления, представляющее собой область, не охваченную турбулентным перемешиванием. Поэтому максимальная продольная компонента скорости струи на начальном участке равна величине скорости истечения струи  $v_{sm} = v_0$ , следовательно, на начальном участке

$$\Delta v_m = v_0 - W \cos(p^* \alpha). \quad (8.35)$$

Таким образом, при расчете системы обыкновенных дифференциальных уравнений на начальном участке струи вместо уравнения (8.8) используется соотношение (8.35). Далее же, на основном участке используется уравнение (8.8). На последнем участке вместо уравнения (8.8) используется соотношение  $\Delta v_m = 0$ .

Необходимо отметить, что в уравнение (8.8) входят величины  $c_d$  и  $b$ . Полуширина струи  $b$  равняется максимальному значению координаты  $\xi$  на контуре поперечного сечения струи. Коэффициент сопротивления  $c_d$  определялся по следующей эмпирической формуле:

$$c_d = 1 + 0.01ms/R_0.$$

При численных расчетах величина  $p_0/\rho$  в уравнениях (8.7), (8.8) принималась равной  $v_0^2/2$ , а  $N = 40$ .

Полученные результаты решения задачи о смешении турбулентной струи с поперечным потоком позволяют оценить величину относительной присоединенной массы  $(G - G_0)/G_0$ , определяемой соотношением

$$\frac{G - G_0}{G_0} = \frac{\rho \int (W \cos(p^* \alpha) + \Phi \Delta v_m) dF - \rho \pi R_0^2 v_0}{\rho \pi R_0^2 v_0},$$

которое после простых преобразований принимает вид

$$\frac{G - G_0}{G_0} = \frac{FW \cos(p^* \alpha) + \Delta v_m I_1}{\pi R_0^2 v_0} - 1.$$

Величина относительной присоединенной массы является очень важной характеристикой при оценке процесса смешения турбулентной струи с поперечным потоком.

Изложенная математическая модель смешения турбулентной струи с поперечным потоком реализовывалась численно. При этом в процессе решения необходимо было выполнить следующие этапы.

1. Численное решение системы  $3N$  уравнений движения вихревых нитей.
2. Учет взаимосвязи декартовых и криволинейных координат.
3. Численное решение уравнения Пуассона методом прямых для определения величины  $\Phi$ .
4. Численное решение системы пяти обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты шестого порядка точности с автоматическим выбором шага счета.

Переходя к обсуждению полученных результатов и их сравнению с экспериментальными данными различных авторов, необходимо учесть ряд факторов, связанных с условиями истечения из отверстия и правилами выбора границ струи, которые в литературе трактуются неоднозначно. Учет этих обстоятельств сильно затрудняет процесс корректного сравнения результатов. В связи с тем, что поле скоростей и давлений вокруг струи существенно переменное, то понятие ее границы практически не определено. Поэтому существуют условные определения границ, как линий постоянной избыточной скорости (Д. Адлер [5], Ю. Камотани [88]), заданного избыточного давления (Л. Войтович, Т. Гиршович [53]), как линий постоянной величины, равной определенной части от максимальной скорости струи (Р. Фиэрн [147], Е. В. Бруязкий [27]).

Условия истечения, в широком смысле, предполагают указание начальной степени турбулентности потока, шероховатости поверхности внутренних стенок сопла и т. д. Остановимся кратко на особенностях проведения интересующих нас экспериментов.

В работе Р. Фиерна [147] представлены следующие экспериментальные данные:

- 1)  $d_\xi = 16$ ;  $d_n = 12$ ;  $d_n^* = 9$ ;  $F = 160R_0^2$ ;  $s = 29R_0$  (граница струи определялась по линии уровня  $v/v_{sm} = 0.5$ );
- 2)  $d_\xi = 18$ ;  $d_n = 14$ ;  $d_n^* = 10$ ;  $F = 200R_0^2$ ;  $s = 40R_0$  (граница струи определялась по линии уровня  $v/v_{sm} = 0.7$ ).

Параметр потока  $m$  равен 0.13. Величина  $v$  – это местная скорость струи;  $v_{sm}$  – максимальное значение продольной компоненты скорости в плоскости поперечного сечения;  $d_\xi$  – параметр ширины поперечного сечения струи;  $d_n$  – параметр толщины поперечного сечения струи;  $d_n^*$  – параметр толщины поперечного сечения струи на оси  $n$  – оси симметрии поперечного сечения струи (рис. 8.3). Число Рейнольдса  $Re$  определялось, как и в приведенных ниже работах, по

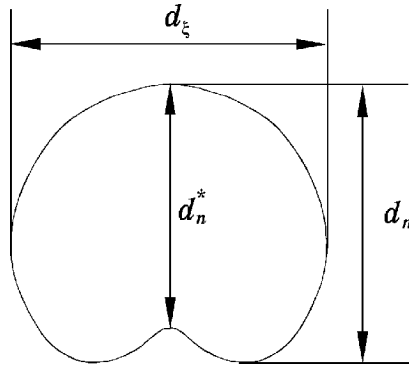


Рис. 8.3. Характерные линейные размеры поперечного сечения струи  $d_\xi$ ,  $d_n$  и  $d_n^*$  в плоскости  $O\xi n$ , нормальной к оси струи

скорости поперечного потока и диаметру отверстия и изменялось в пределах  $2600 \leq Re \leq 36000$ .

В работе Ю. Камотани [88] приводятся следующие экспериментальные результаты:  $d_\xi = 10$ ;  $d_n = 7$ ;  $d_n^* = 6$ ;  $F = 60R_0^2$ ;  $s = 14R_0$  (граница струи определялась по линии уровня  $(v_s - W)/(v_{sm} - W) = 0.2$ ). Параметр потока равен  $m = 0.13$ , а число Рейнольдса изменялось в пределах  $2800 \leq Re \leq 4200$ . Интенсивность турбулентности составляла всего лишь 0.3 %.

Очень показательна работа Ю. Вязовского [56] в смысле выбора границ струи и представления экспериментальных данных. В качестве границы струи принимается поверхность, избыточная скорость на которой в направлении траектории оси становится меньше заданной малой величины. Боковая полуширина струи для случая  $m = 0.07$  равна  $b_{0.5} = 3R_0$  при  $s/R_0 = 24$ ;  $b_{0.5} = 4R_0$  при  $s/R_0 = 32$ . Как видим, трудности при сравнении экспериментальных данных нарастают в силу различного представления данных, способов определения параметров и условий проведения экспериментов.

Причина разноликости представления экспериментальных данных заключается в отсутствии общепризнанной модели и сложности изучения процессов смешения турбулентной струи с поперечным потоком, а как следствие – построение различных моделей описания изучаемых явлений.

Для сравнения и сопоставимости результатов расчета, полученных в рамках данной модели, выполнена соответствующая обработка характерных экспериментальных данных, учитывающая правила

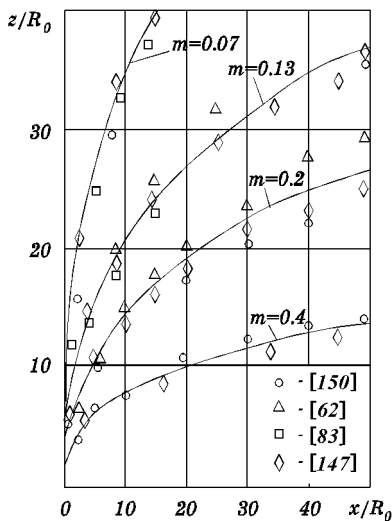


Рис. 8.4. Результаты расчета положения оси струи в сравнении с данными экспериментов для четырех значений параметра  $m$

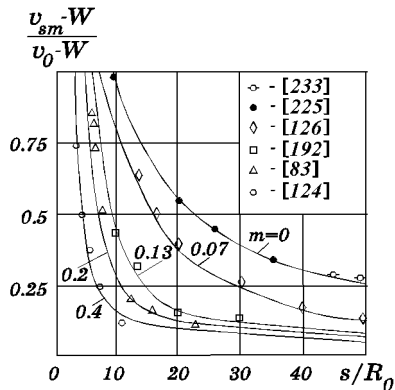


Рис. 8.5. Зависимость осевой избыточной скорости струи от расстояния по результатам расчета и данным экспериментов при различных значениях параметра  $m$

определения границ струи, числа Рейнольдса и степень начальной турбулизации потока. Именно эти откорректированные данные будут представлены ниже на соответствующих рисунках.

С помощью изложенного подхода проведен численный расчет ряда случаев распространения турбулентной струи в поперечном потоке, для которых известны экспериментальные данные, а именно, для следующих значений параметра поперечного потока:

$$m = \{0; 0.07; 0.13; 0.2; 0.4\}.$$

На рис. 8.4 представлено положение оси струи по результатам расчета и данным экспериментов Г. С. Шандорова [150], Ю. В. Иванова [83], Т. А. Гиршович [62] и Р. Фиэрна [147], которые хорошо согласуются между собой. Расчетное изменение продольной избыточной компоненты скорости струи вдоль ее оси  $s$  при различных значениях  $m$  показано на рис. 8.5, из которого следует, что при увеличении параметра поперечного потока  $m$  уменьшается длина начального участка и возрастает интенсивность падения продольной компоненты скорости. Здесь же для сравнения приведены данные экс-

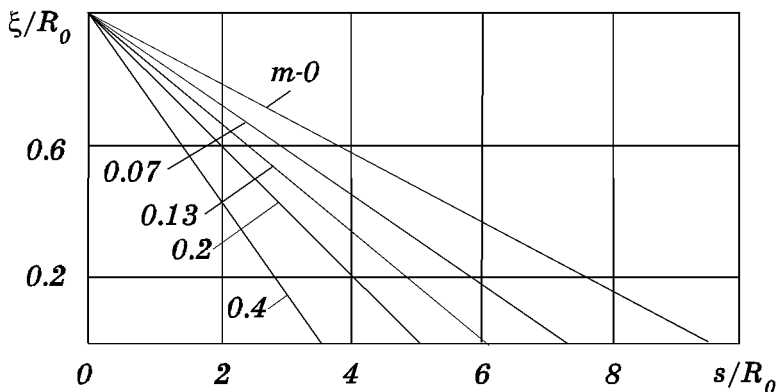


Рис. 8.6. Расчетная длина начального участка и размеров потенциального ядра струи при различных значениях параметра  $m$

периментов Б. Вигнански [233] Т. Трюпеля [225], И. Палатника [125], Д. Кеффера [192] и Ю. Иванова [83].

На рис. 8.6 приведены размеры начального участка и потенциального ядра струи для различных значений параметра  $m$ . Расчеты показывают, что длина начального участка струи убывает с ростом параметра  $m$ . Этот факт говорит о более сильном размывании потенциального ядра при увеличении параметра  $m$  вследствие более интенсивного перемешивания турбулентной струи с поперечным потоком.

На рис. 8.3 представлены характерные параметры линейных размеров поперечного сечения струи, таких как боковая ширина, максимальная толщина и толщина на оси симметрии поперечного сечения, причем  $d_\xi = (\xi_{\max} - \xi_{\min})/R_0$ ;  $d_n = (n_{\max} - n_{\min})/R_0$ ;  $d_n^* = (n_{\max} - n_{\min}^*)/R_0$ ;  $\xi_{\max}$ ,  $\xi_{\min}$ ,  $n_{\max}$ ,  $n_{\min}$  – максимальные и минимальные значения координат  $\xi$  и  $n$  на контуре поперечного сечения, а  $n_{\min}^*$  – минимальное значение координаты на контуре поперечного сечения при  $\xi = 0$ . Зависимость параметра  $d_\xi$  от расстояния  $s/R_0$  при различных значениях параметра  $m$  приведена на рис. 8.7. Здесь же приведены и экспериментальные данные Ю. Вязовского [56], Г. Н. Абрамовича [3], Ю. Камотани [88] и Р. Фиэрна [147], которые хорошо согласуются с результатами расчета. Из этого рисунка видно, что на небольших удалениях от отверстия интенсивность нарастания боковой ширины выше при больших значениях  $m$ , а на значительных расстояниях от отверстия изменение боковой ширины

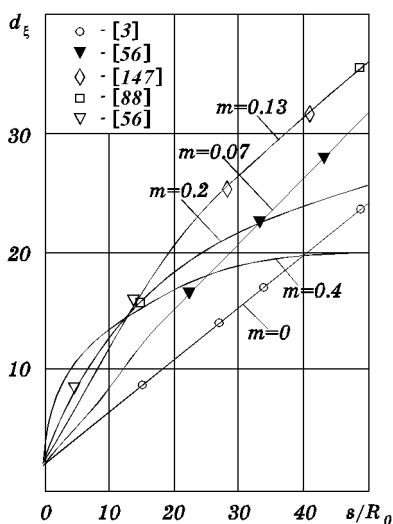


Рис. 8.7. Зависимость характерного размера  $d_\xi$  от расстояния  $s/R_0$  по результатам расчета и данным экспериментов при пяти различных значениях параметра  $m$

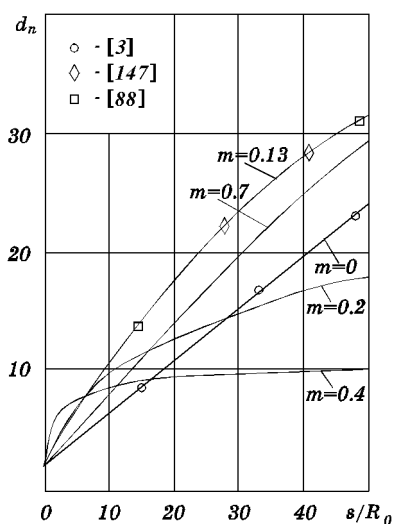


Рис. 8.8. Зависимость характерного размера  $d_n$  от расстояния  $s/R_0$  по результатам расчета и данным экспериментов при пяти различных значениях параметра  $m$

становится более существенным для струй с малым значением параметра  $m$ . Такой характер нарастания боковой ширины струи объясняется тем, что при больших  $m$  под воздействием поперечного потока происходит перераспределение скоростей и статического давления вокруг струи на выходе из отверстия. При взаимодействии поперечного потока и струи повышается статическое давление перед отверстием и уменьшается скорость истечения в передней части струи, а увеличение скорости в боковых областях струи на срезе отверстия указывает на существование внешних областей разрежения с боков тыльной части струи. В результате вблизи отверстия возникает пара стационарных стоячих вихрей противоположного вращения и наибольшее разрежение наблюдается в местах зарождения вихрей, т.е. с боков от отверстия. Эти явления приводят к вытягиванию струи в поперечном направлении и, следовательно, к увеличению бокового размера струи. При удалении от отверстия у таких струй нарастание ширины заметно снижается. При малых значениях пара-

метра  $m$  количество движения струи вблизи отверстия существенно выше, чем поперечного потока, поэтому наличие областей разрежения сбоку от отверстия не вызывает такого расширения струи вблизи отверстия, какое наблюдалось при больших  $m$ . Нарастание ширины струи при этом не очень сильно отличается от затопленной струи. Однако по мере удаления от отверстия вследствие снижения скорости струи воздействие на нее со стороны поперечного потока становится таким же, как и у струи с большим  $m$ , и интенсивность нарастания боковой ширины увеличивается.

На рис. 8.8 представлена зависимость параметра  $d_n$  от расстояния  $s/R_0$  для различных  $m$  в сравнении с экспериментальными данными Г. Абрамовича [3], Ю. Камотани [88] и Р. Фиэрна [147], а на рис. 8.9 приведена зависимость параметра  $d_n^*$  от  $s/R_0$  при тех же упомянутых условиях и данных эксперимента. Как видно из этих рисунков, наблюдается хорошее согласие результатов расчета и данных эксперимента.

Характер изменения  $d_n$  и  $d_n^*$  при различных  $m$  объясняется не только процессами, описанными при анализе рис. 8.7, но и учетом процесса образования и развития системы парных “подковообразных” вихрей на передней части струи. При больших значениях  $m$ , вследствие интенсивного перемешивания струи с поперечным потоком, система парных “подковообразных” вихрей развивается уже недалеко от отверстия, что ведет к нарастанию толщины струи в направлении оси  $n$  на ближних расстояниях от отверстия. Поэтому нарастание толщины струи благодаря этому процессу тоже будет наблюдаться, но на более дальних расстояниях.

Интересные результаты получены при изучении эволюции площади поперечного сечения струи  $F/R_0^2$ . Изменение расчетной безразмерной площади поперечного сечения струи  $F/R_0^2$  в зависимости от расстояния  $s/R_0$  при различных  $m$  представлено на рис. 8.10. Здесь же приведены экспериментальные данные Г. Абрамовича [3], Ю. Камотани [88] и Р. Фиэрна [147], которые хорошо согласуются между собой. Характер изменения площади поперечного сечения подтверждается приведенным выше анализом физических процессов. Так, при больших значениях параметра  $m$  наблюдается более быстрый рост площади поперечного сечения на небольших расстояниях от отверстия. Для малых  $m$  увеличение площади происходит на более дальних расстояниях.

На рис. 8.11 представлена зависимость относительной присоединенной массы струи  $(G - G_0)/G_0$  от расстояния  $s/R_0$  при различных значениях параметра поперечного потока  $m$  по результатам расчета и экспериментальным данным Ю. Вязовского [56] и И. Па-



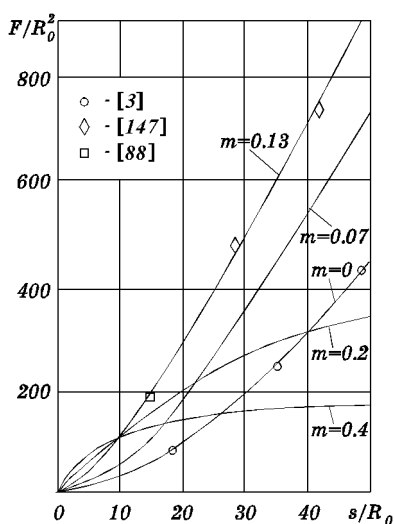
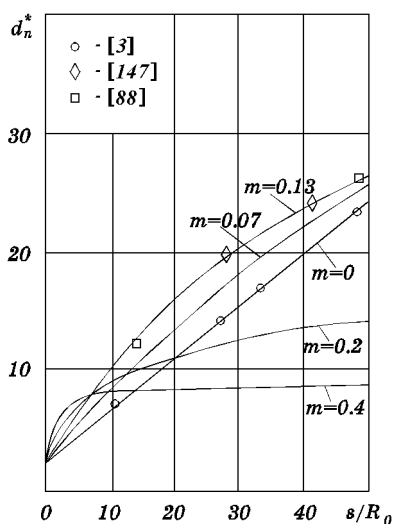


Рис. 8.9. Зависимость характерного размера  $d_n^*$  от расстояния  $s/R_0$  по результатам расчета и данным экспериментов при пяти различных значениях параметра  $m$

Рис. 8.10. Изменение обезразмеренной площади поперечного сечения струи  $F/R_0^2$  в зависимости от расстояния  $s/R_0$  по результатам расчета и данным экспериментов при пяти различных значениях параметра  $m$

латника [125]. Важно отметить, что при  $s/R_0 > 20$  и  $m = 0.13$  существует максимум в эжекционной способности струи в сравнении с другими расчетными случаями по параметру  $m$ . Как видно из рисунков, величина относительной присоединенной массы струи для  $m = 0.13$  в 2.2 раза больше величины относительной присоединенной массы затопленной струи при  $s/R_0 = 50$ , что является очень важной характерной особенностью смешения турбулентной струи с поперечным потоком. Наличие максимума в эжекционной способности струи при  $s/R_0 > 20$  и  $m = 0.13$  объясняется тем, что, с одной стороны, при малых значениях параметра поперечного потока  $m$  интенсивность эжекции в струю жидкости из поперечного потока посредством системы парных “подковообразных” вихрей и пары стационарных вихрей сравнима с эжекцией затопленной струи, а, с другой стороны – при больших значениях  $m$  пара стационарных вихрей быстро разрушается, что ведет к потере одного из механизмов эжекции жидкости.

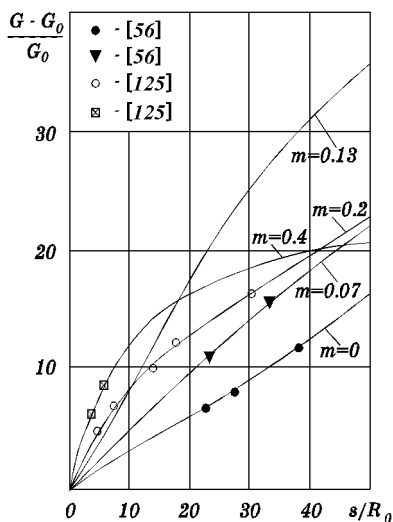


Рис. 8.11. Зависимость относительной присоединенной массы струи  $(G - G_0)/G_0$  от расстояния  $s/R_0$  по результатам расчета и данным экспериментов при пяти различных значениях параметра  $m$

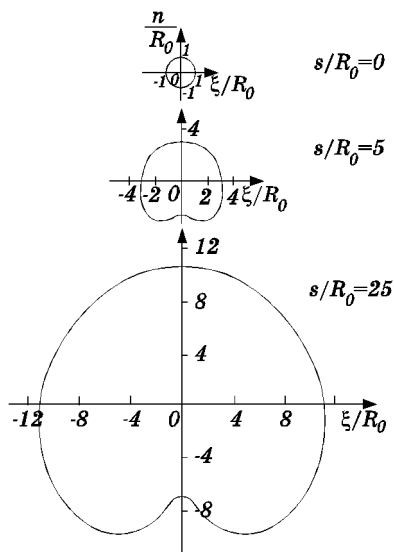


Рис. 8.12. Результаты расчета формы поперечного сечения струи при трех характерных расстояниях от среза отверстия ( $s/R_0 = 0, 5, 25$ ) для случая  $m = 0.13$

На рис. 8.12 иллюстрируются результаты расчета формы поперечного сечения струи при трех характерных расстояниях от среза отверстия ( $s/R_0 = 0, 5, 25$ ) для случая  $m = 0.13$ . Характерно, что чем больше отличие в соотношениях величин  $d_\xi, d_n$  и  $d_n^*$ , тем сильнее форма поперечного сечения струи деформируется к "подковообразной" форме.

На рис. 8.13 представлено сравнение распределения изолиний величины  $\Phi$  в плоскости поперечного сечения, полученных по экспериментальным данным Ю. Камотани [88] и по результатам расчета для  $m = 0.13$  при  $s/R_0 = 46$ . В этом случае максимум продольной компоненты скорости  $\Phi$  уже не находится в центре симметрии поперечного сечения струи, как это было на начальном участке струи, а имеются две области максимумов, расположенные по разные стороны от оси  $n$ . Сравнительный анализ рис. 8.13 показывает хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных.

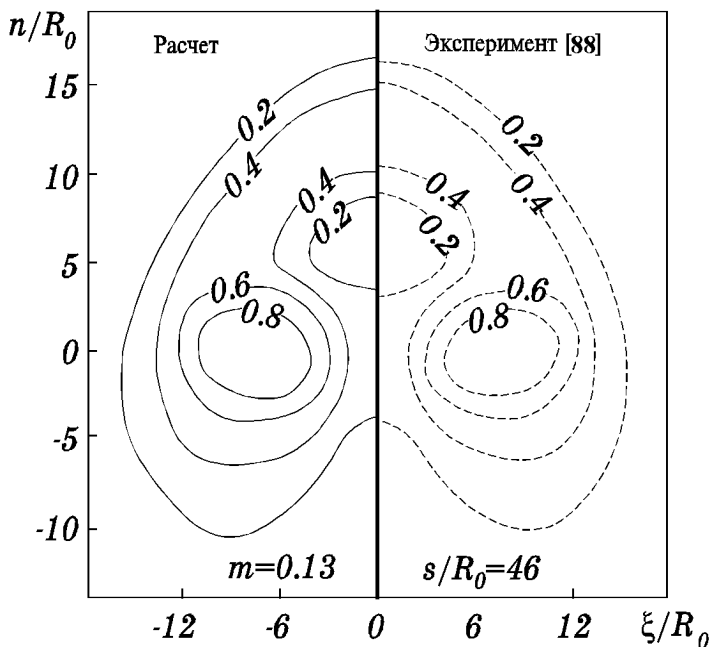


Рис. 8.13. Сравнение распределения изолиний величины  $\Phi$ , полученных экспериментальным путем Ю. Камотани [88] и по результатам расчета для  $m = 0.13$  при  $s/R_0 = 46$

В заключение заметим, что такой углубленный анализ струи в поперечном потоке необходим лишь в специальных случаях, например, при рассмотрении проблемы сгорания топлива при струйной подаче окислителя и в ряде других технических приложений. В проблеме атмосферной диффузии можно ограничиться сравнительно простой моделью, позволяющей рассчитать лишь траекторию струи и некоторые основные ее параметры, такие как эквивалентный радиус струи и осевая концентрация.

## Глава 9

# РАСSEИВАНИЕ РАДИОАКТИВНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

### 9.1. Формулы для расчета полей концентрации и радиоактивности в условиях ровной поверхности для непрерывных и мгновенных выбросов

Все модели атмосферной диффузии являются приближенными и построены на ряде допущений и предположений. Одно из них состоит в допущении об однородности участка поверхности земли, над которым происходит диффузия. В действительности это не так.

В реальных условиях многие источники токсических газоаэрозольных выбросов находятся на неровной поверхности в окружении жилых массивов или производственных сооружений. Так, тепловые или атомные электростанции в силу необходимости охлаждения их конденсаторов обычно сооружаются в пониженных местах вблизи водоемов или в поймах рек. При этом жилые массивы или другие инженерные сооружения строятся на возвышенных местах. В этом случае условия рассеивания выбросов отличаются от тех, которые наблюдаются при ровной поверхности. В пониженных участках местности воздух застаивается, что приводит к повышению уровня загрязнения атмосферного воздуха в этих местах. Под влиянием неровностей местности изменяется общий характер и структура ветрового потока в приземном слое атмосферы, что вызывает существенное изменение распределения концентрации в зоне влияния источника выбросов. Поэтому для выполнения практических расчетов рассмотренные ранее модели атмосферной диффузии примесей нуждаются в их адаптации для условий сложной подстилающей поверхности земли. Однако прежде, чем обратиться к обсуждению этого вопроса, рассмотрим кратко полученные основные формулы для расчета полей концентрации примеси или объемной радиоактивности от выбросов из высотных источников в условиях ровной поверхности земли.

В практической деятельности желательно иметь простые аналитические формулы для расчета уровня загрязненности воздуха. Проанализируем эту задачу в рамках струйно-диффузионной модели рассеивания газоаэрозольных выбросов в атмосфере. Обычно при расчете полей концентрации или объемной радиоактивности рекоменду-

ются рассматривать три характерных случая:

- 1) непрерывный кратковременный выброс при постоянных метеорологических условиях;
- 2) непрерывный выброс произвольной длительности при переменных метеорологических условиях;
- 3) мгновенный или залповый выброс.

Приведем основные формулы для рассеивания примеси на диффузионном участке, считая, что необходимые для этого начальные параметры известны из решения струйной задачи. В случае отсутствия такой информации в принципе можно воспользоваться и традиционной концепцией точечного источника. Концентрацию или объемную активность радионуклидов в воздухе  $C(x, y, z)$  удобно рассчитывать по следующим формулам, единым по своей структуре для всех трех рассматриваемых случаев:

- для непрерывных кратковременных выбросов

$$C_T = M G_T, \quad (9.1)$$

- для непрерывных выбросов произвольной длительности

$$C_\Sigma = M G_\Sigma, \quad (9.2)$$

- для мгновенных или аварийных выбросов

$$C = Q G_t, \quad (9.3)$$

где  $M$  – мощность или интенсивность непрерывного выброса, г/с или Бк/с;  $Q$  – количество выброшенного вещества или активности, г или Бк;  $G_T$ ,  $G_\Sigma$  и  $G_t$  – соответствующие функции рассеивания для кратковременного, длительного и мгновенного выбросов. Учет неконсервативности (радиоактивного распада) примеси и ее вымывание осадками, как было показано, осуществляется с помощью соответствующего экспоненциального множителя, и в этом случае формулы (9.1) – (9.3) принимают соответственно следующий вид:

$$C_T = M \exp \left[ -(\lambda + \Lambda) \frac{x}{W} \right] G_T, \quad (9.4)$$

$$C_\Sigma = M \exp [ -(\lambda + \Lambda)t ] G_\Sigma, \quad (9.5)$$

$$C = Q \exp [ -(\lambda + \Lambda)t ] G_t, \quad (9.6)$$

Табл. 9.1. Относительная вымывающая способность различных типов осадков [105]

Вымыв. способность	Тип осадков						
	дождь	дождь с грозой	снег с дождем	ливень	снег	морось	туман
$k_0$	1	1.1	2.4	2.6	3.0	4.5	5.0

где  $\lambda = 0.693/T_{1/2}$ ;  $T_{1/2}$  – период полураспада рассматриваемого радионуклида;  $x$  – расстояние от источника выброса вдоль направления ветра;  $W$  – расчетная скорость ветра;  $t$  – время диффузии;  $\Lambda$  – параметр вымывания примеси осадками, который зависит от типа осадков. Его величину обычно определяют по соотношению

$$\Lambda = k_r k_0 I, \quad (9.7)$$

где  $I$  – интенсивность осадков, мм/ч;  $k_r$  – стандартная величина абсолютной вымывающей способности дождя ( $\sim 10^{-5}$  ч/(мм·с)), характерная для дождя интенсивностью  $I=1$  мм/ч;  $k_0$  – относительная вымывающая способность осадков других типов, приведенная в табл. 9.1.

Рассмотрим формулы для расчета функций рассеивания  $G_T$ ,  $G_\Sigma$  и  $G_t$ .

**При непрерывном кратковременном выбросе** из точечного или объемного источника, когда такие метеорологические условия как скорость и направление ветра, а также категория устойчивости погодных условий могут считаться постоянными, функция рассеивания  $G_T$  для непрерывного кратковременного источника согласно формуле (6.51) определяется следующим аналитическим выражением:

$$G_T(x, y, z) = \frac{0.1\tilde{C}_{m0}(u, Ri_0)[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi\Sigma_y(t)\Sigma_z(t)W} \times \\ \times \exp\left[-\frac{y^2}{2\Sigma_y^2(t)}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{\left(z - H + \frac{w_g}{W}(x - x_0)\right)^2}{2\Sigma_z^2(t)}\right] + \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{\left(z + H - \frac{w_g}{W}(x - x_0)\right)^2}{2\Sigma_z^2(t)}\right] \right\}, \quad (9.8)$$

где  $w_g$  – скорость гравитационного осаждения примеси;  $\tilde{C}_{m0} =$

$= C_{m0}/C_0$  – осевая нормированная концентрация в конце струйного участка;  $H = H_0 + z_0$  – вертикальная координата оси конца струйного и начала диффузионного участков, определяемые из решения задачи о струе в сносящем ветровом потоке, и зависящие от параметра сносящего потока  $u = W/v_0$  и начального числа Ричардсона

$$Ri_0 = \frac{gr_0(T_0 - T_W)}{T_A v_0^2},$$

которые определяют по табл. 6.1;  $v_0$  – начальная скорость выброса из устья трубы;  $W$  – скорость ветра на высоте  $H$ , определяемая через скорость на высоте флюгера по формуле (6.72);  $T_0$  – начальная температура выброса;  $T_W$  – температура воздуха на высоте  $H$ ;  $T_A = 273 + T_0$ ,  $\Sigma_y(l)$  и  $\Sigma_z(l)$  – параметры горизонтальной и вертикальной дисперсий, зависящие от категории устойчивости атмосферы и определяемые в общем случае соотношениями

$$\Sigma_y^2 = \sigma_0^2 + \sigma_y^2, \quad \Sigma_z^2 = \sigma_0^2 + \sigma_z^2, \quad (9.9)$$

где  $\sigma_0$  – начальное значение дисперсии в случае объемного источника. В случае струйно-диффузионной модели они имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma_y(l) &= \sqrt{\sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta y}^2(l)(x - x_0)^2}, \\ \Sigma_z(l) &= \sqrt{\sigma_0^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta z}^2(l)(x - x_0)^2}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где  $x_0$  – горизонтальная координата начала диффузионного участка, определяемая из расчета струйного участка по табл. 6.1;  $\sigma_0 = 0.316b_c$  – значение дисперсии в сечении  $x_0$ ;  $b_c$  – эквивалентный радиус струи в конце струйного участка, определяемый по табл. 6.1;  $k_\Phi$  – уровень фоновой турбулентности, %;  $\sigma_{\theta y}$  и  $\sigma_{\theta z}$  – угловые дисперсии направления скорости ветра, зависящие от категорий устойчивости атмосферы  $l(1, 7)$  и определяемые по табл. 6.4.

Нетрудно видеть, что стандартные дисперсии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  в рамках струйно-диффузионной модели определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_y(l) &= \sqrt{0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta y}^2(l)(x - x_0)^2}, \\ \sigma_z(l) &= \sqrt{0.02(1 + 0.03k_\Phi)H(x - x_0) + \sigma_{\theta z}^2(l)(x - x_0)^2}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Функция рассеивания  $G_T$  на уровне земли ( $z = 0$ ) в рассматри-

ваемом случае определяется по формуле

$$G_T(x, y, 0) = \frac{0.2\tilde{C}_{m0}(u, Ri_0)[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi\Sigma_y(l)\Sigma_z(l)W} \times \exp\left[-\frac{y^2}{2\Sigma_y^2(l)}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{\left(-H + \frac{w_g}{W}(x - x_0)\right)^2}{2\Sigma_z^2(l)}\right] \right\}. \quad (9.12)$$

Пример расчета поля приземных концентраций по формуле (9.4) для непрерывного кратковременного выброса при постоянных метеорологических условиях приведен выше на рис. 6.9.

**При непрерывном выбросе произвольной длительности** атмосферные движения воздушных масс и погодные условия отличается сильная нестационарность метеорологических процессов, причем направление ветра в этом случае характеризуется розой ветров за рассматриваемый отрезок времени. В этом случае осредненное значение концентрации в воздухе от выброса из точечного или объемного источника рекомендуется определять как результат суперпозиции полей концентраций, рассчитанных по формулам для кратковременного выброса при  $m$  характерных градациях величины скорости ветра для  $n$  румбов розы ветров и соответствующей вероятности  $l$  категорий устойчивости погодных условий. Тогда осредненное значение концентрации или объемной активности радионуклидов в точке с координатами  $(x, y, z)$  рассчитывается по формуле (9.5), где функция рассеивания  $G_\Sigma$  в соответствии с вышесказанным определяется соотношением

$$G_\Sigma(x, y, z) = \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^{16} \sum_{l=1}^7 G_T(x, y, z) P_m P_n P_l, \quad (9.13)$$

где  $G_T(x, y, z)$  – функция рассеивания, рассчитываемая по формуле (9.8) для каждого ветра  $m$ -ой величины,  $n$ -го направления при  $l$ -ой категории устойчивости;  $P_m$  и  $P_n$  – повторяемости  $m$ -ой величины и  $n$ -го направления скорости ветра в %;  $P_l$  – вероятность  $l$ -ой категории устойчивости атмосферы в % за рассматриваемый отрезок времени. Значения вероятностей  $P_m$ ,  $P_n$  и  $P_l$  задаются в виде табл. 6.6–6.8, составленных на основе анализа стандартных измерений на метеостанциях или прогнозируемых метеоусловий.

Пример расчета поля осредненных приземных концентраций по формуле (9.5) от непрерывного высотного источника продолжительной длительности при переменных метеорологических условиях приведен на рис. 6.10 и рис. 6.11.



При мгновенном или аварийном выбросе  $Q$  грамм вещества или  $Q$  Бк активности поле концентрации примеси в облаке определяется выражением (9.6), а функция рассеивания в соответствии с (3.89) рассчитывается по формуле

$$G_t = \frac{\exp \left[ -\frac{(x - Wt)^2}{2\Sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\Sigma_y^2} \right]}{8\pi\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z \left[ 1 + \exp \left( -2\frac{H^2}{S^2} \right) \right]} \times \quad (9.14)$$

$$\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - H + w_g t)^2}{2\Sigma_z^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + H - w_g t)^2}{2\Sigma_z^2} \right] \right\},$$

где соответствующие дисперсии при мгновенном выбросе определяются соотношениями

$$\Sigma_i^2 = S^2 + 0.02(1 + 0.03k_\Phi)HWt + \sigma_{\theta i}^2(Wt)^2, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9.15)$$

Здесь  $S = R_0/2$ ;  $R_0$  - радиус облака в начальный момент времени ( $t = 0$ );  $H$  - высота центра облака;  $W$  - скорость ветра на высоте  $H$ ;  $t$  - время после выброса;  $w_g$  - скорость гравитационного осаждения примеси;  $\sigma_{\theta i}$  - угловые дисперсии направления ветра ( $i = \overline{1,3}$ ), которые в первом приближении могут быть приняты такими же, как и для непрерывных источников.

Необходимые для практических расчетов значения  $H$  и  $R_0$  для мгновенного источника можно определить по эмпирическим формулам, приведенным в работе [73]. Если  $N$  - мощность ядерного взрыва в тоннах тротилового эквивалента, то, после стабилизации, для слабо устойчивых и нейтральных условий атмосферы высота центра облака  $H$ , а также вертикальный и горизонтальный диаметры облака  $D_v$  и  $D_r$  могут быть определены по формулам

$$H = 1400N^{0.22} - 52, \quad R_0 = (D_v + D_r)/4,$$

$$D_v = 1430N^{0.246}, \quad D_r = 1600N^{0.117},$$

которые справедливы для  $N = 10 \div 10^5$ . Хотя эти формулы получены на основе статистического анализа наблюдений за ядерными наземными и приземными взрывами, они могут быть использованы в первом приближении для задания начальных параметров мгновенного источника и при аварийных ситуациях на промышленных предприятиях, атомных электростанциях и т. д.

При аварийном выбросе большой практический интерес представляет уровень загрязнения воздуха и почвы в следе от образовавшегося облака. Уровень объемной активности  $A_v$  в воздухе на высоте

$z$  в момент времени  $t$  определяется выражением (9.6):

$$A_v = Q \exp [-(\lambda + \Lambda)t] G_t(x, y, z, t), \quad (9.16)$$

Интенсивность загрязнения поверхности земли  $\dot{A}_s$  вследствие гравитационного осаждения примеси и вымывания ее осадками согласно [70] определяется по формуле

$$\dot{A}_s = Q \exp [-(\lambda + \Lambda)T] (v_{ef} G_t + \Lambda G_t^z),$$

где  $v_{ef}$  – скорость выпадения, равная отношению интенсивности загрязнения почвы,  $\text{г}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$  к концентрации примеси у поверхности земли,  $\text{г}/\text{м}^3$ ;  $G_t^z$  – интеграл от функции рассеивания

$$G_t^z = \int_0^z G_t(x, y, z) dz.$$

Следовательно, плотность загрязнения почвы  $A_s$  к моменту времени  $T$  определяется следующим временным интегралом

$$A_s = \int_0^T \dot{A}_s(x, y, t) dt. \quad (9.17)$$

Если радионуклиды долгоживущие и осадки отсутствуют, то

$$A_s = Q v_{ef} \int_0^T G_t(x, y, 0, t) dt. \quad (9.18)$$

На удалении от места выброса, большем, чем зона максимума приземной концентрации, величину  $\dot{A}_s$  можно также рассчитывать по формуле

$$\dot{A}_s = Q \exp [-(\lambda + \Lambda)t] G_t(v_{ef} + \Lambda H_z^{\max}),$$

где  $H_z^{\max}$  – максимальное значение высоты слоя перемешивания, определяемое по формуле

$$H_z^{\max} = \max \left\{ \int_0^{\infty} A_v(z) dz / A_v(0) \right\} \approx 1.25 \sigma_z^{\max}.$$

Здесь  $\sigma_z^{\max}$  – предельное значение дисперсии примеси, которое для различных категорий устойчивости атмосферы определяется по табл. 5.9.

Поэтому в рассматриваемом случае плотность загрязнения почвы в следе от облака к моменту времени  $T$  равна

$$A_s = Q \exp[-(\lambda + \Lambda)T](v_{ef} + \Lambda H_z^{\max}) \int_0^T G_t(x, y, t) dt.$$

Пример расчета уровня концентраций в облаке по формуле (9.16) при аварийном выбросе в различные моменты времени в плоскости  $xy$  при  $z = H$  с использованием системы MapInfo приведен в виде изоплет на рис. 9.1. Расчеты выполнены при следующих начальных данных:

- регион выброса – Чернобыльская АЭС;
- количество выброшенной радиоактивности  $Q = 4000$  Ки;
- радиус облака в начальный момент  $R_0(0) = 25$  м;
- высота центра облака над землей  $H = 100$  м;
- скорость ветра  $W = 4$  м/с;
- радионуклид долгоживущий  $T_{1/2} = 28.5$  лет;
- рассматриваемые моменты времени  $T = 1$  с, 4 мин, 8 мин, 16 мин, 30 мин, 60 мин;
- осадки отсутствуют,  $\Lambda = 0$ .

Из рисунка видна динамика геометрических размеров облака в зависимости от времени после выброса. Расчетное поле концентраций в плоскости  $xy$  представлено в виде изолиний, имеющих форму окружностей. Цифры на изолиниях показывают уровень объемной активности в воздухе, в частности, надписи 6, 8, 10, 12 означают, что  $A_v = 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}$  Ки/м<sup>3</sup> соответственно.

Пример расчета плотности загрязнения почвы по формуле (9.18) в регионе Чернобыльской АЭС для мгновенного выброса при ветре одного направления с использованием системы MapInfo представлен на рис. 9.2. Направление ветра выбрано юго-юго-восточным, т.е. в сторону расположения города Киева, которое в рассматриваемой ситуации является наиболее неблагоприятным с точки зрения радиационного облучения. Результаты модельного расчета для указанных выше начальных данных представлены в виде изолиний (Ки/км<sup>2</sup>) на электронной географической карте по истечении пяти часов после аварии.



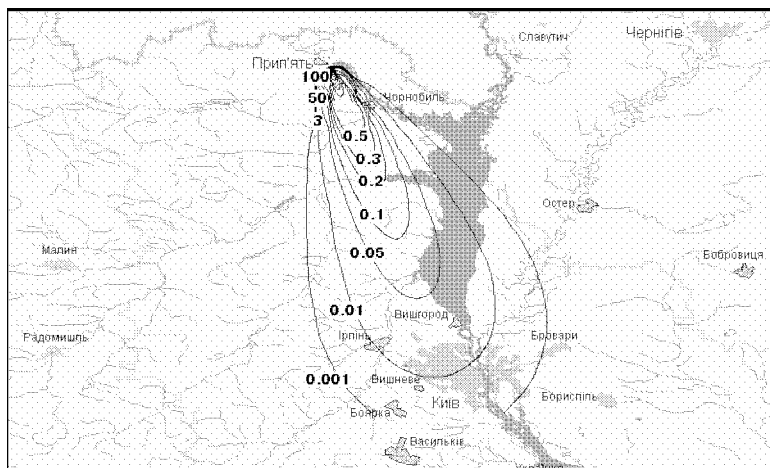


Рис. 9.2. Пример представления с помощью геоинформационной системы MapInfo расчета плотности загрязнения почвы ( $K_i/\text{км}^2$ ) в виде изолиний в следе от облака через 5 часов после выброса

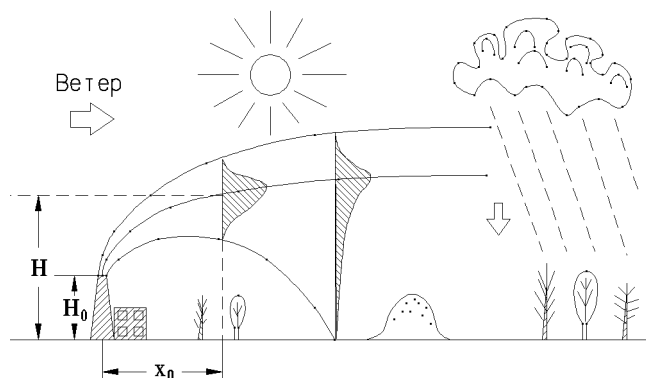


Рис. 9.3. Принципиальная схема рассеивания выбросов в атмосфере с учетом орографической неоднородности и осадков

центрации  $C_{\text{max}}$  умножается на безразмерный коэффициент  $\eta$ . Значение этого коэффициента устанавливается на основе анализа картографического материала, характеризующего рельеф местности [109].

Если в регионе источника выбросов можно выделить отдельные изолированные препятствия, вытянутые в одном направлении (гряды, гребень, ложбину, уступ), то поправочный коэффициент  $\eta$  определя-

ется по формуле

$$\eta = 1 + \varphi_1(\eta_m - 1),$$

где  $\eta_m$  находится по соответствующей таблице в зависимости от форм рельефа [109]. Это, конечно, простейший способ учета влияния рельефа местности. Авторы других предложений по учету влияния сложной поверхности на формирование поля концентраций обычно связывают свои поправки с коррекцией дисперсий рассеивания примеси  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  и с коррекцией определения эффективной высоты источника выбросов  $H$  или расчетной скорости ветра  $W$ . Наиболее обоснованным способом учета влияния сложной орOGRAPHии представляется коррекция дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  для условий ровной поверхности, так как они интегрально учитывают шероховатость и рельеф поверхности, эффекты аэродинамических теней за крупными сооружениями или холмами и т.д. Кроме того, почти во всех методах расчета атмосферной диффузии фактически после определения классов устойчивости атмосферы необходимо найти дисперсии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , чтобы использовать их значения в расчетах функций рассеивания  $G_T(x, y, z)$ , и, следовательно, самой концентрации.

В случае ровной поверхности в рамках гауссовых моделей существует несколько способов оценки дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , которые обсуждались выше. Хотя теоретически они связаны с коэффициентами турбулентной диффузии  $k_y$  и  $k_z$  согласно теории Тейлора соотношениями  $\sigma_{y,z}^2 = 2k_{y,z}t$ , однако определяются они в конечном итоге эмпирически путем сопоставления результатов измерений объемной концентрации (активности) примеси в воздухе с результатами расчетов по гауссовой модели при какой-либо системе классификации погодных условий. При этом, строго говоря, для различных климатических поясов и условий выбросов получаются разные результаты. Универсальности достичь пока не удается. В этой области в различных международных и национальных информационных банках происходит накопление данных. В последнее время в практических расчетах для условий ровной местности чаще всего используются следующие степенные формулы, рекомендованные в материалах МАГАТЭ [145, 156]:

$$\sigma_y = a_y x^{b_y}, \quad \sigma_z = a_z x^{b_z}, \quad (9.19)$$

где  $a_y, a_z, b_y, b_z$  – эмпирические коэффициенты.

В случае сложной орOGRAPHии на основе трассерных экспериментов над местностью с шероховатой поверхностью получены аналогичные эмпирические формулы зависимости дисперсий от расстояния с подбором соответствующих параметров в виде

$$\sigma_y = p_y x^{q_y}, \quad \sigma_z = p_z x^{q_z}, \quad (9.20)$$

Табл. 9.2. Определение  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  при различных классах устойчивости для расстояний до 10 км при высотах выброса 50 и 100 м [231]

Высота выброса	Класс устойчивости	$p_y$	$q_y$	$p_z$	$q_z$
50	A	0.87	0.81	0.22	0.97
50	B	0.87	0.81	0.22	0.97
50	C	0.72	0.78	0.21	0.94
50	D	0.62	0.77	0.20	0.94
50	E	1.69	0.62	0.16	0.81
50	F	5.38	0.58	0.40	0.62
100	A	0.23	1.00	0.10	1.16
100	B	0.23	0.97	0.16	1.02
100	C	0.22	0.94	0.25	0.89
100	D	0.22	0.91	0.40	0.76
100	E	1.69	0.62	1.16	0.81
100	F	5.38	0.58	0.40	0.62

Табл. 9.3. Параметры  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  для городских застроек [203]

$\sigma_{\theta_y}$	$Ri_B$	Класс устойчивости	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
$> 24^\circ$	$< -0.01$	Сильно неустойчивый	1.46	0.71	0.01	1.54
$18^\circ - 22^\circ$	$< -0.01$	Неустойчивый	1.52	0.69	0.04	1.17
$15^\circ - 20^\circ$	$-0.01$	Нейтральный	1.36	0.67	0.09	0.95
$8^\circ - 13^\circ$	$> 0.1$	Устойчивый	0.79	0.70	0.40	0.67

где величины  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  для различных классов устойчивости при двух высотах источника (50 м и 100 м), рекомендованные в работе [231], приведены в табл. 9.2.

В случае местности, покрытой городскими застройками, Мак Илрой на основе своих исследований [203] для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  предложил следующие аналогичные соотношения:

$$\sigma_y = a_1 x^{b_1}, \quad \sigma_z = a_2 x^{b_2}, \quad (9.21)$$

где величины  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  в зависимости от устойчивости атмосферы приведены в табл. 9.3. Там же приведены и две другие характеристики рассеивания: угловые горизонтальные флуктуации направле-

ния ветра  $\sigma_{\theta y}$  (в градусах) и интегральное число Ричардсона  $Ri_B$ . Примеры таких исследований по определению  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  в других условиях можно найти в работах [178] и [161]. В принципе эти результаты для оценки дисперсий в условиях сложной поверхности могут быть использованы и в рамках струйно-диффузионной модели с помощью соотношений (9.9) путем соответствующей коррекции стандартных дисперсий  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ , входящих в полные дисперсии  $\Sigma_y$  и  $\Sigma_z$ .

В случае, когда поверхность покрыта одиночными неровностями в виде холма с высотой, сопоставимой или превышающей высоту источника выбросов, возможен следующий подход. Предлагается ввести в рассмотрение переменную  $h(x, y)$ , которая описывает неровности подстилающей поверхности. Для аналитического задания рельефа местности  $h(x, y)$  используется приближенный подход. В трехмерном случае для моделирования одиночного холма может служить половинка эллипсоида с полуосями  $a, b, c$ . Тогда соответствующая функция  $h(x, y)$  может быть представлена в виде

$$h(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{(x - x_1)^2}{a^2} - \frac{(y - y_1)^2}{b^2}} \quad (9.22)$$

при  $\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} \leq 1$

и  $h(x, y) = 0$  при других  $x, y$ . Здесь  $x_1, y_1$  – координаты центра эллипсоида. Естественно, что в расчетной области может оказаться много холмов с различными параметрами. В общем случае функция  $h(x, y)$  может быть получена с помощью компьютерного сканирования соответствующей топографической карты. Чтобы оценить влияние рельефа местности на поле приземных концентраций в рамках струйно-диффузионной модели, в рассматриваемом случае следует положить в расчетной формуле (9.8)  $z = h(x, y)$ . То есть функция рассеивания при таком подходе определится выражением

$$G_T(x, y, h) = \frac{0.1 \tilde{C}_{m0}(u, Ri_0) [1 + \exp(-2H^2/\sigma_0)]^{-1}}{\pi \Sigma_y(l) \Sigma_z(l) W} \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{y^2}{2 \Sigma_y^2(l)} \right] \left\{ \exp \left[ -\frac{\left( h(x, y) - H + \frac{w_g}{W}(x - x_0) \right)^2}{2 \Sigma_z^2(l)} \right] + \right. \quad (9.23)$$

$$\left. + \exp \left[ -\frac{\left( h(x, y) + H - \frac{w_g}{W}(x - x_0) \right)^2}{2 \Sigma_z^2(l)} \right] \right\}.$$



Для дальнейшего учета влияния неровностей рельефа местности при вычислении поля приземных концентраций от выбросов из высотных источников в рамках струйно-диффузионной модели рассмотрим еще два характерных случая. В первом случае на поверхности земли имеются лишь одиночные неровности в виде холма или какого-либо сооружения с высотой  $h$ , сопоставимой или превышающей высоту источника выбросов  $H_0$ . Во втором случае поверхность земли покрыта лесным массивом или городскими застройками. Для первого случая рассмотрим два подхода. Первый из них связан с учетом влияния высоких холмов или сооружений на процесс рассеяния примеси посредством введения поправок в дисперсии, а второй – с коррекцией расчетной скорости ветра.

Рассмотрим подробнее первый случай. Наблюдения показывают, что в прикладных расчетах влиянием сооружений или зданий высотой  $h$  на осредненное поле приземных концентраций примеси можно пренебречь, если выполняется условие  $H_0 > 2h$ . В противном случае учет геометрических размеров зданий или неровностей существенен, и в одном из вариантов он может быть проведен путем коррекции значений дисперсий с помощью следующих соотношений:

$$\bar{\Sigma}_y = a_1 \Sigma_y + b_1, \quad \bar{\Sigma}_z = c_1 \Sigma_y + d_1, \quad (9.24)$$

где  $\Sigma_y$  и  $\Sigma_z$  – дисперсии для условий ровной поверхности;  $a_1, b_1, c_1, d_1$  – константы, учитывающие влияние рельефа местности, которые могут быть определены, например, на основе решения мультирегрессионного уравнения по результатам натуральных или лабораторных исследований [207].

В простейшем случае влияние рельефа можно приближенно учесть по формулам

$$\bar{\Sigma}_y^2 = \Sigma_y^2 + hl/\pi, \quad \bar{\Sigma}_z^2 = \Sigma_z^2 + hl/\pi, \quad (9.25)$$

если ширина сооружений  $l \leq h$ , и

$$\bar{\Sigma}_y^2 = \Sigma_y^2 + h^2/\pi, \quad \bar{\Sigma}_z^2 = \Sigma_z^2 + h^2/\pi, \quad (9.26)$$

если  $l > h$ . Здесь  $l$  – ширина (длина) сооружения.

Другой способ учета влияния рельефа местности в случае одиночных неровностей типа холма связан с использованием метода потенциальных течений.

### 9.3. Применение метода потенциальных течений

Попытки использовать потенциальное течение для решения задач атмосферной диффузии в условиях неровной местности предпринимались рядом авторов [14, 15, 207]. Основная идея этого подхода

состоит в том, что течение воздуха в условиях неровной местности считается потенциальным, и тогда нулевая линия тока может быть отождествлена с линией криволинейной поверхности земли. Если в двумерном уравнении диффузии осуществить переход от переменных  $x$  и  $z$  к переменным  $\xi = x$  и  $\eta = \psi$  (где  $\psi$  обозначает функцию тока исследуемого течения), то уравнение турбулентной диффузии и краевые условия формально будут такими же, как и в задаче атмосферной диффузии в прямоугольной декартовой системе координат для условий ровной местности. Это обстоятельство позволяет адаптировать известные модели атмосферной диффузии для случая ровной поверхности к случаю учета сложной орографии.

Рассмотрим для простоты сначала двумерный потенциальный поток. Напомним, что в случае сложной орографии вертикальной составляющей скорости ветрового потока пренебрегать уже нельзя, как в случае ровной подстилающей поверхности. В этом случае горизонтальная  $u$  и вертикальная  $w$  компоненты скорости, как известно, удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (9.27)$$

которое позволяет ввести в рассмотрение потенциал скорости  $\varphi$  и функцию тока  $\psi$ , связанные с  $u$  и  $w$  соотношениями

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9.28)$$

Полагая, что распределение концентрации по оси  $y$  имеет гауссовский вид, для концентрации можно записать

$$C(x, y, z) = \tilde{C}(x, z) \exp -\frac{y^2}{2\sigma_y^2},$$

где  $\tilde{C}(x, z)$  в случае консервативной примеси без учета осадков с постоянным коэффициентом диффузии  $k_z$  удовлетворяет уравнению

$$u \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + w \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} = k_z \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial z^2}. \quad (9.29)$$

Напомним, что здесь продольной диффузией в направлении  $x$  пренебрегаем по сравнению с конвективным переносом в этом же направлении.

Используя результаты в области гидромеханики, перейдем от независимых переменных  $x$ ,  $z$  и их функций  $u$ ,  $w$  к новым независимым переменным  $\xi$ ,  $\eta$ . При этом будем считать, что функция

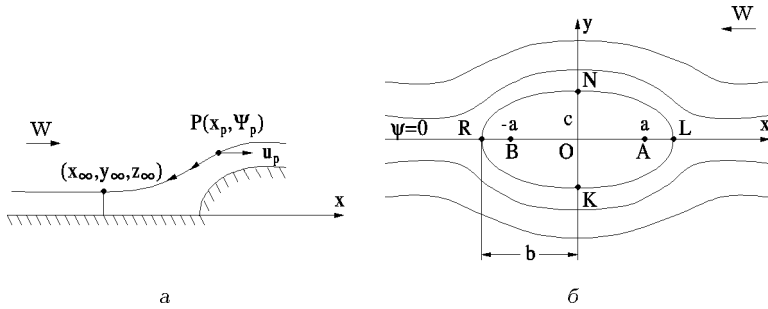


Рис. 9.4. Схема обтекания одиночного холма потенциальным потоком

тока известна как функция координат  $x, z$  из решения вспомогательной гидродинамической задачи. Итак, введем замену переменных  $(x, z) \rightarrow (\xi, \eta)$ . Тогда, очевидно, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} - w \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} = u \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (9.30)$$

Используя эти соотношения, уравнение диффузии (9.29) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} = k_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \eta} \right). \quad (9.31)$$

В этом уравнении концентрация  $\tilde{C}$  и продольная компонента скорости  $u$  представляют собой функции координаты  $\xi$  и функции тока  $\psi = \eta$ . Последняя, в силу ее определения, задана с точностью до произвольной постоянной, поэтому удобно выбрать ее так, чтобы на поверхности земли было  $\psi = 0$ . Тогда граничными условиями для уравнения (9.31) будут

$$\begin{aligned} \tilde{C} &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow \infty), \\ k_z \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad (\text{на поверхности}). \end{aligned} \quad (9.32)$$

В качестве начального условия зададим распределение концентрации  $\tilde{C} = f(x, \psi)$  в точке  $P$  (рис. 9.4, а). Уравнение диффузии в виде (9.31) представляет собой уравнение типа теплопроводности. В случае, когда продольная составляющая скорости постоянна  $u =$

$= W = \text{const}$ , уравнение (9.31) значительно упрощается:

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} = k_z W \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \eta^2} \quad \text{или} \quad W \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = k_z \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \left(\frac{\psi}{W}\right)^2} \quad (9.33)$$

и имеет следующее аналитическое решение для источника, расположенного в точке  $P(x_s, \psi_s)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x, \psi) = & \frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi k_z(x-x_s)W}} \times \\ & \times \left\{ \exp\left(-\frac{(\psi-\psi_s)^2}{4k_z(x-x_s)W}\right) + \exp\left(-\frac{(\psi+\psi_s)^2}{4k_z(x-x_s)W}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Таким образом, в случае неоднородного рельефа местности решение уравнения диффузии в координатах  $x, \psi$  формально эквивалентно гауссовской формуле. Используя аналогию (9.34) с прежними формулами для концентраций вида (6.37), можно записать приближенное выражение для поля концентрации в трехмерном случае при наличии орографической неоднородности:

$$\begin{aligned} C(x, \psi_y, \psi_z) = & \frac{M}{4\pi(x-x_s)\sqrt{k_y k_z}} \exp\left(-\frac{(\psi_y - \psi_{ys})^2}{4k_y(x-x_s)W}\right) \times \\ & \times \left\{ \exp\left(-\frac{(\psi_z - \psi_{zs})^2}{4k_z(x-x_s)W}\right) + \exp\left(-\frac{(\psi_z + \psi_{zs})^2}{4k_z(x-x_s)W}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (9.35)$$

где  $\psi_{ys}$  и  $\psi_{zs}$  проходят через точку  $(x_p, y_p, z_p)$  и определяются как значение скорости невозмущенного потока  $W$ , умноженное на координаты  $y_\infty$  и  $z_\infty$  соответствующей линии вверх по потоку, когда она начинает отклоняться от невозмущенного положения (рис. 9.4, а). Выражение (9.35) содержит коэффициенты диффузии, но в расчетах концентрации удобнее использовать дисперсии рассеяния факела  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . Для перехода от коэффициентов диффузии к дисперсиям можно воспользоваться известным соотношением из теории диффузии Тейлора в виде

$$\sigma_y^2 = 2k_y(x-x_s)/W, \quad \sigma_z^2 = 2k_z(x-x_s)/W. \quad (9.36)$$

Заменив эти дисперсии  $\sigma_i$  на обобщенные дисперсии струйно-диффузионной модели  $\Sigma_i$  и подставив их значения вместо коэффициентов диффузии в выражение (9.35), получаем следующую формулу для

трехмерного поля концентрации в случае сложной орографии:

$$C(x, \psi_y, \psi_z) = \frac{M}{2\pi W \Sigma_y \Sigma_z} \exp\left(-\frac{(\psi_y - \psi_{ys})^2}{2\Sigma_y^2 W^2}\right) \times \left\{ \exp\left(-\frac{(\psi_z - \psi_{zs})^2}{2\Sigma_z^2 W^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\psi_z + \psi_{zs})^2}{2\Sigma_z^2 W^2}\right) \right\}. \quad (9.37)$$

Для расчета поля концентраций по формуле (9.37) необходимо дополнительно знать связь значений  $\psi_y, \psi_z$  с координатами  $x, y, z$  для рассматриваемой орографии. В качестве примера, поясняющего ситуацию, рассмотрим случай единичного холма, форма которого в двумерном случае приближенно моделируется верхней половинкой эллипса (рис. 9.4, б). Тогда для определения функции тока  $\psi$  можно пользоваться известными в гидродинамике приемами.

Пусть имеется источник мощности  $m$  в точке  $A(a, 0)$ , сток мощности  $m$  в точке  $B(-a, 0)$  и равномерный поток скорости  $W$ , параллельный действительной оси  $x$ . Интересен случай, когда поток направлен от источника к стоку, т.е. в направлении отрицательных значений  $x$ . Тогда для комплексного потенциала  $\Omega$  имеем [100]:

$$\Omega = Wz - m \ln(z - a) + m \ln(z + a). \quad (9.38)$$

Критические точки находятся из уравнения  $\partial\Omega/\partial z = 0$ :

$$W - \frac{m}{z - a} + \frac{m}{z + a} = 0,$$

и, следовательно, определяются формулой

$$z = \pm \sqrt{a^2 + \frac{2am}{W}}.$$

Пусть  $2am/W = b^2 - a^2$ , тогда  $z = \pm b$ , и критическими точками будут точки  $L$  и  $R$ , где  $OL = OR = b$ . Из выражения (9.38) видно, что функция тока имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = \text{Im}\Omega &= Wy - m \arctg \frac{y}{x - a} + m \arctg \frac{y}{x + a} = \\ &= Wy - m \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Функция тока  $\psi = 0$  содержит действительную ось  $y = 0$ . Следовательно, разветвляющаяся линия тока имеет вид

$$\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = \text{tg} \frac{Wy}{m}.$$

После преобразования получаем

$$x^2 + y^2 - a^2 = 2ay \operatorname{ctg} \frac{Wy}{m} = 2ay \operatorname{ctg} \frac{2ay}{b^2 - a^2}. \quad (9.40)$$

Это уравнение представляет симметричную относительно обеих осей кривую в виде замкнутого овала (рис. 9.4, б). Пусть  $ON = c$ , тогда  $y = c$  при  $x = 0$  и поэтому

$$c^2 - a^2 = 2ac \operatorname{ctg} \frac{2ac}{b^2 - a^2}.$$

Величину  $c$  можно найти графически. Если эту кривую взять в качестве фиксированной границы, то получим обтекание цилиндра, поперечное сечение которого соответствует упомянутой кривой. Когда  $a$  мало, то приближенно

$$\operatorname{ctg} \frac{2ac}{b^2 - a^2} = \frac{b^2 - a^2}{2ac},$$

следовательно,  $c^2 = b^2$ , овал становится окружностью, и для функции тока имеем

$$\psi = Wy + \frac{b^2 Wy}{x^2 + y^2}. \quad (9.41)$$

В более сложном случае построение функции тока можно провести на основе численного решения автономной гидродинамической задачи.

Таким образом, соотношение (9.39) можно рассматривать как функцию тока для потока в окрестности некоторого препятствия, форма которого определена параметрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . В то же время любую линию тока  $\psi = \operatorname{const}$  можно рассматривать как твердую стенку, тогда получим моделирование потока ветра над холмом заданной формы. Зная выражения для  $\psi$  как функции координат  $x$ ,  $y$ , по формулам (9.28) легко определить составляющие скорости  $u$  и  $w$  через скорость набегающего ветрового потока  $W$ , а по формуле (9.34) рассчитать поле концентраций.

Большой практический интерес, конечно, представляет случай пространственной конфигурации холма. Эта задача, безусловно, более сложная. В первом приближении в этом случае можно воспользоваться следующим приемом [185]. Если обозначить составляющие скорости около твердого трехмерного тела в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  через  $u_i$ , то их значения можно вычислить через скорость набегающего потока  $W_\infty$  по формуле

$$u_i(x, y, z, t) = M_{ij}(x, y) W_{\infty j}(z, t), \quad (9.42)$$

где  $M_{ij}(x, y)$  – известная матрица.

Предполагая, что  $x, y$  нормированы на радиус цилиндра  $a$  (высоту холма), в области до точки отрыва матрица  $M_{ij}$  приближенно имеет вид [185]:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\ -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & 1 + \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.43)$$

Следовательно, скорость, нормальная к линии тока, будет

$$\tilde{v} = (u_2 - mu_1)(1 + m^2)^{1/2}, \quad (9.44)$$

где  $m = -2xy/[(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2]$ .

Из выражений (9.42) и (9.43) следует, что

$$M_{2j} - mM_{1j} = 0.$$

Поэтому

$$\tilde{v}(x, y, z, t) = W_{\infty 2}(t)F(x, y), \quad (9.45)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (M_{22} - mM_{21})/(1 + m^2)^{1/2} = \\ &= \left[ 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2mxy}{(x^2 + y^2)^2} \right] / (1 + m^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $x$ -компонента  $W_{\infty 1}$  не вносит вклад в  $\tilde{v}$ . Если источник расположен в точке  $(x_p, y_p)$  и лежит на линии тока  $\psi = \psi_p$ , где

$$\psi_p = y_p [1 - (1/(x_p^2 + y_p^2))], \quad (9.46)$$

то любая  $x$  или  $y$ -координата линии тока может быть определена из уравнения

$$\psi = y[1 - (1/(x^2 + y^2))]. \quad (9.47)$$

Таким образом, поле концентраций в условиях холмистой подстилающей поверхности, в принципе, также может быть вычислено с использованием метода потенциальных течений по приведенным аналитическим формулам типа Гаусса, однако для этого необходимо знать значение функций тока в каждой узловой точке расчетной области, что представляет собой фактически дополнительную самостоятельную довольно сложную задачу. Поэтому такой анализ целесообразен лишь в специальных случаях.

#### 9.4. Учет трансформации профиля скорости ветрового потока

Рассмотрим другой практически интересный случай учета сложной орографии, когда поверхность покрыта лесным массивом или городскими застройками. Поскольку скорость ветра является одним из основных параметров, определяющих характер переноса и рассеяния газоаэрозольных выбросов в атмосфере, то остановимся подробнее на этом вопросе.

В полуэмпирических формулах типа Гаусса и струйно-диффузионной модели предполагается, что расчетная скорость ветра  $W$  должна быть взята на высоте диффузионного источника  $H$ . Поскольку на обычных метеостанциях сети наблюдений скорость ветра измеряется лишь на одном уровне у поверхности земли – на высоте флюгера (10 м), то необходимо экстраполировать результаты этих измерений вплоть до высоты  $H$ . С этой целью за расчетную скорость ветра  $W$  следует принимать скорость ветра 10-минутного осреднения на высоте флюгера над поверхностью земли, умноженную на некоторую поправочную функцию  $f(z)$ , зависящую от вертикальной координаты  $z$ , т. е.

$$W(z) = W_{\Phi}(10)f(z).$$

Рассмотрим вариант определения функции  $f(z)$  для случая, когда поверхность земли покрыта растительностью, лесом или городскими застройками. В этом случае неровная поверхность оказывает аэродинамическое сопротивление ветровому потоку и в значительной мере трансформирует его структуру. В гидромеханике небольшие неровности на поверхности принято характеризовать параметром шероховатости  $z_0$ , который связан с высотой этой шероховатости. В случае ровной поверхности или поверхности с мелкой шероховатостью в ядре пограничного слоя обычно выполняется логарифмический закон вертикального распределения скорости:

$$u(z) = \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (9.48)$$

и для безразмерного профиля скорости имеет место соотношение [115]

$$\frac{\alpha z}{v_*} \frac{\partial u}{\partial z} = 1. \quad (9.49)$$

Если поверхность покрыта крупной шероховатостью типа лесного массива или городской застройки с характерным вертикальным размером  $h \gg z_0$ , то безразмерный профиль скорости уже не будет



равен единице, а будет некоторой функцией  $\phi$ , зависящей от соотношения  $h/z$ , т.е.

$$\frac{\alpha z}{v_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \phi \left( \frac{h}{z} \right), \quad (9.50)$$

где функция  $\phi$  удовлетворяет условию  $\phi(0) = 1$ .

Вследствие этого при малых  $h/z$  эту функцию можно представить в виде следующего ряда:

$$\phi \left( \frac{h}{z} \right) = \phi(0) + \phi'(0) \frac{h}{z} + \dots \quad (9.51)$$

Тогда, ограничиваясь первыми двумя членами, из выражения (9.51) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*}{\alpha} \frac{(1 + \phi'(0)h/z)}{z}. \quad (9.52)$$

Следуя [75, 115], определим величину  $\phi'(0)h$ , имеющую размерность длины, как толщину слоя вытеснения  $d$ . Тогда выражение (9.52) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*}{\alpha z} \left( 1 + \frac{d}{z} \right). \quad (9.53)$$

Приняв во внимание, что при малых  $\alpha$  имеет место приближенное соотношение

$$(1 + \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha},$$

перепишем (9.53) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*}{\alpha(z - d)}. \quad (9.54)$$

Проинтегрировав это выражение по  $z$  и используя условие равенства нулю средней скорости ветра на уровне  $z = d + z_0$ , найдем

$$u(z) = \frac{v_*}{\alpha} \ln \left( \frac{z - d}{z_0} \right), \quad z > d. \quad (9.55)$$

Таким образом, вертикальный профиль скорости в турбулентном ядре течения и в случае сложного рельефа местности в виде леса или городской застройки описывается также логарифмическим законом в области  $z > d$ , а  $z_0$  представляет собой параметр шероховатости. Следовательно, профиль скорости ветра в интересующем нас случае неровной поверхности характеризуется двумя параметрами: толщиной вытеснения  $d$  и параметром шероховатости  $z_0$ . Для сплошных

массивов леса или городских застроек в задаче атмосферной диффузии толщину  $d$  в первом приближении можно принять равной 0.8 средней высоты деревьев или застройки, т. е.  $d = 0.8h$ , а  $z_0 \approx 0.1h$ . Более подробную информацию об определении толщины вытеснения  $d$  для различных условий можно найти в [75]. Особо следует отметить их зависимость от формы шероховатости и плотности ее распределения по поверхности.

Строго говоря, логарифмический профиль (9.55) имеет место, когда атмосфера по температуре однородна и силами плавучести можно пренебречь. Если атмосфера стратифицирована, то, согласно [115], профиль скорости будет описываться выражением

$$u(z) = \frac{v_*}{\alpha} \left[ \ln \frac{(z-d)}{z_0} + \psi \left( \frac{z}{L} \right) \right], \quad (9.56)$$

где  $L$  – масштаб Монина–Обухова;  $\psi(z/L)$  – эмпирическая функция [115].

В случае устойчивой стратификации можно принять

$$\psi \left( \frac{z}{L} \right) = 4.7 \frac{z}{L},$$

в случае неустойчивой стратификации –

$$\psi \left( \frac{z}{L} \right) = \ln \left[ \frac{1+\chi^2}{2} \left( \frac{1+\chi}{2} \right)^2 \right] - 2 \operatorname{arctg} \chi + \frac{\pi}{2}, \quad (9.57)$$

где  $\chi = (1 - 15z/L)^{1/4}$ .

Входящая в формулу (9.56) динамическая скорость  $v_*$  зависит от скорости ветра и шероховатости подстилающей поверхности. Учитывая выражение (9.56), расчетная скорость ветра в условиях стратификации определяется выражением

$$W(H) = \frac{v_*}{\alpha} \ln \left[ \frac{(H-d)}{z_0} + \psi \left( \frac{H}{L} \right) \right]. \quad (9.58)$$

Если использовать это значение скорости при расчете поля концентрации, то приближенно будет учтено влияние рельефа местности и стратификации атмосферы на формирование поля концентрации в пограничном слое атмосферы.

Несколько другой подход к определению расчетной скорости ветра для гауссовых моделей предложен Ирвином [188], который рекомендует определять профиль скорости ветра по формуле

$$W(z) = W_{\Phi}(10)(z/10)^p. \quad (9.59)$$

Им разработаны рекомендации по расчету показателя степени  $p$ , значение которого зависит от параметра шероховатости и атмосферных условий. С использованием известной классификации устойчивости Паскуилла – Гиффорда, эти значения показателя  $p$  приведены в табл. 6.10.

Для уровней выше 100 м скорость ветра принимается равной ее значению на высоте 100 м. Следовательно, для источника выбросов, имеющего высоту  $H$ , расчетная скорость ветра  $W$  определяется через скорость ветра на высоте флюгера  $W_{\Phi}$  по формуле

$$W(H) = W_{\Phi}(10)(H/10)^p. \quad (9.60)$$

Аналогичные формулы используются и другими авторами [91].

## 9.5. Выбросы из низких источников и учет влияния аэродинамических теней

Обычно промышленные источники загрязнения атмосферного воздуха подразделяют на низкие и высотные [133]. Классификация источников на низкие и высотные проводится обычно в зависимости от их геометрической высоты и от условий рассеивания примеси в ближней области за источником.

Основные исследования рассеивания вредных веществ в атмосферном воздухе связаны с изучением закономерностей распространения выбросов из высотных источников типа дымовых и вентиляционных труб. Главная цель исследований обычно состоит в определении уровня загрязнения воздуха в зоне влияния источника выбросов и оценке предельно допустимых выбросов или концентраций для различных загрязнителей и групп населения.

В случае выбросов из низких источников или отверстий в крыше сооружения и проемах боковых стенок здания требуется специальное рассмотрение, так как известные подходы по расчету рассеивания газоаerosольных выбросов от высотных источников здесь неприменимы. Наличие так называемой аэродинамической тени за низкими источниками выбросов приводит к необходимости учета влияния самого сооружения на распределение концентрации в воздухе и характер осаждения примеси вблизи самого объекта [37].

Наличие зданий вблизи источника выбросов приводит к возмущению поля скорости ветрового потока и образованию зон устойчивой циркуляции воздуха за такими препятствиями. Эта зона влияет на распределение выбрасываемой примеси в приземном слое атмосферы. В частности, примесь может попасть в зону аэродинамической тени источника, и, благодаря наличию там циркуляции, быстро

достигнет поверхности земли. То есть скорость выпадения частиц на землю в этой зоне будет не стоксова, а значительно больше. Особенностью движения воздуха в зоне аэродинамической тени является его сложный вихревой характер.

В общем случае источники считаются высокими, если выбрасываемая струя аэродинамически не взаимодействует с зоной смещения потока воздуха за зданием или сооружением, из которого происходит выброс. В противном случае примесь окажется вовлеченной в зону аэродинамической тени. Степень вовлечения выбрасываемой примеси в зону аэродинамической тени зависит от конструктивных особенностей здания, расположения и высоты трубы, направления скорости ветра и т. д. Приблизительно принимают источник высоким, если устье трубы расположено в два раза выше самого здания.

Источники считаются низкими, если выбрасываемая струя взаимодействует с зоной аэродинамической тени, образующейся за препятствием. Практически это происходит в случаях, когда устье трубы расположено ниже, чем двойная высота здания. В этом случае часть выброшенной примеси попадет в зону аэродинамической тени, а другая часть будет рассеиваться в дальнем следе за сооружением. Расчет для таких источников целесообразно проводить по комбинированной модели, согласно которой доля  $M(1 - k)$  от общего количества выбросов  $M$  рассчитывается по модели для распределенного источника, расположенного в следе за сооружением, а доля примеси, равная  $Mk$ , поступает в область аэродинамической тени. Выбросы из фонарей, расположенных на крыше зданий, из окон и других проемов в стенах сооружения, обычно полностью попадают в зону аэродинамических теней за препятствием.

Динамика примеси в зоне аэродинамической тени исключительно сложна и в случае необходимости ее учета должна рассматриваться особо. Наиболее простыми и практически интересными представляются два случая. Первый из них предполагает, что примесь не выносится за пределы аэродинамической тени, и концентрация в ней изменяется лишь за счет сухого осаждения, вымывания осадками и неконсервативности примеси. Во втором случае доля примеси  $k_1$  от доли  $k$  выносится за пределы зоны аэродинамической тени. Тогда область аэродинамической тени сама является объемным источником примеси.

Рассмотрим отдельно стоящее сооружение высотой  $H_0$ , длиной  $l$  и шириной  $B$  на ровной земной поверхности. При  $l \geq H_0$  под действием ветра возникает зона подпора I со следующими характерными размерами, приведенными на рис. 9.5. Здесь  $x_l$  – длина зоны подпора,  $x_h$  – высота зоны подпора. Согласно наблюдениям, в зависимости от

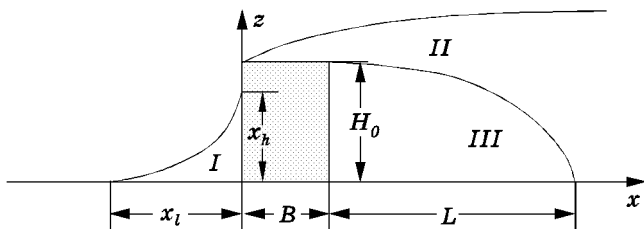


Рис. 9.5. Схема обтекания одиночного сооружения:

I - зона подпора, II - пограничный слой, III - зона аэродинамической тени

скорости ветра значение  $x_l$  близко к значению величины  $3H_0$ , а максимальное значение  $x_h$  достигает  $0.7H_0$ . В принципе в литературе имеются эмпирические формулы для расчета длины и высоты зоны подпора [116]. Протяженность зоны аэродинамической тени  $L$  в направлении ветра зависит от высоты сооружения  $H_0$  и оценивается как  $6H_0$  [25, 74]. Если длина здания  $l < 10H_0$ , то картина обтекания существенно трехмерна, и на размерах аэродинамической тени сказывается обтекание торцевых частей здания.

В первом приближении рассматриваемое сооружение схематично можно представить параллелепипедом со сторонами  $H_0$ ,  $l$  и  $B$ . С целью учета направления ветра иногда различают наветренную сторону I, пограничный слой над крышей II и зону аэродинамической тени III. Эти границы ветровых течений в такой схеме приближенно описываются формулами

$$h_I(x) = 0.7H_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{3H_0} \right)^2 \right] \quad \text{при} \quad 0 \geq x \geq -3H_0, \quad (9.61)$$

$$h_{II}(x) = H_0 + 0.15 \left( \frac{\nu}{W} \right)^{1/2} x^{6/7} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (9.62)$$

$$h_{III}(x) = H_0 \left[ 1 - \frac{x-B}{6H_0} \right]^3 \quad \text{при} \quad B < x < 6H_0 + B. \quad (9.63)$$

Для выполнения практических расчетов очень важно оценить долю примеси  $k$  от общей выносимой примеси, которая попадает в зону аэродинамической тени. В работе [133] предлагается следующий подход. Зависимость доли выброса  $k$ , вовлеченной в зону аэродинамической тени за зданием, определяется по графику, изображенному на рис. 9.6, в зависимости от безразмерной высоты  $\bar{h}$  [133].

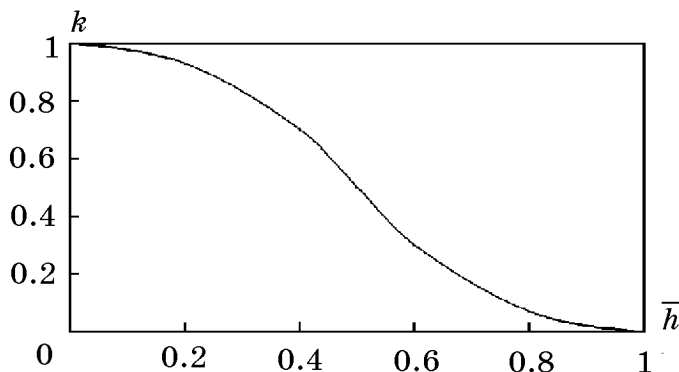


Рис. 9.6. Доля примеси  $k$ , попадающая в зону аэродинамической тени в зависимости от приведенной высоты  $\bar{h}$

При обычном расположении трубы над зданием  $\bar{h}$  рассчитывается по формуле

$$\bar{h} = \frac{h_g}{2h_b}, \quad (9.64)$$

где  $h_g$  – геометрическая высота источника выброса;  $h_b$  – высота здания. При наличии трубы высота источника выброса  $h_g$  совпадает с высотой трубы  $H_0$ .

В практических расчетах особый интерес представляет уровень загрязнения в области аэродинамической тени за сооружением, где по предположению окажется доля  $k$  от общего выброса примеси. Оценить концентрацию или объемную активность в зоне аэродинамической тени в первом приближении можно следующим простым способом. Область аэродинамической тени можно аппроксимировать четвертой частью объема эллипсоида с полуосями  $a = h_b$ ,  $b = l/2$ ,  $c = L$ . Тогда объем аэродинамической тени будет

$$V_{\text{АТ}} = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{2}{3}h_b l L.$$

Предполагая, что в зоне аэродинамической тени за счет вихревых движений происходит полное перемешивание, для средней объемной активности имеем

$$A_{\text{АТ}} = \frac{Mk}{V_{\text{АТ}}},$$

где  $Mk$  – количество активности, попадающее в область аэродинамической тени.

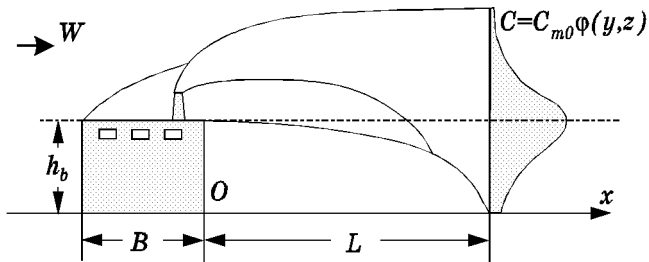


Рис. 9.7. Принципиальная схема распространения выброса из низкого источника

Теперь рассмотрим случай, когда в следе за сооружением имеется примесь вследствие ее попадания туда как из области аэродинамической тени, так и из низкорасположенной трубы или щелей самого здания, как, например, на объекте “Укрытие” Чернобыльской АЭС. Тогда в соответствии с изложенными физическими и модельными представлениями процесс распространения примеси от низкого источника за зоной аэродинамической тени в следе за сооружением будем схематизировать распределенным источником мощности  $M_2 = M(1 - k)$ . Предполагаем, что его центр находится в конце зоны аэродинамической тени на высоте  $H_0$ , т.е. имеет координаты  $(6H_0, 0, H_0)$ . При этом распределение примеси в сечении  $x_0 = L = 6H_0$  имеет колоколообразную форму, как показано на рис. 9.7. С удалением от центра в  $y$  и  $z$  направлениях распределение примеси будем считать гауссовым, а соответствующие дисперсии будут определяться через высоту и длину сооружения  $H_0$  и  $l$ .

Будем пока рассматривать установившийся процесс при ветре одного направления, совпадающего с осью  $x$ . В соответствии с вышеизложенным в области  $x > 6H_0 + B$ ,  $z > 0$ ,  $-\infty \leq y \leq \infty$  будет происходить процесс рассеивания примеси, который описывается известным уравнением турбулентной диффузии

$$W \frac{\partial C}{\partial x} + w_g \frac{\partial C}{\partial z} = k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - (\lambda + \Lambda) C \quad (9.65)$$

в полуограниченной области с заданным начальным распределением и соответствующими краевыми условиями, выражающими стремление концентрации к нулю на бесконечности и непроницаемость поверхности земли. Такое решение уже рассматривалось выше при обсуждении выбросов из вентиляционной трубы на диффузионном участке. Поэтому для случая низкого источника соответствующая

аналитическая формула для расчета концентрации активности у поверхности земли имеет вид

$$\begin{aligned}
 C_T(x, y, 0) &= \\
 &= \frac{M_2 \exp\left(-\frac{y^2}{2(S_y^2 + \sigma_y^2)} - \frac{(\lambda + \Lambda)(x - x_0)}{W}\right)}{\pi W (S_y^2 + \sigma_y^2)^{1/2} (S_z^2 + \sigma_z^2)^{1/2} [1 + \exp(-2H_0^2/S_z^2)]} \times \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{(H_0 - (w_g/W)(x - x_0))^2}{2(S_z^2 + \sigma_z^2)}\right), \quad (9.66)
 \end{aligned}$$

где  $M_2 = M(1 - k)$  – мощность выброса, не попавшая в зону аэродинамической тени; начальные дисперсии  $S_y = 0.125l$ ,  $S_z = 0.125H_0$ ;  $l$  и  $H_0$  – длина и высота сооружения;  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  – стандартные значения дисперсий примеси, которые в первом приближении можно принять такими же, как для высотных источников.

Коррекция концентрации вещества, выброшенного из низких труб или щелей в сооружении может быть также осуществлена следующим простым способом.

Согласно формулам (9.4) и (9.12) при  $\lambda = \Lambda = 0$  концентрация в плоскости  $y = 0$  на уровне земли ( $z = 0$ ) определяется выражением

$$\begin{aligned}
 C_T(x, 0, 0) &= \frac{0.2\tilde{C}_{m0}M_2[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W \Sigma_y \Sigma_z} \times \\
 &\quad \times \exp\left\{-\frac{\left[-H_0 + \frac{w_g}{W}(x - x_0)\right]^2}{2\Sigma_z^2}\right\}, \quad (9.67)
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{C}_{m0} = C_m/C_0$  – максимальное значение концентрации в сечении  $x = x_0$ , нормированное на начальную концентрацию выброса.

Для учета влияния аэродинамической тени полагают высоту  $H_0 = 0$  и вводят коррекцию на аэродинамическую тень в виде

$$C_T(x, 0, 0) = \frac{0.2\tilde{C}_{m0}M_2}{W(\pi\Sigma_y\Sigma_z + c_w A)} \exp\left\{-\frac{\left[\frac{w_g}{W}(x - x_0)\right]^2}{2\Sigma_z^2}\right\}, \quad (9.68)$$

где  $A$  – площадь сооружения, нормальная к направлению ветра;  $c_w$  – фактор формы строения, характеризующий вовлечение выброса в зону аэродинамической тени. Консервативная оценка его величины имеет порядок  $0.3 \div 0.5$ . Однако эта коррекция не может привести



к уменьшению концентрации более, чем на одну треть, т. е. всегда  $c_w A \leq 3\pi\Sigma_y\Sigma_z$ . Если примесь легкая, как в случае РБГ, то  $w_g = 0$  и формула (9.68) принимает совсем простой вид:

$$C_T(x, 0, 0) = \frac{0.2\tilde{C}_{m0}M_2}{W(\pi\Sigma_y\Sigma_z + c_w A)}. \quad (9.69)$$

Эта формула очень привлекательна своей простотой, но ее надежность требует экспериментальной проверки.

## Глава 10

# ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ДОЗ РАДИОАКТИВНОГО ОБЛУЧЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ОТ ГАЗОАЭРОЗОЛЬНЫХ ВЫБРОСОВ

Проблема радиационной безопасности населения и уровень радиоактивного загрязнения воздуха являются ключевыми при обосновании развития атомной энергетики. В этой проблеме основу составляет прогнозирование и расчет доз от выброса радиоактивных веществ в атмосферу предприятиями ядерного топливного цикла. Величина дозы определяет риск последствий от радиоактивного облучения. В литературе широко известна методика расчета доз, использующая метод так называемых дозовых коэффициентов [70]. Этот подход включает в себя учет всех основных путей воздействия радиации на человека: поле внешнего излучения от радиоактивного облака и почвы, загрязненной радиоактивными веществами, внутреннего облучения от вдыхания радиоактивного газа и аэрозолей, а также поступления радионуклидов в организм человека с продуктами питания вследствие их миграции по пищевым и биологическим цепочкам.

Учитывая, что основу расчета дозовых нагрузок с помощью метода дозовых коэффициентов составляет знание концентрации активности в воздухе и плотности загрязнения почвы, обоснованию расчета которых посвящены предыдущие главы, автор счел целесообразным включить в книгу главу, связанную с основными принципами расчета доз радиоактивного облучения населения. Содержание этой главы во многом базируется на материалах справочника Н. Г. Гусева и В. А. Беяева [70]. Эта глава позволяет продемонстрировать, не отсылая читателя к другим источникам, практическую значимость проблемы атмосферной диффузии радиоактивных выбросов в вопросах радиационной безопасности человека и окружающей среды.

### 10.1. Радиационные характеристики радионуклидов, содержащихся в выбросах действующих АЭС

Ядерные реакторы являются генератором огромного количества искусственных радионуклидов, основные из которых – продукты деления и актиноиды.

В табл. 1.3 приведены параметры АЭС, на основе которых авто-

Табл. 10.1. Удельная активность некоторых продуктов деления для реакторов ВВЭР-440, ВВЭР-1000, РБМК-1000, Бк/т U [130]

Ну-клид	$T_{1/2}$	Выдержка $t$			
		0	120 сут	1 год	3 года
(ВВЭР-440)					
$^{85}Kr$	10.74 г	$4.24 \cdot 10^{14}$	$4.15 \cdot 10^{14}$	$3.97 \cdot 10^{14}$	$3.49 \cdot 10^{14}$
$^{89}Sr$	50.5 сут	$2.82 \cdot 10^{16}$	$5.43 \cdot 10^{15}$	$1.88 \cdot 10^{14}$	$8.40 \cdot 10^9$
$^{90}Sr$	28.5 г	$2.58 \cdot 10^{15}$	$2.55 \cdot 10^{15}$	$2.52 \cdot 10^{15}$	$2.40 \cdot 10^{15}$
$^{134}Cs$	2.06 г	$1.91 \cdot 10^{15}$	$1.72 \cdot 10^{15}$	$1.36 \cdot 10^{15}$	$6.97 \cdot 10^{14}$
$^{137}Cs$	30.17 г	$3.44 \cdot 10^{15}$	$3.41 \cdot 10^{15}$	$3.36 \cdot 10^{15}$	$3.21 \cdot 10^{15}$
$^{131}I$	8.04 сут	$3.08 \cdot 10^{16}$	$1.03 \cdot 10^{12}$	$6.90 \cdot 10^2$	—
(ВВЭР-1000)					
$^{85}Kr$	10.74 г.	$5.78 \cdot 10^{14}$	$5.66 \cdot 10^{14}$	$5.42 \cdot 10^{14}$	$4.77 \cdot 10^{14}$
$^{89}Sr$	50.5 сут.	$4.04 \cdot 10^{16}$	$7.78 \cdot 10^{15}$	$2.70 \cdot 10^{14}$	$1.20 \cdot 10^{10}$
$^{90}Sr$	28.5 г.	$3.51 \cdot 10^{15}$	$3.48 \cdot 10^{15}$	$3.43 \cdot 10^{15}$	$3.26 \cdot 10^{15}$
$^{134}Cs$	2.06 г.	$2.60 \cdot 10^{15}$	$2.34 \cdot 10^{15}$	$1.85 \cdot 10^{15}$	$9.49 \cdot 10^{14}$
$^{137}Cs$	30.17 г.	$4.69 \cdot 10^{15}$	$4.65 \cdot 10^{15}$	$4.58 \cdot 10^{15}$	$4.38 \cdot 10^{15}$
$^{131}I$	8.04 сут	$4.49 \cdot 10^{16}$	$1.50 \cdot 10^{12}$	$1.01 \cdot 10^3$	—
(РБМК-1000)					
$^{85}Kr$	10.74 г.	$3.29 \cdot 10^{14}$	$3.19 \cdot 10^{14}$	$3.09 \cdot 10^{14}$	$2.71 \cdot 10^{14}$
$^{89}Sr$	50.5 сут.	$1.25 \cdot 10^{16}$	$6.85 \cdot 10^7$	$2.06 \cdot 10^7$	$1.79 \cdot 10^5$
$^{90}Sr$	28.5 г.	$2.00 \cdot 10^{15}$	$1.97 \cdot 10^{15}$	$1.95 \cdot 10^{15}$	$1.86 \cdot 10^{15}$
$^{134}Cs$	2.06 г.	$1.61 \cdot 10^{15}$	$1.45 \cdot 10^{15}$	$1.14 \cdot 10^{15}$	$5.88 \cdot 10^{14}$
$^{137}Cs$	30.17 г.	$2.89 \cdot 10^{15}$	$2.87 \cdot 10^{15}$	$2.83 \cdot 10^{15}$	$2.70 \cdot 10^{15}$
$^{131}I$	8.04 сут	$1.67 \cdot 10^{16}$	—	—	—

рами работы [130] рассчитаны радиационные характеристики продуктов деления и актиноидов. Краткие сведения по их удельной активности, заимствованные из справочника [70], даны в табл. 10.1.

Наиболее важную роль в формировании радиационной обстановки в районе размещения АЭС играют инертные радиоактивные газы (ИРГ) и изотопы йода. Заметим, что активность любого радионуклида в работающем реакторе, если ему не предшествует долгоживущий материнский радионуклид, достигает равновесного состояния при продолжительности компани  $T \geq 6T_{1/2}$ , где  $T_{1/2}$  – период полураспада радионуклида. Например, для  $^{131}I$  ( $T_{1/2} = 8.04$  сут.) практически равновесное значение активности достигается при  $T = 48$  сут. Для расчета дозовых коэффициентов смеси изотопов  $Kr$ ,  $Xe$ , и  $I$  необходимо знать эффективный спектр фотонного излучения. Весь

Табл. 10.2. Принятые интервалы энергий фотонов [131]

Интервал	Номера интервалов						
	1	2	3	4	5	6	7
$E_i$ , МэВ	> 2.4	1.8 – – 2.4	1.2 – – 1.8	0.6 – – 1.2	0.3 – – 0.6	0.03 – – 0.3	0.01 – – 0.03

спектр фотонного излучения принято разбивать на семь энергетических интервалов, приведенных в табл. 10.2 [70]. Результаты расчета эффективного спектра фотонов приведены в табл. 10.3 [70]. Внизу таблицы указано суммарное энерговыделение  $E$  (МэВ/расп) и дозовые коэффициенты  $B_{\alpha\gamma}$ , которые необходимы для расчета дозы от фотонного излучения радиоактивного облака.

При практических расчетах необходимо учитывать изменение нуклидного состава, обусловленное всевозможными задержками в системах реактора, теплоносителя, помещений, очистных сооружений, камер выдержки и т. д. Особенно это касается изотопов йода. Удельная активность некоторых продуктов деления, представляющих интерес с точки зрения радиационной опасности для населения, приведены в табл. 10.1, которые заимствованы из более полных таблиц справочника [130]. Технологически указанные продукты деления и актиноиды образуются в тепловыделяющих элементах (ТВЭлах), которые облицованы оболочками из сплава циркония с ниобием. Их поступление во внешнюю среду на АЭС частично возможно и при нормальной эксплуатации, не говоря уже об аварийной ситуации, сопровождающейся разгерметизацией этих оболочек.

В реальных условиях на атомных станциях имеются три основных источника загрязнения воздуха радиоактивными веществами.

**Первый источник** загрязнения – деление ядер горючего материала в твердой и газообразной форме. Наибольшую вероятность попадания в воздух имеют газообразные осколки деления – инертные газы (ксенон, криптон и др.), а также радиоактивный йод.

**Второй источник** загрязнения – воздействие нейтронных потоков на теплоноситель первого контура и окружающий воздух. Наибольшей активации в составе воздуха подвержен инертный газ – аргон-40, в результате чего из него может образоваться радиоактивный изотоп – аргон-41 с периодом полураспада 1.82 ч. Наведенную активность может получить также находящаяся в воздухе пыль.

**Третьим источником** загрязнения воздуха может быть нарушение оболочек ТВЭлов или наличие, даже при практически плотных

Табл. 10.3. Эффективный спектр фотонов и дозовые коэффициенты смеси изотопов  $Kr, Xe, I$  [70]

Смесь изо- топов	$E_i, n_i\%$ МэВ распад	Выдержка $t$ (ВВЭР-440)					
		0	5 мин	30 мин	1 ч	12 ч	24 ч
$Kr,$	$E_1$	2.97	2.78	2.54	2.53	2.44	2.54
$Xe,$	$n_1$	1.03	0.65	0.63	0.36	0.068	0.012
$I$	$E_2$	2.11	2.11	2.14	2.15	2.10	2.03
	$n_2$	4.72	4.37	5.39	3.05	0.81	0.51
	$E_3$	1.50	1.50	1.47	1.46	1.42	1.37
	$n_3$	10.32	9.74	14.40	9.27	6.37	3.10
	$E_4$	0.84	0.84	0.84	0.83	0.76	0.74
	$n_4$	42.79	43.92	44.29	45.30	38.19	40.91
	$E_5$	0.48	0.48	0.48	0.48	0.47	0.46
	$n_5$	22.53	23.00	35.67	23.42	26.31	25.28
	$E_6$	0.15	0.15	0.14	0.13	0.13	0.11
	$n_6$	17.24	16.86	25.51	17.08	27.14	29.23
	$E_7$	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
	$n_7$	1.40	1.46	2.38	1.56	1.12	0.96
$E,$	$\frac{\text{МэВ}}{\text{расп.}}$	0.779	0.761	0.743	0.721	0.601	0.505
$B_{a\gamma},$	$\frac{\text{мкЗв} \cdot \text{м}^3}{(\text{год} \cdot \text{Бк})}$	1.66	1.62	1.58	1.54	1.28	1.08
$B_{a\gamma},$	$\frac{\text{бэр} \cdot \text{м}^3}{(\text{с} \cdot \text{Ки})}$	0.196	0.190	0.186	0.180	0.150	0.126

оболочках твэлов, изотопов йода, активных инертных газов и аэрозолей в протечках теплоносителя.

На атомных электростанциях существует значительное разнообразие газоаэрозольных технологических сдувок, причем в некоторые периоды (например, период перегрузок) имеет место повышенная газовая активность, требующая организации специальной дезактивации газообразных выбросов.

Источниками радиоактивности являются также многие вспомогательные сооружения и элементы (бассейны выдержки, система продувки реактора, баки сброса радиоактивных протечек и др.), в которых выделяются радиоактивные инертные газы. Поэтому на атомных электростанциях существуют специальные системы газоочистки радиоактивных газов и их дезактивации, после чего они направля-

ются в вентиляционную трубу и рассеиваются в атмосфере.

Компоновка главного здания на АЭС подчинена гигиеническому принципу деления помещений по зонам. Различают зону строгого режима, где возможно воздействие на персонал радиационного излучения, а также загрязнения воздуха и поверхностей конструкций радиоактивными веществами, и зону свободного режима, в которой полностью исключено воздействие радиационных факторов. Проход в зону строгого режима осуществляется только через санпропускник.

На АЭС существует обширная система вентиляции воздуха для поддержания соответствующего санитарно-гигиенического режима в помещениях станции.

Вентиляционные выбросы АЭС как и от других промышленных объектов, должны быть рассеяны в атмосфере, даже если они и не содержат радиоактивных и токсических веществ. Если же они их содержат, то их концентрации должны быть безопасными для живой природы и человека.

## **10.2. Общие положения и регламентирующие уровни эквивалентной дозы ионизирующего излучения**

Один из важнейших аспектов радиационной безопасности населения связан с радиоактивными газоаэрозольными выбросами предприятий атомной промышленности в атмосферу. От характера распределения радионуклидов в воздухе, воде и в почве зависит степень влияния ионизирующего излучения на человека. Формирование индивидуальных и коллективных доз облучения человека и населения происходит по прямому и не прямому пути воздействия. К прямому пути облучения относится: внешнее облучение от фотонов и  $\beta$ -частиц радионуклидов, содержащихся в воздухе и осевших на почву и воду; внутреннее облучение, обусловленное радионуклидами, поступившими в организм при вдыхании воздуха (ингаляционный путь). К не прямому пути воздействия относится внутреннее облучение от радионуклидов, попадающих в организм при приеме пищи и воды, которые оказываются там в процессе миграции нуклидов по сложным пищевым и биологическим цепочкам.

С целью оценки максимально возможного неблагоприятного воздействия радиации на людей в соответствующих регламентирующих документах [132, 133] принимается, что даже очень малое ионизирующее излучение может иметь отрицательное воздействие на население в целом, отдельных лиц и их потомство.

После облучения в больших дозах тяжесть эффекта проявляется

в зависимости от органа или ткани организма человека, подвергшегося облучению. В случае аварии ядерного реактора наиболее уязвимы костный мозг, легкие, щитовидная железа, желудочно-кишечный тракт (жкт) и кожа.

Главной нормируемой величиной в проблеме радиационной безопасности является предельно допустимая доза облучения человека за длительный период времени. Изменения, происходящие в облученном объекте под воздействием различного рода излучений, зависят от поглощенной энергии  $E$ . Активность радиоактивного вещества определяется числом спонтанных ядерных превращений в единицу времени. Одно ядерное превращение в секунду в системе СИ называют Беккерелем (Бк). Единица радиоактивности в 1 Кюри связана с Бк соотношением  $1 \text{ Ки} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$ .

**Поглощенная доза** ионизирующего излучения  $D$  представляет собой отношение средней энергии, переданной ионизирующим излучением веществу в элементарном объеме, к массе вещества в этом объеме:

$$D = dE/dm.$$

Единица поглощенной дозы в системе СИ называется Грей (Гр). Внесистемная единица поглощенной дозы – рад,  $1 \text{ Гр} = 100 \text{ рад}$ . Между поглощенной дозой фотонов в воздухе  $D_{\text{возд}}$  и поглощенной дозой в биологической ткани  $D_{\text{тк}}$  существует эмпирическая связь

$$D_{\text{тк}} = rD_{\text{возд}},$$

где коэффициент  $r \approx 1.09 \pm 0.02$ .

Для оценки радиационной опасности хронического облучения излучением произвольного состава принята эквивалентная доза  $H$ , которая представляет собой произведение поглощенной дозы  $D$  в биологической ткани на средний коэффициент качества  $k$  этого излучения в данной биологической ткани, т. е.

$$H = Dk. \quad (10.1)$$

За единицу измерения эквивалентной дозы в системе СИ принят Зиверт (Зв), а внесистемной единицей является бэр, причем  $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$ .

Коэффициент качества  $k$  определяет зависимость биологических последствий облучения человека в малых дозах от линейной потери энергии излучения и представляет собой регламентированные значения относительной биологической эффективности излучения (ОБЭ), установленные для контроля радиационной опасности при хроническом облучении. При этом под ОБЭ излучения понимается отноше-

ние поглощенной дозы образцового рентгеновского излучения с граничной энергией 200 кэВ к поглощенной дозе данного вида радиации, вызывающих одинаковый биологический эффект. Для образцового излучения  $k = 1$ . Для других случаев он изменяется от 1 до 20 [70].

Наряду с эквивалентной дозой  $H$  часто рассматривают так называемую **экспозиционную дозу** фотонного излучения  $X$ , которая представляет собой отношение суммарного заряда  $dQ$  всех ионов одного знака, созданных в воздухе, когда все электроны и позитроны, освобожденные фотонами в элементарном объеме воздуха с массой  $dM$ , полностью остановлены в воздухе, к массе воздуха в указанном объеме, т. е.

$$X = dQ/dm.$$

Единицей измерения экспозиционной дозы  $X$  в системе СИ принят кулон на килограмм (Кл/кг), а внесистемной единицей экспозиционной дозы принят рентген (Р). Причем  $1 \text{ Кл/кг} = 3.88 \cdot 10^3 \text{ Р}$  или  $1 \text{ Р} = 2.58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$ . Экспозиционная доза  $X$  (Р) связана с эквивалентной дозой  $H$  (Зв) соотношением  $H = 0.95 \cdot 10^{-2} X$ , т. е.  $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр} \approx 0.01 \text{ Р}$ .

Допустимое радиационное воздействие на человека регламентируется соответствующими нормативными документами, которые разработаны в соответствии с рекомендациями МКРЗ и вобрали в себя мировой опыт работы с источниками излучений и опыт эксплуатации АЭС. Украина пока не имеет таких собственных документов, а руководствуется общесоюзными документами, разработанными в бывшем СССР. Основными из этих документов, имеющих законодательную силу, являются “Нормы радиационной безопасности НРБ-76/87”, а применительно к АЭС – “Санитарные правила проектирования и эксплуатации АЭС СП АС – 88”. Эти документы регламентируют облучение как работающего на объектах персонала, так и населения.

Согласно нормам радиационной безопасности по допустимым предельным дозовым нагрузкам устанавливаются следующие категории облучаемых лиц:

- категория А – персонал, который непосредственно работает с источниками ионизирующих излучений;
- категория Б – ограниченная часть населения, которая не работает непосредственно с источниками излучения, но может подвергнуться облучению;
- категория В – остальная часть населения.



В порядке убывания радиационной чувствительности устанавливаются три группы критических органов человека:

- I группа – все тело, гонады и красный костный мозг;
- II группа – мышцы, щитовидная железа, жировая ткань, печень, почки, селезенка, желудочно-кишечный тракт, легкие, хрусталики глаз и другие за исключением тех, которые относятся к I и III группам;
- III группа – кожный покров, костная ткань, кисти, предплечья, лодыжки и стопы.

Для персонала АЭС, т.е. категории А, НРБ-76/87 устанавливает предельную допустимую дозу (ПДД) облучения. Она равна 50 мЗв в год (5 бэр в год) при облучении всего тела и критических органов первой группы. Для критических органов второй и третьей группы ПДД равны 150 и 300 мЗв в год соответственно. По определению, предельно допустимая доза – наибольшее значение индивидуальной эквивалентной дозы в год, которое при равномерном воздействии в течение 50 лет не вызовет в состоянии здоровья профессионала неблагоприятных изменений, обнаруживаемых современными методами.

Для ограниченной части населения, т.е. категории Б, установлен годовой предел дозы (ПДБ), равный 5 мЗв в год (0.5 бэр в год) при облучении всего тела, а также критических органов первой группы. Для критических органов второй и третьей группы значения ПДБ составляют 15 и 30 мЗв/год соответственно. Обычно контроль за превышением ПДД осуществляется индивидуально, а облучение ограниченной части населения контролируется изменением дозы внешнего облучения и определением поступления радиоактивных веществ в организм путем измерения активности проб воздуха, воды и пищи. Доза внутреннего облучения определяется расчетом на основе количества вдыхаемого человеком воздуха и количества потребляемых воды и пищи.

НРБ-76/87 не нормирует облучение населения в целом, то есть категорию В. Предполагается, что контроль за облучением населения в целом является компетенцией соответствующих структур, таких как Министерство здравоохранения.

Кроме предела дозы ПДБ, для категории Б НРБ-76/87 устанавливают так называемые допустимые уровни (ДУ), являющиеся производными от ПД величинами, рассчитанными в предположении, что если выдержан ДУ, то ПД не будет превышен. К ДУ относятся:

Табл. 10.4. Годовые пределы эквивалентных доз (ПД<sub>Б</sub>), обусловленных радиоактивными отходами АЭС, мЗв (мбэр) [132]

Радиоактивные отходы	Доля ПД <sub>Б</sub> %	Группа критических органов		
		I	II	III
Газоаэрозольные выбросы	4	0.2 (20)	0.6 (60)	1.2 (120)
Жидкие сбросы	1	0.05 (5)	0.15 (15)	0.3 (30)
Всего	5	0.25 (25)	0.75 (75)	1.5 (150)

- предел годового поступления (ПГП) радиоактивных веществ через органы дыхания и пищеварения;
- допустимая концентрация (ДК<sub>Б</sub>) радионуклидов в атмосферном воздухе.

В приложении 1 НРБ-76/87 приведены значения ПГП и ДК<sub>Б</sub> для всех радионуклидов, но при условии, что ПД обуславливается каждым из них в отдельности. Однако практически ситуация поступления в организм одного радионуклида исключена. Поэтому НРБ-76/87 дают рекомендации по расчету ПГП<sub>*i*</sub> и ДК<sub>Б<sub>*i*</sub></sub>, когда в организм человека могут поступить несколько радионуклидов.

При формулировке требований по защите и безопасности населения, проживающего вблизи АЭС, МКРЗ исходит из предположения, что на население категории Б может воздействовать не только ближайшая АЭС, но и другие источники ионизирующего излучения. Поэтому МКРЗ выделяет дозовую квоту ПД, т.е. устанавливает, что население категории Б может получить дозу, равную не ПД, а лишь часть ее, равную 5 % от ПД, т.е. 25 мбэр/год (0.25 мЗв/год). Это очень небольшая доза, так как доза от естественного фона для разных районов составляет порядка 40 ÷ 120 мбэр/год. Указанную дозовую квоту разделяют на две части:

- предел дозы за счет газоаэрозольных выбросов (для АЭС она принимается равной 20 мбэр/год (0.2 мЗв/год));
- предел дозы за счет радиоактивных веществ, поступающих в окружающую среду в виде жидких отходов (для АЭС она равна 5 мбэр/год (0.05 мЗв/год)).

Чтобы не превысить столь невысокий дозовый предел для населения, проживающего вблизи АЭС (группа Б), необходим строгий

контроль радиационных воздействий на население, возникающих при работе АЭС. Однако, в отличие от персонала (группа А), организовать индивидуальный дозиметрический контроль населения (группа Б) практически невозможно. В то же время самое важное – не зафиксировать дозу радиационного воздействия, а заранее принять меры по защите и гарантировать, что эта доза не превзойдет квоты ПД, т. е. 25 мбэр/год. Поэтому в относительно новом регламентирующем документе СП АС-88 ограничиваются радиоактивные поступления с АЭС в окружающую среду в виде газоаэрозольных выбросов и жидких сбросов с целью непревышения ими квоты ПДАЭС. Пределы этих доз иллюстрируются табл. 10.4. Однако рассчитать пределы допустимых выбросов (ПДВ), обеспечивающих выполнение предела доз (ПД) для каждой конкретной АЭС оказывается непростой задачей. Выполнение комплекса таких расчетов требует детальной информации о регионе АЭС, об источнике выбросов, включая тип реактора, о метеорологических условиях, особенностях питания и водопотребления населения и т. п. В прошлые годы специалисты не всегда располагали требуемой информацией. Были и другие трудности, не позволяющие рассчитать предельно допустимые выбросы (ПДВ) и предельно допустимые сбросы (ПДС) на требуемой научной основе.

В последнем нормативном документе СП АС-88 учтены некоторые недостатки предыдущих нормативных документов. Эти правила требуют устанавливать предельно допустимые выбросы ПДВ для каждой АЭС по каждому нуклиду. В них вопрос о газоаэрозольных радиоактивных выбросах АЭС приведен в соответствие с ПДАЭС.

Для облегчения задачи расчета ПДВ СП АС-88 рекомендует распределять составляющие (вклады) радионуклидов выброса в дозовую нагрузку следующим образом:

- РИГ – 50 ÷ 60 %;
- $^{131}I$  – 20 ÷ 30 %;
- остальные радионуклиды – 10 ÷ 20 %,

причем для РИГ и  $^{131}I$  ПДВ должен быть рассчитан на сутки, а для всех других радионуклидов – на месяц. Такое распределение составляющих дозовой квоты между радионуклидами выброса неслучайно. Оно учитывает опыт эксплуатации АЭС, степень сложности очистки выброса АЭС от тех или иных радионуклидов, стоимость очистных устройств и участие разных радионуклидов в формировании дозовой нагрузки на человека.

Радиоактивные инертные газы (РИГ) воздействуют на человека благодаря только внешнему облучению от облака выбросов. Для

снижения их активности требуются дорогостоящие устройства. Поэтому составляющая РИГ в выбросе выбрана наибольшей. Радиационное воздействие  $^{131}\text{I}$  сопряжено с вдыханием и частично с поступлением его в организм человека по пищевым цепочкам. Но поскольку  $^{131}\text{I}$  имеет сравнительно небольшой период полураспада (8 суток) и в воздухе он присутствует непродолжительное время, а его очистка сравнительно проста и не такая дорогостоящая, то вклад  $^{131}\text{I}$  в выброс принят меньшим, чем вклад ИРГ. Другие радионуклиды – это в основном нуклиды с большим периодом полураспада, поступают в атмосферу в аэрозольной форме, оседают на почву в регионе АЭС, могут накапливаться в объектах окружающей среды и включаться в пищевые цепочки. Учитывая, что очистка выбросов от аэрозолей является сравнительно простой задачей, то их вклад в выброс принят меньшим по сравнению с двумя предыдущими радионуклидами.

### 10.3. Доза фотонного облучения от радиоактивного конечного облака

Радионуклиды, рассеянные в атмосфере, являются источником фотонного излучения. Рассмотрим общий принцип оценки дозы внешнего облучения **от радиоактивного облака**, образовавшегося в результате взрыва или аварийной ситуации. Пусть центр облака находится на высоте  $H$  в плоскости  $xz$  и движется в направлении оси  $x$  со средней скоростью ветра  $W$ . Следовательно, в момент времени  $t$  центр облака будет находиться в точке  $(Wt, 0, H)$ . Пусть полное содержание радиоактивных материалов в облаке будет составлять  $Q$  (Бк, Ки). Если распределение объемной активности в облаке определено значением  $a_v(x, y, z, t)$ , то содержание радиоактивных материалов в элементарном объеме облака будет  $a_v(x, y, z, t)dV$ . Тогда мощность дозы для рецептора, находящегося в точке  $(x_1, y_1, 0)$  в момент  $t$  от каждого бесконечно малого объема облака  $dV$  при пренебрежении эффектами поглощения и рассеивания будет

$$d\dot{H} = \frac{a_v(x, y, z, t) \cdot E \cdot dV}{4\pi r^2}, \quad (10.2)$$

где  $E$  – эффективная энергия фотонного излучения (МэВ);  $r$  – расстояние между элементарным объемом и рецептором. Если среда поглощающая, но не рассеивающая, то мощность дозы будет подправлена на коэффициент поглощения

$$d\dot{H} = \frac{a_v E \exp(-\mu_1 r) dV}{4\pi r^2}. \quad (10.3)$$

А если среда поглощающая и рассеивающая, то мощность дозы будет равна

$$d\dot{H} = \frac{a_v E \exp(-\mu r) dV}{4\pi r^2}. \quad (10.4)$$

где  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  - полный коэффициент ослабления, имеющий величину порядка  $0.01 \text{ м}^{-1}$  в воздухе для энергий  $0.5 \div 1.0 \text{ МэВ}$ .

Следовательно, полная мощность дозы облучения от радиоактивного конечного облака объемом  $V$  для рассматриваемого рецептора в момент  $t$  будет равна

$$\dot{H}(x_1, y_1, 0, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{a_v(x, y, z, t) E}{r^2} \exp(-\mu r) dV. \quad (10.5)$$

Таким образом, для расчета дозы фотонного излучения на рецептор от всего облака со сложным пространственным распределением объемной активности  $a_v(x, y, z, t)$  необходимо знать это распределение и вычислить соответствующий объемный интеграл (10.5).

В случае точечного источника, как было показано выше, имеются аналитические формулы, которые хорошо аппроксимируют поле объемной активности в облаке. В принципе, используя формулы такого вида, можно путем интегрирования по пространству получить оценки для мощности дозы фотонного облучения рецептора, находящегося в произвольной точке на местности. Однако вычисление таких объемных интегралов со сложным пространственным распределением объемной активности представляют собой довольно трудную задачу, и с точки зрения практических расчетов такой путь обычно неприемлем. Более рациональный путь оценки дозы состоит в замене реальной сложной формы облака и распределения в нем объемной активности отдельными каноническими формами с постоянным усредненным значением активности по выбранному каноническому объему. В настоящее время в литературе принято рассматривать три простейших случая таких форм. Первый из них соответствует залповому выбросу, который характерен для аварийной ситуации и форма выброса моделируется облаком конечных размеров. Второй случай связан с длительным непрерывным выбросом, он характерен для нормальной эксплуатации объекта, и поле концентрации от него моделируется полубесконечным пространством. Третий случай связан с кратковременным непрерывным выбросом для ветра одного направления. Тогда струя моделируется цилиндрическим источником.

Рассмотрим случай **кратковременного непрерывного выброса**, когда метеорологические и другие условия могут считаться неизменными. Такой выброс в атмосферу часто моделируют струей

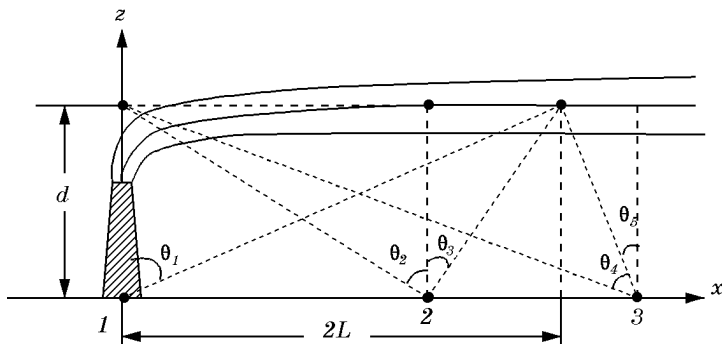


Рис. 10.1. Схематическое представление газоаэрозольного выброса в форме линейного источника излучения

постоянного поперечного размера и рассматривают ее как линейный или цилиндрический источник фотонного излучения. На рис. 10.1 представлена упрощенная схема такой струи, находящейся на некоторой эффективной высоте  $d$  над поверхностью земли.

Соответствующие формулы и функции выхода фотонного излучения из протяженных источников различных геометрических форм с учетом самопоглощения в источнике и поглощения в защитном слое приводятся в [13, 78, 79, 106]. Если  $M$  – мощность выброса (Бк/с),  $W$  – скорость ветра (м/с), то приближенно среднюю удельную активность линейного источника можно определить по соотношению

$$A_L = M/W \quad (\text{Бк/м}). \quad (10.6)$$

Тогда средняя объемная активность в нем будет равна

$$A_V = A_L/\pi R^2 = M/\pi R^2 W \quad (\text{Бк/м}^3) \quad (10.7)$$

где  $R$  – радиус цилиндрического источника. Рассмотрим три характерных точки расположения детектора на поверхности земли (1, 2, 3), указанные на рис. 10.1. Можно показать, что мощность эквивалентной дозы  $\dot{H}$  (Зв/с) будет равна:

- в точке 1

$$\dot{H}_1 = A_V \pi R^2 r \Gamma_\delta(\theta_1, \mu d)/d; \quad (10.8)$$

- в точке 2

$$\dot{H}_2 = A_V \pi R^2 r \Gamma_\delta[F(\theta_2, \mu d) + F(\theta_3, \mu d)]/d; \quad (10.9)$$

- в точке 2, если  $\theta_2 = \theta_3$

$$\dot{H}_2 = 2A_V \pi R^2 r \Gamma_\delta F(\theta_2, \mu d)/d; \quad (10.10)$$

- в точке 3

$$\dot{H}_3 = A_V \pi R^2 r \Gamma_\delta [F(\theta_4, \mu d) + F(\theta_5, \mu d)]/d; \quad (10.11)$$

где

$$F(\theta, \mu d) = \int_0^\theta \exp(-\mu d \sec \theta') d\theta' \quad —$$

функция ослабления фотонного излучения в воздухе, значения которой в зависимости от параметра  $\mu d$  табулированы в [70];  $\mu$  – линейный коэффициент ослабления фотонов в слое воздуха толщиной в 1 м;  $\Gamma_\delta$  – керма постоянная, Гр·м<sup>2</sup>/(с·Бк);  $r = 1.09$ . Численные значения комплекса  $r\Gamma_\delta$  для различных нуклидов затабулированы и приведены, например, в справочнике [70].

При использовании этих формул для более точных оценок дозы фотонного излучения радиоактивных газов необходимо дополнительно:

- ввести поправочный коэффициент  $k_\varepsilon$ , учитывающий экранирование излучения стенами зданий с учетом времени пребывания человека в них (табл. 3.4 справочника [70]);
- учесть многократное рассеивание фотонов в воздухе путем умножения на фактор накопления  $B_D(E, \mu d, z)$  в воздухе (табл. 3.5 справочника [70]);
- учесть дифференциальный спектр  $\gamma$ -излучения для отдельных радионуклидов.

С учетом сказанного формула для мощности дозы запишется в виде

$$\dot{H} = \frac{k_\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \frac{A_V B_D}{r^2} [\exp(-\mu r)] dV, \quad (10.12)$$

где  $B_D$  – дозовый коэффициент, зависящий от энергии фотонного излучения  $E$  (МэВ). Если объемную активность  $A_V$  в формулах (10.7) – (10.12) заменить соотношением (10.7), то мощность эквивалентной

дозы  $\dot{H}$  выразится через мощность выброса  $M$ . Очень часто вытянутую вдоль направления ветра струю можно представить в виде цилиндрического непоглощающего источника радиусом  $R$ . В этом случае полная активность в струе длиной  $2L$  будет равна  $a = \pi R^2 2L A_V$ , где  $A_V = M/\pi R^2 W$ .

Функция  $F_L$ , соответствующая случаю для рецептора в точке 2 (рис. 10.1), будет иметь вид

$$F_L = \frac{1}{d} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_D(E_i, \mu_i d, z) [\exp(-\mu_i d \sec \theta)] d\theta, \quad (10.13)$$

где  $B_D(E_i, \mu_i d, z)$  – дозовый фактор накопления от источника с энергией фотонов  $E_i$  для толщины слоя воздуха  $\mu_i d$  (включая радиус цилиндрического источника). Тогда мощность эквивалентной дозы для этого случая может быть представлена в виде

$$\dot{H}_2 = 2A_V \pi R^2 r \Gamma_\delta F_L. \quad (10.14)$$

Значения  $F_L$  для различных энергий излучения  $E_i$  и высоты источника над землей (м) приведены в табл. 3.6 справочника [70].

Рассмотрим теперь **случай непрерывного длительного выброса**. Для него характерна изменчивость метеорологических и других параметров. Высотный выброс газоаэрозолей и переменность ветра по величине и направлению соответствует образованию над источником выбросов некоторого полубесконечного пространства с радиоактивной примесью. Особенно это очевидно при наличии в атмосфере инверсионного слоя. Поэтому источник фотонного излучения для длительного непрерывного выброса приближенно имитируют источником в форме полубесконечного пространства с равномерно распределенной по объему активностью  $A_V$  (Бк/м<sup>3</sup>). Тогда мощность эквивалентной дозы  $\dot{H}$  (Зв/с), создаваемая в поверхностном (незащищенном) слое тела человека на открытой местности, может быть оценена по формуле

$$\dot{H} = A_V \cdot B_{a\gamma},$$

где  $B_{a\gamma}$  – дозовый коэффициент внешнего облучения фотонами ( $\gamma$ -квантами) от радиоактивного полубесконечного облака, Зв·м<sup>3</sup>/(с·Бк). Его численное значение рассчитывают на основании закона лучевого равновесия [78]. В случае  $2\pi$ -геометрии облучения с точностью до краевого эффекта на открытой ровной местности имеем:

$$B_{a\gamma} = \frac{E \cdot 1.062 \cdot 10^{-13} r}{2w\rho},$$



Табл. 10.5. Дозовые коэффициенты  $B_{a\gamma}$  изотопов  $Ar$ ,  $Kr$ ,  $Xe$  и  $I$  для фотонного облучения тела человека от радиоактивного облака в форме полубесконечного пространства [70]

Коэффици- циент	Нуклиды					
	$^{41}Ar$	$^{85m}Kr$	$^{87}Kr$	$^{133}Xe$	$^{138}Xe$	$^{131}I$
$B_{a\gamma}, \frac{Зв \cdot м^3}{(Бк \cdot с)} 10^{14}$	8.67	1.06	5.24	0.324	7.24	2.57
$B_{a\gamma}, \frac{бэр \cdot м^3}{(Ки \cdot с)} 10^2$	32.1	3.93	19.4	1.20	26.8	9.51

где  $E = \sum_i n_i E_i$  – энергетический выход фотонов, МэВ/расп;  $n_i$  – абсолютный выход в схеме распада, фотон/распад;  $E_i$  – энергия  $i$ -го фотона, МэВ/фотон;  $1.602 \cdot 10^{-13}$  – энергетический эквивалент, Дж/МэВ;  $r = 1.09$  – переходный коэффициент от поглощенной дозы в воздухе к эквивалентной дозе в биологической ткани, Зв/Гр;  $\rho = 1.293$  плотность воздуха при нормальных условиях, кг/м<sup>3</sup>; 2 – коэффициент, учитывающий 2 $\pi$ -геометрию облучения человека;  $w=1$  Дж/(Гр/кг) – энергетический эквивалент Грея, отнесенный к массе в 1 кг облучаемой среды (воздуха, воды).

Заметим, что среднее значение активности можно определить на основе рассмотрения расчетной карты радиоактивного загрязнения, построенной с использованием, например, струйно-диффузионной модели.

В зависимости от выбранных единиц измерения дозовый коэффициент  $B_{a\gamma}$  может быть представлен в следующем виде:

$$B_{a\gamma} = 6.75 \cdot 10^{-14} E \quad \text{Зв} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{Бк});$$

$$B_{a\gamma} = 2.13 E \quad \text{мкЗв} \cdot \text{м}^3 / (\text{год} \cdot \text{Бк});$$

$$B_{a\gamma} = 0.25 E \quad \text{бэр} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{Ки}).$$

Дозовый коэффициент  $B_{a\gamma}$  равен мощности эквивалентной дозы, создаваемой в ткани человека на открытой поверхности почвы при единичной объемной активности радионуклида.

Численные значения дозовых коэффициентов  $B_{a\gamma}$  для группы инертных радиоактивных газов и изотопов йода приведены в табл. 10.5 [70], а для некоторых других радионуклидов – в табл. 10.6 [70]. При наличии смеси радионуклидов используется принцип суперпозиции с учетом процентного вклада каждого радионуклида и спектра фотонного излучения. Эквивалентная доза за время

Табл. 10.6. Дозовые коэффициенты для фотонного излучения некоторых радионуклидов [70]

Нуклид	$T_{1/2}$	$E$	$r\Gamma_\delta$	$B_{a\gamma}$	$B_{s\gamma}$	$B_{s\gamma}^c$
		МэВ расп.	$\frac{\text{Зв} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{Бк}}$	$\frac{\text{Зв} \cdot \text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Бк}}$	$\frac{\text{Зв} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{Бк}}$	$\frac{\text{Зв} \cdot \text{м}^2}{\text{Бк}}$
$^{22}\text{Na}$	2.6 года	2.20	$8.50 \times 10^{-17}$	$1.49 \times 10^{-13}$	$1.07 \times 10^{-15}$	$1.10 \times 10^{-7}$
$^{51}\text{Cr}$	27.73 сут	0.033	$1.26 \times 10^{-18}$	$2.20 \times 10^{-15}$	$1.59 \times 10^{-17}$	$5.46 \times 10^{-11}$
$^{58}\text{Co}$	70.78 сут	1.21	$4.82 \times 10^{-17}$	$8.20 \times 10^{-14}$	$6.06 \times 10^{-16}$	$5.29 \times 10^{-9}$
$^{60}\text{Co}$	5.272 года	2.50	$9.22 \times 10^{-17}$	$1.69 \times 10^{-13}$	$1.16 \times 10^{-15}$	$2.13 \times 10^{-7}$
$^{95}\text{Zr}$	63.98 сут	0.736	$2.96 \times 10^{-17}$	$4.97 \times 10^{-14}$	$3.72 \times 10^{-16}$	$2.93 \times 10^{-9}$
$^{131}\text{I}$	8.02 сут	0.38	$1.55 \times 10^{-17}$	$2.57 \times 10^{-14}$	$1.94 \times 10^{-16}$	$1.94 \times 10^{-10}$
$\frac{^{137}\text{Cs}}{^{137m}\text{Ba}}$	30.14 года	0.565	$2.33 \times 10^{-17}$	$3.82 \times 10^{-14}$	$2.92 \times 10^{-16}$	$1.46 \times 10^{-7}$
$\frac{^{144}\text{Ce}}{^{144}\text{Pr}}$	285.8 сут	0.0193	$9.26 \times 10^{-19}$	$1.30 \times 10^{-15}$	$1.16 \times 10^{-17}$	$3.96 \times 10^{-10}$

облучения  $t$  определяется по формуле

$$H = A_V B_{a\gamma} t. \quad (10.15)$$

При изменяющихся со временем объемной активности или мощности выброса  $M(t)$  ожидаемая эквивалентная доза за время  $T$  рассчитывается по формуле

$$H_T = B_{a\gamma} \int_0^T A_V(t) dt. \quad (10.16)$$

Средняя эквивалентная доза за длительный промежуток времени требует учета розы ветров. Тогда равновесная объемная активность радионуклидов в атмосфере может быть определена с помощью струйно-диффузионной модели, изложенной в главе 6.

В реальных условиях наибольший практический интерес представляет полная доза, которую получит человек за время прохождения, например, облака над контрольной точкой. Энергия фотонного излучения, поглощаемая единицей массы тела человека, подвергшегося облучению от радиоактивного облака, примерно та же, что и для воздуха. Она равна произведению временного интеграла от полного потока энергии на коэффициент поглощения.

Если воспользоваться понятием функции рассеивания, то для объемной концентрации  $A_V$ , согласно выражению (9.5), имеем

$$A_V = MG_{\Sigma} \exp[-(\lambda + \Lambda)t],$$

где  $M$  – мощность выброса. Тогда для эквивалентной дозы от радиоактивного облака получим

$$H = MG_{\Sigma} B_{a\gamma} t \exp[-(\lambda + \Lambda)t], \quad (10.17)$$

где функция рассеивания  $G_{\Sigma}$  определяется по формуле (9.13).

**Пример.** Рассчитать годовую эквивалентную дозу на все тело человека от внешнего фотонного излучения от облака ИРГ, создаваемого выбросами АЭС в атмосферу в условиях нормальной эксплуатации.

**Решение.** Пусть суммарный выброс инертных радиоактивных газов смеси изотопов характеризуется мощностью  $M = 4 \cdot 10^{-3}$  Ки/с, а интересующий нас рецептор находится в точке с координатами  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 2$  км (рис. 6.10). Пусть дополнительно параметры источника выбросов ( $H_0$ ,  $d_0$ ,  $v_0$ ,  $T_0$  и т.д.) и среднегодовые метеорологические условия совпадают с теми, которые рассматривались в разделе 6.7, и для которых была построена карта-схема уровня приземных концентраций  $A_V(x, y)$ , представленная на рис. 6.10. В противном случае необходимо проделать расчеты по определению поля концентраций на струйном и диффузионном участке для построения требуемой карты-схемы загрязнения региона.

В соответствии с вышеизложенным эквивалентная доза внешнего облучения от облака за время  $t = 1$  год  $= 3.16 \cdot 10^7$  с определяется по формуле

$$H = MG_{\Sigma} B_{a\gamma} t = A_V B_{a\gamma} \cdot 3.16 \cdot 10^7 \text{ с.}$$

Для рассматриваемого непрерывного выброса значение требуемой приземной концентрации в воздухе определяем по карте-схеме (см. рис. 6.10) в точке с координатами рецептора (0; 2 км). Нетрудно видеть, что  $A_V \approx 10^{-12}$  Ки/м<sup>3</sup>. Значение дозового коэффициента в соответствии с выбранными единицами измерения, согласно табл. 10.5,

равно

$$B_{a\gamma} = 0.321 + 0.039 + 0.194 + 0.012 + 0.286 + 0.095 = 0.929 \frac{\text{бЭр} \cdot \text{м}^3}{\text{Ки} \cdot \text{с}}.$$

Следовательно, для годовой эквивалентной дозы в рассматриваемом случае имеем

$$H = 10^{-12} \cdot 0.929 \cdot 3.16 \cdot 10^7 = 2.9356 \cdot 10^{-5} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{бЭр},$$

что значительно меньше предела дозы.

#### 10.4. Доза фотонного облучения от радионуклидов, осевших на почву

В процессе прохождения облака радиоактивных аэрозолей над поверхностью земли, часть радиоактивности удаляется из него посредством гравитационного выпадения и вымывания осадками. Вследствие этого происходит радиоактивное загрязнение почвы, которое необходимо учитывать при расчете дозовых нагрузок на человека.

Различают поверхностное загрязнение почвы, которое характерно для начального периода выброса, например, аварийного, и глубинное загрязнение (до 30 см), формирующееся в течение длительного времени. В первом случае обычно самопоглощение в источнике не учитывается, а во втором – следует вводить поправку на самопоглощение в почве [8].

Если распределение поверхностной активности в почве определено значением  $A_s(x_i, t)$  (Ки/м<sup>2</sup>), то мощность дозы будет равна  $H^c = A_s B_{s\gamma}$  и, следовательно, ожидаемая эквивалентная доза  $H^c$  (Зв) на все тело человека от фотонного излучения при поверхностном загрязнении почвы определяется соотношением

$$H^c = B_{s\gamma} \int_0^T A_s(t) dt, \quad (10.18)$$

где  $B_{s\gamma}$  – дозовый коэффициент, Зв·м<sup>2</sup>/(с·Бк);  $T$  – время облучения детектора. Количественная оценка поверхностного загрязнения почвы  $A_s$  представляет собой довольно трудную задачу. Обычно расчет дозы проводят для высоты 1 м над уровнем земли, что соответствует кратчайшему расстоянию от источника до гопад взрослого. При этом поглощение и многократное рассеивание в этом слое воздуха не учитывается, так как считают, что эти два механизма взаимодействия приблизительно уравновешивают друг друга.

Табл. 10.7. Экспериментальные значения скорости выпадения  $w_{ef}$  [9]

Аэрозоль или пары	Поверхность	Скорость выпадения, см/с
Споры ликоподия (диаметр 32 мк)	Трава на аэродроме	1.2
Пары $^{131}I$	То же	2.5
Радиоактивный аэрозоль	То же	0.1
Пыль от ядерных взрывов	Липкая бумага	1.0
Дым (в среднем по стране)	Счетчик оседания	0.8
Дым (Лейстер)	То же	1.0
$SO_2$ (в среднем по стране)	То же	0.3
$SO_2$ (Лейстер)	То же	0.12
Дым (Лондон при фогге)	Улицы и т. п.	0.3
$SO_2$ (Лондон при фогге)	То же	0.7

Величина интенсивности поверхностного загрязнения  $\dot{A}_s(x, y, z, t)$  может быть представлена в виде суммы двух слагаемых

$$\dot{A}_s = \dot{A}_{s1} + \dot{A}_{s2}. \quad (10.19)$$

Первое из них представляет собой плотность потока примеси вследствие гравитационного и турбулентного осаждения, т. е.

$$\dot{A}_{s1}(x, y) = w_{ef} A_V(x, y, 0), \quad (10.20)$$

где  $w_{ef} = w_g + w_T$ ,  $A_V(x, y, 0)$  – приземная объемная активность примеси в точке  $(x, y, 0)$ , Бк/м<sup>3</sup>. По физическому смыслу величина  $w_{ef}$  определяется соотношением

$$w_{ef} = \frac{\text{интенсивность оседания, Бк/(м}^2\text{с)}}{\text{приземная концентрация в воздухе, Бк/м}^3}.$$

При практических расчетах рассеивания выбросов АЭС в атмосфере можно принять  $w_{ef} = 0.02$  м/с для газообразного йода и 0.008 м/с для остальных нуклидов [70]. Для ИРГ  $w_{ef} = 0$ . Другие рекомендации по определению значения скорости гравитационного выпадения согласно работе [9] приведены в табл. 10.7.

Второе слагаемое представляет собой плотность потока примеси на поверхность земли вследствие вымывания осадками:

$$\dot{A}_{s2} = \Lambda \int_0^{H_z} A_V(x, y, z) dz, \quad (10.21)$$

где  $\Lambda$  – постоянная вымывания;  $H_z$  – высота нижней границы облаков, которую в практических расчетах часто полагают равной  $H_z = \infty$ .

Если ввести в рассмотрение понятие максимальной высоты слоя перемешивания  $H_z^{\max}$  [70], то, учитывая соотношения (10.19) – (10.21), имеем

$$\dot{A}_s = A_V(w_{ef} + \Lambda H_z^{\max}) = MG_T(w_{ef} + \Lambda H_z^{\max}). \quad (10.22)$$

Следовательно, плотность загрязнения почвы  $A_s$  за время  $T$  равна

$$A_s = \int_0^T \dot{A}_s(x, y, t) dt.$$

Кроме того, в практических расчетах при рассмотрении короткоживущих радионуклидов вводят еще так называемый эффективный период  $\tau_{ef}$ , учитывающий радиоактивный распад и выведение радионуклида из почвы. Он рассчитывается по формуле

$$\tau_{ef} = [(T_{1/2} T_b) / (T_{1/2} + T_b)] / 0.693, \quad (10.23)$$

где  $T_{1/2}$  и  $T_b$  – периоды радиоактивного полураспада и биологического полувыведения соответственно. Тогда при  $\tau_{ef} < T$  ожидаемую эквивалентную дозу рассчитывают по формулам

$$H^c = A_s B_{s\gamma} \tau_{ef} \quad \text{или} \quad H^c = A_V(x, y, 0)(w_{ef} + \Lambda H_z^{\max}) B_{s\gamma} \tau_{ef}. \quad (10.24)$$

Таким образом, если известны поверхностное загрязнение  $A_s$  или приземная объемная активность  $A_V$ , то для расчета эквивалентной дозы необходимо знать лишь значение дозовых коэффициентов  $B_{s\gamma}$ . В общем случае их определение затруднительно. Однако когда поверхность интересующего нас участка почвы имитируется некоторым диском с радиусом  $R$ , то для изотропного излучения такие оценки для  $B_{s\gamma}$  известны [70].

По физическому смыслу дозовый коэффициент  $B_{s\gamma}$ , Зв·м<sup>2</sup>/(с·Бк), входящий в формулы (10.24), представляет собой мощность эквивалентной дозы на высоте  $d = 1$  м над уровнем загрязненной почвы; он зависит от характера загрязнения почвы и вида распределения фотонного излучения. В общем случае зависимость между мощностью дозы и загрязненностью почвы подробно изложена в [78, 79]. Там вводятся интегральные показательные функции  $E_n(x)$ . Таблицы этих функций имеются в справочной литературе [13].

Рассмотрим дозовые коэффициенты  $B_{s\gamma}$  при поверхностном и глубинном распределении активности в некоторых частных случаях.

#### **Поверхностные загрязнения.**

- 1) источник имеет форму диска радиусом  $R$ ; ослабление фотонного потока в воздухе не учитывается, рассматривается изотропное распределение излучения, тогда

$$B_{s\gamma} = \pi r \Gamma_\delta \ln [(d^2 + R^2) / d^2]; \quad (10.25)$$

- 2) тот же случай, но с учетом ослабления в воздухе:

$$B_{s\gamma} = 2\pi r \Gamma_\delta [E_1(b_1) - E_1(b_1 \sec \theta)], \quad (10.26)$$

где  $\theta$  – угол видимости радиуса источника  $R$  из точки детектора;

- 3) то же, что и в п. 2, но для  $\theta = \pi/2$  (бесконечная протяженная ровная поверхность):

$$B_{s\gamma} = 2\pi r \Gamma_\delta E_1(b_1); \quad (10.27)$$

- 4) то же, что в п. 1, но для косинусоидального распределения излучения вида  $A_s(\theta) = (A_s/2\pi) \cos \theta$ :

$$B_{s\gamma} = 4\pi r \Gamma_\delta (1 - \cos \theta), \quad (10.28)$$

где  $\theta$  – угол между нормалью к плоскости источника и направлением детектируемого излучения;

- 5) то же, что в п. 4, но с учетом поглощения излучения в воздухе слоем  $\mu d$ :

$$B_{s\gamma} = 4\pi r \Gamma_\delta [E_2(b_1 - \sec \theta E_2(b_1 \cos \theta))]. \quad (10.29)$$

При  $\theta = \pi/2$  (бесконечная поверхность с косинусоидальным распределением излучения) формулы (10.28) и (10.29) принимают соответственно вид

$$B_{s\gamma} = 4\pi r \Gamma_\delta, \quad (10.30)$$

$$B_{s\gamma} = 4\pi r \Gamma_\delta E_2(b_1). \quad (10.31)$$

В этих формулах  $b_1 = \mu d$ , где  $\mu$  – линейный коэффициент ослабления фотонов в воздухе;  $d$  – расстояние от поверхности почвы до детектора ( $d \approx 1$  м). Функции  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$  определяются формулами

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt = E_i(x), \quad (10.32)$$

$$E_2(x) = x \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt = \exp(-x) - x E_1(x).$$

Заметим, что в действительности поверхность почвы чаще всего является шероховатой. В этом случае более справедлив косинусоидальный закон распределения излучения, который для небольшой высоты дает несколько меньшие значения дозового множителя  $B_{s\gamma}$ . Учитывая, что для высоты  $d = 1$  м параметр  $b_1$  мал и равен 0.01, тогда, пренебрегая поглощением в воздухе и рассеиванием при расчете дозы фотонного излучения от загрязненной поверхности почвы, рекомендуется применять дозовый коэффициент  $B_{s\gamma}$  в виде простой формулы (10.30). Примеры значения  $B_{s\gamma}$  для наиболее важных радионуклидов приведены в табл. 10.6 [70]. Для других радионуклидов их можно найти в соответствующих справочниках.

В приведенных выше подходах предполагалось, что рецептор находится на открытом месте, обычно в центре большой плоской равнины. В большинстве случаев доза будет меньше, если рецептор чем-то защищен, например, находится внутри здания. Хотя точных решений для расчета дозы внутри здания не существует, однако имеются приближенные способы и рекомендации оценки ожидаемого фактора защиты. Суть их сводится к вычислению ослабления потока  $\gamma$ -излучения при прохождении через материалы различной толщины.

**Глубинное распределение активности.** При длительных временах выброса или спустя значительное время после кратковременного выброса и, наконец, в результате пахоты земли часть радионуклидов проникает в глубинные слои почвы. Характер их распределения зависит от вида почвы, влияния метеорологических факторов, физико-химических свойств радионуклидов и поэтому не удается пока получить универсальный закон их распределения. Однако приближенные оценки для мощности дозы и в данном случае имеются.

Введем следующие обозначения:  $d$  – высота детектора над поверхностью почвы и  $h$  – глубина излучающего слоя почвы, кг/м<sup>2</sup>;  $\mu_m$  и  $\mu_{sm}$  – массовые коэффициенты ослабления фотонов в воздухе и в почве, м<sup>2</sup>/кг;  $b_1 = \mu_m d$ ,  $b_2 = \mu_{sm} h$ ,  $b_3 = b_1 + b_2$  – безразмерные параметры, характеризующие расстояние до детектора от поверхности почвы и глубину загрязненного слоя;  $a_m$  – удельная активность почвы, Бк/кг,  $\Gamma_\delta$  – Керма постоянная, Гр·м<sup>2</sup>/(с·Бк);  $r = 1.09$  Зв/Гр.

Тогда мощность эквивалентной дозы  $\dot{H}$  (Зв/с) в точке размещения детектора будет равна:

- 1) при равномерном распределении удельной активности по глубине  $h$

$$A_{mh} = A_{m0};$$

- в общем виде

$$\dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] [E_2(b_1) - E_2(b_3)];$$



- для  $b_2 = \infty$

$$\dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] E_2(b_1);$$

- для  $b_1 = 0$

$$\dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] [1 - E_2(b_1)];$$

- для  $b_1 = 0, b_2 = \infty$

$$\dot{H} = 2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm};$$

2) при линейном распределении активности

$$A_{mh} = A_{m0} (1 + \alpha h), \quad \alpha \gtrsim 1;$$

- в общем виде

$$\begin{aligned} \dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] \times \\ \times \{E_2(b_1) - (1 + \alpha h) E_2(b_3 + (\alpha / \mu_{sm}) [E_3(b_1) - E_2(b_3)])\}; \end{aligned}$$

- для  $b_1 = 0$

$$\begin{aligned} \dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] \times \\ \times \{1 - (1 + \alpha h) E_2(b_3) + \frac{\alpha}{\mu_{sm}} [0.5 - E_3(b_2)]\}; \end{aligned}$$

- для  $b_2 = \infty$

$$\dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] [E_2(b_1) + \frac{\alpha}{\mu_{sm}} E_3(b_1)];$$

- для  $b_1 = 0, b_2 = \infty$

$$\dot{H} = (2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}) (1 + \alpha / 2 \mu_{sm});$$

3) при экспоненциальном распределении активности по глубине

$$A_{mh} = A_{m0} \exp(\alpha x), \quad \alpha \gtrsim 0;$$

- в общем виде

$$\begin{aligned} \dot{H} = [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] [\exp(\pm \alpha b_1 / \mu_{sm})] \times \\ \times [F_1(b_3, \pm \alpha / \mu_{sm}) - F_1(b_1, \pm \alpha / \mu_{sm})]; \end{aligned}$$

- для  $b_2 = \infty$

$$\begin{aligned} \dot{H} &= [2\pi A_{m0} r \Gamma_\delta / \mu_{sm}] [\exp(\pm \alpha b_1 / \mu_{sm})] \times \\ &\times [F_1(\infty, \pm \alpha / \mu_{sm}) - F_1(b_1, \pm \alpha / \mu_{sm})], \end{aligned}$$

где значения функции  $F_1(t, \pm \alpha) = \int_0^t [\exp(\pm \alpha x)] E_1(x) dx$  приводятся в справочнике [70], а величина  $t$  равна  $b_1, b_2, b_3, \infty$ .

В более общем случае, когда с течением времени радиоактивные вещества распределены неравномерно, в основную формулу следует ввести поправочный множитель  $k_r$ , т. е. принять, что

$$B_{s\gamma} = 4\pi r \Gamma_\delta k_r. \quad (10.33)$$

Расчетные значения поправочного коэффициента  $k_r$  для различных условий распределения приведены в справочнике [70].

Анализ приведенных значений коэффициентов  $k_r$  показывает, что характер распределения радионуклидов в почве для заданных  $\mu_{sh}$  не сильно влияет на  $k_r$ .

## 10.5. Доза от внешнего $\beta$ -излучения радионуклидов

В соответствующем разделе физики под  $\beta$ -излучением понимается излучение электронов радиоактивными ядрами. Если они несут отрицательный заряд, их называют  $\beta^-$ -частицами, если положительный –  $\beta^+$ -частицами, или позитронами. По своей природе спектр энергий  $\beta$ -частиц является непрерывным и простирается от очень низких значений до 10 МэВ, но основной практически значимый диапазон находится в пределах от 10 КэВ до 5 МэВ. Кроме того, при некоторых типах ядерных превращений энергия перехода между двумя энергетическими уровнями передается электрону. И тогда он несет энергию, равную связи электрона и разнице энергий перехода. При этом излучаются электроны конверсии, имеющие дискретный спектр энергий.

В диапазоне указанных выше энергий электроны при взаимодействии с веществом теряют свою энергию в результате процессов тормозной способности. На практике обычно используют массовую тормозную способность заряженных частиц, которая определяется по классической формуле Бете [79]. В отличие от фотонного  $\gamma$ -излучения,  $\beta$ -частицы и электроны конверсии имеют в воздухе сравнительно небольшой пробег.

Табл. 10.8. Зависимость тормозной способности  $S_m$ , МэВ·см<sup>2</sup>/г, и среднего пробега  $\bar{R}$ , г/см<sup>2</sup>, от граничной энергии  $E_0$  для некоторых сред [70]

$E_0$ МэВ	Сухой воздух		Мышцы		Алюминий	
	$S_m$	$\bar{R}$	$S_m$	$\bar{R}$	$S_m$	$\bar{R}$
0.01	19.8	$2.88 \cdot 10^{-4}$	22.4	$2.54 \cdot 10^{-4}$	16.5	$3.54 \cdot 10^{-4}$
0.03	3.50	$2.00 \cdot 10^{-3}$	9.58	$1.77 \cdot 10^{-3}$	7.29	$2.37 \cdot 10^{-3}$
0.05	5.82	$4.91 \cdot 10^{-3}$	6.55	$4.36 \cdot 10^{-3}$	5.05	$5.74 \cdot 10^{-3}$
0.1	3.64	$1.62 \cdot 10^{-2}$	4.08	$1.44 \cdot 10^{-2}$	3.19	$1.87 \cdot 10^{-2}$
0.3	2.09	$9.53 \cdot 10^{-2}$	2.34	$8.49 \cdot 10^{-2}$	1.85	$1.08 \cdot 10^{-1}$
0.5	1.81	$2.0 \cdot 10^{-1}$	2.02	$1.78 \cdot 10^{-1}$	1.60	$2.26 \cdot 10^{-1}$
0.8	1.69	$3.72 \cdot 10^{-1}$	1.88	$3.32 \cdot 10^{-1}$	1.50	$4.26 \cdot 10^{-1}$
1.0	1.67	$4.92 \cdot 10^{-1}$	1.84	$4.41 \cdot 10^{-1}$	1.49	$5.55 \cdot 10^{-1}$
2.0	1.71	1.08	1.83	$9.89 \cdot 10^{-1}$	1.52	1.22
3.0	1.78	1.66	1.87	1.53	1.58	1.87

Наиболее значительными путями внешнего воздействия  $\beta$ -частиц на организм человека является параллельный моноэнергетический поток электронов, а также радиоактивно загрязненный воздух или поверхность кожи. Рассмотрим эти три случая подробнее.

В случае моноэнергетического потока важнейшими радиационными характеристиками являются массовые тормозные способности  $S_m$  и средний пробег  $\bar{R}$ . В приближении непрерывного замедления между этими характеристиками существует следующая связь:

$$\bar{R}(E_0) = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S_m}, \quad (10.34)$$

где  $S_m = -dE/dx$  – полная тормозная способность, МэВ·м<sup>2</sup>/кг;  $E_0$  – граничная энергия  $\beta$ -частиц или электронов конверсии. В качестве примера значения тормозной способности  $S_m$  и среднего пробега  $\bar{R}$ , обусловленных ионизационными и радиационными потерями в воздухе, мышцах и металле (алюминий) в зависимости от граничной энергии  $E_0$  приведены в табл. 10.8. Более полные данные имеются в работе [70]. Для оценки среднего значения пробега электронов часто

применяют приближенные эмпирические оценки:

$$\begin{aligned} \text{в воздухе} \quad R_{\max} &\approx 4.5E_0 \text{ (м)}; \\ \text{в воде} \quad R_{\max} &\approx 5.2E_0 \text{ (мм)}; \\ \text{в алюминии} \quad R_{\max} &\approx 2.5E_0 \text{ (мм)}. \end{aligned}$$

Полная массовая тормозная способность  $S_m$  может быть использована для расчета мощности поглощенной дозы в биологической ткани  $\dot{D}$ , Гр/с. Если плотность потока электронов, падающих нормально на поверхность, обозначить через  $\varphi_l$ ,  $\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , то мощность дозы определится по формуле

$$\dot{D} = \frac{\varphi_l S_m \cdot 1.602 \cdot 10^{-13}}{w}, \quad (10.35)$$

где  $1.602 \cdot 10^{-13}$  – энергетический эквивалент, Дж/МэВ;  $w = 1$  Дж/(кг·Гр) – переходный коэффициент. Для получения мощности эквивалентной дозы  $\dot{H}$ , Зв/с, на глубине  $d$  необходимо в формулу (10.35) ввести множитель  $k = 1.09$  Зв/Бк и поправку на поглощение  $\beta$ -частиц в ткани.

Рассмотрим теперь случай, когда источником  $\beta$ -излучения является **загрязненный воздух**. Если высота облака над поверхностью земли превосходит максимальный пробег  $\beta$ -частиц, то их вкладом в дозу можно пренебречь. В противном случае расчет доз можно производить согласно закону лучевого равновесия, имитируя источник в форме полубесконечного пространства. Тогда мощность эквивалентной дозы на незащищенную одеждой биологическую ткань  $\dot{H}$ , Зв/с, может быть определена соотношением

$$\dot{H}_\beta = A_V B_{\alpha\beta}, \quad (10.36)$$

где  $A_V$  – объемная активность в воздухе, Бк/м<sup>3</sup>;  $B_{\alpha\beta}$  – дозовый коэффициент внешнего  $\beta$ -излучения, Зв·м<sup>3</sup>/(с·Бк), который рассчитывается из соотношения

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1.602 \cdot 10^{-13}}{2w\rho} k \sum_i n_i E_i \frac{S_m^t(E_i)}{S_m^a(E_i)}. \quad (10.37)$$

Здесь  $\rho = 1.293$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воздуха;  $S_m^t/S_m^a = 1.09 \pm 0.04$  – отношение тормозных способностей  $\beta$ -частиц  $i$ -й энергии в биологической ткани и в воздухе;  $k = 1$  Зв/Гр – коэффициент качества.

При расчете эквивалентной дозы  $\dot{H}_\beta$  на базальный слой кожи необходимо вводить поправку на поглощение  $\beta$ -частиц в эпидермисе, т. е.

$$\dot{H}_\beta = k A_V B_{\alpha\beta} \cdot t, \quad (10.38)$$

Табл. 10.9. Дозовые коэффициенты  $B_{\alpha\beta}$ , Зв·м<sup>3</sup>/(год·Бк), в базальном слое кожи, создаваемые  $\beta$ -частицами, содержащимися в полубесконечном радиоактивном облаке [70]

Коэффициент	Нуклиды					
	<sup>41</sup> Ar	<sup>60</sup> Co	<sup>95</sup> Zr	<sup>51</sup> Cr	<sup>137</sup> Cs	<sup>131</sup> I
$B_{\alpha\beta}$	$7.62 \times 10^{-7}$	$1.36 \times 10^{-7}$	$1.91 \times 10^{-7}$	$9.68 \times 10^{-11}$	$4.16 \times 10^{-7}$	$3.44 \times 10^{-7}$

Табл. 10.10. Дозовые коэффициенты  $B_{s\beta}$ , Зв·см<sup>2</sup>/(год·Бк) облучения базального слоя кожи  $\beta$ -частицами при равномерном загрязнении кожи радиоактивными веществами [70]

Толщина эпидермиса $\Delta X$ , мг/см <sup>2</sup>	Нуклиды					
	<sup>14</sup> C	<sup>60</sup> Co	<sup>90</sup> Sr	<sup>131</sup> I	<sup>137</sup> Cs	<sup>235</sup> U
4	$7.9 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$2.1 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-3}$
7	$2.9 \times 10^{-3}$	$9.9 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-3}$
40	0.0	$2.5 \times 10^{-4}$	$3.4 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-3}$	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.9 \times 10^{-7}$

где  $t$  – время облучения. Пример численных значений дозовых коэффициентов  $B_{\alpha\beta}$  в базальном слое кожи, создаваемых  $\beta$ -частицами и электронами конверсии радионуклидов, содержащихся в полубесконечном радиоактивном пространстве, приведены в табл. 10.9 [70]. В литературе известны более строгие подходы к расчету доз от  $\beta$ -излучения, однако они выходят за рамки нашего рассмотрения.

Приведенные выше соотношения могут также использоваться для расчета мощности эквивалентной дозы внешнего облучения  $\beta$ -частицами и в водной среде, загрязненной радионуклидами. В этом случае под  $A_V$ , Бк/м<sup>3</sup>, следует понимать объемную активность воды,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Значения мощности эквивалентной дозы внешнего облучения  $\beta$ -частицами от загрязненной поверхности кожи рассчитываются по аналогичной формуле, а именно:

$$\dot{H}_\beta = A_V B_{s\beta},$$

где  $B_{s\beta}$  – переходный дозовый коэффициент, Зв·см<sup>2</sup>/(год·Бк), завися-

щий от толщины слоя эпидермиса. Численные значения этого дозового коэффициента для облучения базального слоя кожи  $\beta$ -частицами при равномерном загрязнении кожи приведены в табл. 10.10.

Выше уже отмечалось сравнительно небольшая проникающая способность  $\beta$ -частиц в веществе. Однако при оценке доз внешнего облучения следует помнить, что эта небольшая проникающая способность влечет за собой и большие энергетические потери  $dE/dx$  на единицу длины биологической ткани. Поэтому  $\beta$ -частицы могут быть при определенных условиях опасным поражающим фактором незащищенного кожного покрова, если мощность источника велика, как, например, в условиях аварийной ситуации.

## 10.6. Дозы внутреннего облучения от ингаляционного и перорального путей попадания радионуклидов в организм человека

Принцип расчета доз от внутреннего облучения во многом аналогичен расчету доз от внешнего облучения. При этом, следуя работе [70], основу расчета составляют дозовые коэффициенты и соответствующие объемная или удельная активности. При анализе рассматриваемой ситуации примем за характерный отрезок времени один год и введем в рассмотрение следующие величины:

$\dot{I}_a$  и  $\dot{I}_w$  – скорость поступления радионуклида в организм ингаляционным и пероральным путем соответственно за год, Бк/год;  $A_V$  – объемная активность воздуха, воды или молока, Бк/м<sup>3</sup>;  $A_m$  – удельная активность употребляемой пищи, Бк/кг;  $V$  – объем воздуха, воды или молока, потребляемый организмом в единицу времени, м<sup>3</sup>/год;  $M$  – масса потребляемых продуктов питания в единицу времени, кг/год.

Тогда для годовой мощности от внутреннего облучения при ингаляционном и пероральном путях можно записать соответственно

$$\dot{H}_{ih} = B_{ih} \cdot \dot{I}_a = B_{ih} \cdot A_V \cdot V \quad \text{Зв/год}, \quad (10.39)$$

$$\dot{H}_{ig} = B_{ig} \cdot \dot{I}_w = B_{ig} \cdot A_V \cdot V = B_{ig} \cdot A_m \cdot M \quad \text{Зв/год}. \quad (10.40)$$

Подобные формулы можно записать и для полной дозы, учитывая полные поступления  $I_w$  и полный объем и массу загрязненных воздуха и продуктов, поступивших в организм человека. Опираясь на эти соотношения, можно решать и обратную задачу, т. е. рассчитать допустимые характеристики  $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_w$ ,  $I_a$ ,  $I_w$ ,  $A_V$ ,  $A_m$ ,  $V$  и  $M$ .

В практике расчета доз согласно нормам радиационной безопасности (НРБ-76/87) [119] вводятся следующие нормативы и обозначения:

- ПД – предел эквивалентной дозы для ограниченной части населения, Зв/год;
- ДК<sub>а</sub> – допустимые концентрации радионуклидов в атмосферном воздухе, Бк/м<sup>3</sup>;
- ДК<sub>в</sub> – допустимые концентрации радионуклидов в питьевой воде, Бк/м<sup>3</sup> или пище, Бк/кг;
- ПГП<sub>а</sub> и ПГП<sub>в</sub> – пределы годового поступления радионуклидов в организм человека, Бк/год.

Для населения категории Б перечисленные выше характеристики связаны следующими соотношениями:

- в случае ингаляционного пути поступления

$$\text{ПД} = \text{ДК}_a \cdot V_a \cdot 3.16 \cdot 10^7; \quad (10.41)$$

$$\text{ПД} = \text{ПГП}_a \cdot V_{ih}; \quad (10.42)$$

- в случае перорального пути поступления

$$\text{ПД} = \text{ДК}_w \cdot V_w \cdot 3.16 \cdot 10^7; \quad (10.43)$$

$$\text{ПД} = \text{ПГП}_w \cdot V_{ig}; \quad (10.44)$$

где  $V_a$  и  $V_w$  – мощность эквивалентной дозы на единичную объемную активность воздуха и питьевой воды, Зв·м<sup>3</sup>/(с·Бк);  $V_{ih}$  и  $V_{ig}$  – эквивалентная доза на единичную активность, поступившая в организм ингаляционным и пероральным путями, Зв/Бк;  $3.16 \cdot 10^7$  – число секунд в году.

Если разрешить указанные соотношения относительно дозовых коэффициентов  $V_a$ ,  $V_w$ ,  $V_{ih}$  и  $V_{ig}$ , используя при этом соответствующие пределы доз, ДК и ПГП, принятые, например, в НРБ-76/87, то можно получить их численные значения.

В качестве примера определим дозовые коэффициенты для <sup>131</sup>I. Согласно НРБ-76/87, критическим органом для этого радионуклида является щитовидная железа (II группа); ПД =  $1.5 \cdot 10^{-2}$  Зв/год; ДК<sub>а</sub> =  $5.5$  Бк/м<sup>3</sup>; ДК<sub>в</sub> =  $3.7 \cdot 10^4$  Бк/м<sup>3</sup>; ПГП<sub>а</sub> =  $3.7 \cdot 10^4$  Бк/год и ПГП<sub>в</sub> =  $3.0 \cdot 10^4$  Бк/год. Используя эти значения, из (10.41) – (10.44) получаем:

$$V_a = 8.6 \cdot 10^{-11} \text{ Зв} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{Бк}) \sim 320 \text{ бэр} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{Ки});$$

$$V_w = 1.3 \cdot 10^{-14} \text{ Зв} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{Бк}) \sim 4.7 \cdot 10^{-2} \text{ бэр} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{Ки});$$

$$V_{ih} = 4.0 \cdot 10^{-7} \text{ Зв} / \text{Бк} \sim 1.5 \cdot 10^6 \text{ бэр} / \text{Ки};$$

$$V_{ig} = 5.0 \cdot 10^{-7} \text{ Зв} / \text{Бк} \sim 1.8 \cdot 10^6 \text{ бэр} / \text{Ки}.$$

Аналогично можно рассчитать дозовые коэффициенты и для других радионуклидов, используя соответствующие числовые данные из нормативных документов. В публикациях МКРЗ и в [70] приводятся численные значения дозовых коэффициентов  $V_{ih}$  и  $V_{ig}$ . При их использовании необходимо учитывать ряд особенностей. Например, что они соответствуют полuveковой ожидаемой дозе для взрослых лиц и т. д. Для лиц молодого возраста закономерности формирования дозовых нагрузок от источника внутреннего облучения очень сложны, и в настоящее время пока нет общепризнанной надежной модели для учета возрастных особенностей при формировании доз [70].

Таким образом, зная численные значения дозовых коэффициентов  $V_{ih}$ ,  $V_{ig}$  и объемную активность  $A_V$ , годовая мощность внутреннего облучения рассчитывается по соотношениям (10.39) и (10.40).

## 10.7. Индивидуальная доза от попадания радионуклидов по пищевым цепочкам

Принцип расчета индивидуальных доз от попадания в организм человека радионуклидов по пищевым цепочкам основывается на формулах той же структуры, что и в предыдущем разделе.

Индивидуальные дозы по пищевому пути поступления радионуклидов рассчитывают в предположении, что потребляются только местные продукты питания. Такой подход дает консервативную оценку.

Индивидуальная ожидаемая эквивалентная доза  $H^c$ , Зв, от продуктов питания, выращенных на почве, подверженной кратковременному загрязнению с уровнем  $A_s$ , Бк/м<sup>2</sup>, рассчитывается по формуле

$$H^c = A_s k_{fi}^{ind} V_{ig}. \quad (10.45)$$

Средняя мощность индивидуальной годовой эквивалентной дозы,  $\dot{H}$ , Зв/с, от продуктов, выращенных на равномерно загрязненной почве  $A_s$  Бк/(м<sup>2</sup>·с), при установившемся равновесии процессов накопления – выведения, определяется по формуле

$$\dot{H} = \dot{A}_s k_{fi}^{ind} V_{ig}, \quad (10.46)$$

где величины  $A_s$  и  $\dot{A}_s$  получают путем прямых измерений или расчетом по соответствующим формулам вида (10.22).

При учете только сухого гравитационного осаждения радиоактивной примеси на поверхность почвы для среднегодовой мощности индивидуальной дозы можно записать

$$\dot{H} = A_V B_{a,ig}, \quad (10.47)$$



где  $AV$  – объемная активность;  $B_{a,ig}$  – дозовый коэффициент внутреннего облучения при потреблении человеком продуктов питания, выращенных на местности с “сухим” загрязнением,  $Зв \cdot м^3 / (с \cdot Бк)$ . Его рассчитывают по формуле

$$B_{a,ig} = w_g k_{fi}^{ind} B_{ig}, \quad (10.48)$$

где  $w_g$  – скорость сухого гравитационного осаждения радионуклидов из атмосферы;  $B_{ig}$  – дозовый коэффициент внутреннего облучения при поступлении радионуклида с водой или пищей,  $Зв/Бк$ ,  $k_{fi}^{ind}$  – коэффициент, равный

$$k_{fi}^{ind} = k_{fi} \cdot \bar{S}. \quad (10.49)$$

Здесь  $k_{fi}$  – безразмерный коэффициент, характеризующий потерю радионуклидов при миграции по пищевой цепочке, в процессе хранения и кулинарной обработки;  $\bar{S}$  – площадь сельскохозяйственных угодий,  $м^2$ , необходимая для производства продуктов питания данного вида для одного индивида.

Площадь  $\bar{S}$  в случае продуктов растительного происхождения определяют соотношением

$$\bar{S} = I_m / P_y, \quad (10.50)$$

где  $P_y$  – годовая урожайность рассматриваемого вида растений в данной местности,  $кг/м^2$ ;  $I_m$  – годовое потребление этого вида продукции одним человеком,  $кг$ . В случае продуктов животного происхождения площадь  $\bar{S}$  рассчитывают по формуле

$$\bar{S} = (I_m / P_a) \sum_i \bar{S}_{a,i}, \quad (10.51)$$

где  $I_m$  – годовое потребление мяса или молока одним человеком,  $кг$ ,  $л$ ;  $P_a$  – среднегодовой привес мяса или удойность одного животного,  $кг$ ,  $л$ ;  $\bar{S}_{a,i}$  – площадь  $i$ -ой кормовой культуры

$$\bar{S}_{a,i} = I_{a,i} / P_{y,i}, \quad (10.52)$$

где  $P_{y,i}$  – годовая урожайность  $i$ -й кормовой культуры,  $кг/м^2$ ;  $I_{a,i}$  – ее годовое потребление одним животным,  $кг$ .

Значения коэффициента  $k_{fi}$  различны для разных радионуклидов, продуктов питания, местных условий, сезона года, технологии выращивания и т. д. Обычно рассматривают их максимальные значения. Известны несколько способов расчета этих коэффициентов, а также различные модели миграции радионуклидов в окружающей среде, включая сельскохозяйственные растения и животных [70]. Более подробно об этом можно узнать в соответствующей специальной литературе.

## 10.8. Расчет индивидуальных доз от выбросов трития и радиоактивного углерода

Оценка индивидуальных доз и миграция во внешней среде таких долгоживущих радионуклидов как тритий  $^3\text{H}$  и радиоактивный углерод  $^{14}\text{C}$  имеет свои особенности [70].

**Поведение трития** во внешней среде характерно тем, что его атомы входят в состав молекул воды. Все остальные нуклиды мигрируют в виде растворенных в воде химических соединений. Поэтому схема миграции трития специфична. Например, если для других нуклидов характерен солевой обмен веществ в растениях, то большая часть трития поглощается корнями в виде воды и расходуется на испарение. Своеобразен также механизм оседания трития на поверхность земли и повторного его поступления в атмосферу. Он связан с процессами конденсации и испарения влаги. Тритий подвижен, так как круговорот воды в природе весьма быстротечен. Исходной величиной при расчете дозы облучения от трития обычно является его удельная активность в атмосферной влаге  $A_m^H$ , которая рассчитывается по формуле [70]

$$A_m^H = A_V^H / \varphi, \quad (10.53)$$

где  $A_V^H$  – концентрация трития в воздухе, Бк/м<sup>3</sup>;  $\varphi$  – влажность атмосферного воздуха, кг/м<sup>3</sup>. Приблизительно средняя влажность воздуха во время роста растений равна 0.09 кг/м<sup>3</sup>. Тогда удельная активность трития в растительных продуктах питания  $A_{m,p}^H$ , Бк/кг, рассчитывается по формуле

$$A_{m,p}^H = (A_V^H / \varphi) k_g P_g^{H_2O}, \quad (10.54)$$

где  $k_g$  – безразмерный коэффициент фракционирования, равный отношению концентрации трития в воде растений к его концентрации в атмосферной влаге;  $P_g^{H_2O}$  – доля воды в общей массе растений. Мощность эквивалентной дозы  $\dot{H}$ , обусловленной поступлением трития в организм человека с продуктами растительного происхождения, можно рассчитать по формуле

$$\dot{H} = I_w A_{m,p}^H B_{ig}^{HTO}, \quad (10.55)$$

где  $I_w$  – годовое потребление человеком данных пищевых продуктов, кг/год;  $A_{m,p}^H$ , Бк/кг, определяется вышеприведенной формулой;  $B_{ig}^{HTO}$  – дозовый коэффициент перорального поступления, определяемый из соответствующих таблиц [70].

**Особенность миграции радиоактивного углерода** заключается в том, что обычно он поступает в биосферу в виде углекислого

газа или в виде быстроокисляющихся до  $\text{CO}_2$  соединений. Углекислый газ поглощается растениями непосредственно из атмосферы в процессе фотосинтеза. Исходной величиной для расчета дозы облучения служит удельная активность  $^{14}\text{C}$  в природном углероде  $A_m^c$ , Бк/кг, содержащемся в атмосферном воздухе в виде  $\text{CO}_2$ :

$$A_m^c = A_V^c / \bar{\varphi}, \quad (10.56)$$

где  $A_V^c$  – объемная активность  $^{14}\text{C}$  в воздухе, Бк/м<sup>3</sup>;  $\bar{\varphi}$  – содержание природного углерода в воздухе, кг/м<sup>3</sup>, которую приближенно можно принять равной  $\bar{\varphi} = 0.18 \text{ Г/м}^3$ . Зная  $A_m^c$ , удельную активность  $^{14}\text{C}$  в растительных кормах животных  $A_{m,p}^c$ , Бк/кг, определяем по формуле

$$A_{m,p}^c = A_M^c \cdot P_g^c = (A_V^c / \bar{\varphi}) P_g^c, \quad (10.57)$$

где  $P_g^c$  – доля углерода в общей массе продуктивных частей растений, которую можно приближенно принять  $P_g^c = 0.11$  [70]. Тогда объемную активность  $^{14}\text{C}$  в молоке  $A_V^c$ , Бк/л, и удельную активность в мясе животных  $A_m^c$ , Бк/кг, рассчитывают по формулам:

$$\text{в молоке} \quad A_V^c = A_{m,p}^c k_{ac}^{st} P_k; \quad (10.58)$$

$$\text{в мясе} \quad A_m^c = A_{m,p}^c k_{aA}^{st} P_k; \quad (10.59)$$

где  $P_k$  – потребление растительного корма молочными и мясными коровами, кг/сут;  $k_{ac}^{st}$ , сут/л, и  $k_{aA}^{st}$ , сут/кг – коэффициенты перехода корм – молоко и корм – мясо. Их значения для  $^3\text{H}$  и  $^{14}\text{C}$  табулированы и приводятся в соответствующей литературе [70].

## 10.9. Коллективная доза при прямом пути облучения и по пищевым цепочкам

Оценка коллективной дозы обычно необходима при выборе места строительства атомных предприятий, масштаба сосредоточения ядерных блоков на одной промплощадке и в ряде других случаев. В настоящее время коллективную дозу  $S$ , чел·Зв, принято рассчитывать по формулам:

$$S = \sum_j N_j H_j \quad \text{или} \quad S = \int_H N(H) H dH, \quad (10.60)$$

где  $N_j$  – число лиц, получивших индивидуальную дозу  $H_j$ ;  $N(H)$  – функция распределения населения по получаемым индивидуальным дозам  $H$ .

При расчетах коллективной дозы различают прямой и непрямой пути облучения. При прямом пути облучения коллективная доза зависит только от территориального распределения населения, а в случае непрямого пути – от размещения на местности сельскохозяйственных угодий и источников воды. В практических расчетах обычно предполагают однородное распределение населения и сельскохозяйственных угодий по территории. Типичные случаи неоднородностей, связанные, например, с повышенной плотностью населения в отдельных городах или регионах требуют специального рассмотрения.

Основной вклад в коллективную дозу при прямом пути облучения от смешанного газоаэрозольного выброса дают долгоживущие радионуклиды, даже если их доля в общем выбросе невелика. При расчете коллективной дозы влиянием конечной геометрии излучающего облака обычно пренебрегается, а оценку доз проводят по формулам, полученным для случая полубесконечного пространства. Предполагая, что население распределено по всей территории равномерно, коллективную дозу в общем случае можно оценить по формуле

$$S = A_V B_{\alpha\gamma} \cdot \rho_N T,$$

где  $\rho_N$  – средняя плотность населения;  $T$  – время облучения;  $B_{\alpha\gamma}$  – дозовый коэффициент;  $A_V$  – объемная активность. При поступлении радионуклидов в организм человека по пищевым цепочкам коллективная доза  $S$  рассчитывается по формуле

$$S = \sum_j B_{ig} N_j I_j = B_{ig} I_s, \quad (10.61)$$

где  $B_{ig}$  – дозовый коэффициент внутреннего облучения при заглатывании радионуклидов с водой или с пищей, Зв/Бк;  $I_s = \sum_j N_j I_j$  – кумулятивное поступление нуклидов в организмы всех людей вместе с загрязненной пищей. В простейшем случае кумулятивное поступление  $I_s$ , можно заменить суммарным содержанием нуклидов в загрязненных продуктах питания. Более строгое рассмотрение предполагает учет потерь радиоактивности при хранении вследствие распада, в процессе кулинарной и другой обработки.

## 10.10. Основные подходы к моделированию радиационных аварий и оценке доз облучения

Анализ возможных отклонений от нормальных эксплуатационных режимов на объектах с ядерным топливным циклом имеет огромное значение для безопасности персонала и населения. Обычно ава-

ричная ситуация характеризуется малой вероятностью возникновения, однако процессы, сопровождающие ее, весьма интенсивны. В связи с этим изучение аварийных ситуаций имеет свою специфику. Неполная информация об аварийных процессах и их воздействии на человека и окружающую среду, а также сложность и большая стоимость проведения экспериментов на физических моделях и натуральных объектах приводит к тому, что математическое моделирование и расчеты являются основным эффективным инструментом для оценки развития и последствий различных радиационных аварий.

Обратимся к рассмотрению мгновенного аварийного выброса, который имеет место в случае взрыва реактора на АЭС. Обычно взрывом принято называть процесс быстрого выделения энергии, вызванный внезапным изменением состояния вещества или его параметров. Взрыв на АЭС порождает целый комплекс воздействий, которые представляют большую опасность для производства, населения и окружающей среды. Рассматриваемый случай имеет много общего с наземным ядерным взрывом, при котором формируется раскаленное огненное ядро, служащее источником светового излучения и ударной волны. В момент взрыва температура огненного ядра составляет несколько миллионов градусов. Однако уже через  $10 \div 15$  с после взрыва его температура понижается до  $2000 \div 3000^\circ\text{C}$  и шаровидное ядро перестает светиться. К моменту прекращения свечения давление газов внутри облака, выброшенного в результате взрыва, практически не отличается от давления в окружающем воздухе.

Поскольку температура газа внутри облака  $T$  значительно выше температуры окружающего воздуха  $T_w$ , а давление практически постоянно, то плотность газов  $\rho$  существенно меньше плотности атмосферного воздуха  $\rho_w$  ( $\rho < \rho_w$ ). Благодаря этому, по закону Архимеда на облако начинает действовать сила плавучести

$$F = g\Delta\rho = g(\rho_w - \rho).$$

Однако сила плавучести, а вместе с ней и ускорение со временем уменьшаются, что обусловлено уменьшением разности температур  $(T - T_w)$ . Понижение температуры в поднимающемся облаке обусловлено тремя механизмами:

- 1) адиабатическим расширением;
- 2) перемешиванием или вовлечением более холодного атмосферного воздуха;
- 3) потерей тепла вследствие излучения.

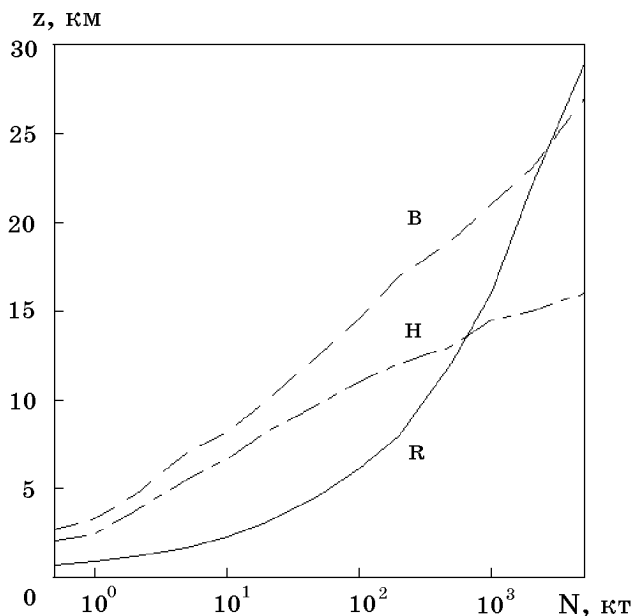


Рис. 10.2. Зависимость радиуса облака ( $R$ ) и высоты его верхней ( $B$ ) и нижней ( $H$ ) видимой границы от мощности взрыва  $N$

Выполненные оценки охлаждения облака под влиянием адиабатического расширения и вследствие излучения показывают, что в процентном отношении эти два механизма не главные. Главным же фактором, под влиянием которого происходит охлаждение, является турбулентное вовлечение окружающего воздуха в поднимающееся радиоактивное облако.

Во время подъема облако принимает грибовидную форму (см. рис. 6.12). Верхняя часть гриба сначала представляет собой интенсивный тороидальный вихрь, вращение которого постепенно замедляется по мере подъема. К концу своего подъема облако достаточно однородно по всему объему и имеет форму эллипсоида вращения. Подъем облака происходит до тех пор, пока его температура не сравняется с температурой окружающей атмосферы. Физически очевидно, что охлаждение облака будет происходить тем медленней, чем больше его первоначальный размер, т. е. чем мощнее взрыв. Поэтому максимальная высота подъема радиоактивного облака и его размер на этой высоте увеличиваются с ростом мощности ядерного взрыва или аварии.

На рис. 10.2 приведены значения высоты верхней ( $B$ ) и ниж-

ней ( $H$ ) границы облака, а также его радиус  $R$  в горизонтальной плоскости в зависимости от мощности взрыва при некоторых средних условиях состояния атмосферы. График построен на основании данных, приведенных в [52]. Из рисунка видно, что максимальная высота подъема облака изменяется от 2.7 до 27 км, а радиус – от 0.7 до 29 км при изменении мощности взрыва (в тротиловом эквиваленте) от 500 т до 5 мтг. Кроме мощности взрыва, на высоту подъема облака оказывают влияние метеорологические факторы и прежде всего вертикальное распределение температуры и скорости ветра, а также вертикальная скорость  $w_g$  гравитационного осаждения радиоактивных частиц и ветровой перенос облака по горизонтали.

Установившийся подъем рассматриваемого облака будет происходить при условии, что подъемная сила Архимеда уравновешивается силой сопротивления.

Если в атмосфере на высоте  $h_1$  имеется инверсионный слой, то для проникновения облака сквозь слой инверсии необходимо, чтобы вертикальная скорость подъема превосходила некоторую критическую величину  $w_{кр}$ , зависящую от градиента температуры. Если же  $w < w_{кр}$ , то нагретая масса воздуха с примесью останется ниже инверсионного слоя, и за высоту подъема облака можно принять величину  $h_1$ .

Рассмотрим простейший случай, когда облако состоит из частиц одинакового размера и скорость ветра постоянна на всех высотах как по величине, так и по направлению. В этом идеализированном случае траекториями элементарных объемов примеси будут служить прямые линии, наклон которых к оси  $x$ , направленной вдоль ветра, равен отношению  $w_g/W$  ( $W$  – скорость ветра). Расстояние по горизонтали  $x_1$ , на которое сместится частица, расположенная в начальный момент на высоте  $z_{п}$ , определится из соотношения

$$\frac{x_1}{W} = \frac{z_{п}}{w_g} = t_1. \quad (10.62)$$

Откуда  $x_1 = z_{п}W/w_g$ , где  $t_1$  – время падения частицы с высоты  $z_{п}$ . В этом случае след облака на земной поверхности по форме представляет собой как бы вертикальную проекцию факела и его длина во столько раз больше высоты облака, во сколько раз  $W$  больше  $w_g$  (см. рис. 9.2).

В реальных условиях радиоактивное облако состоит из частиц различного размера, атмосфера термически стратифицирована, а структура ветрового потока неоднородна по высоте и направлению. Поэтому модель прогнозирования радиационной обстановки в районе ядерного взрыва или регионе расположения АЭС должна учитывать

все эти факторы более точно.

В случае кратковременных выбросов след от выброшенного облака на поверхности земли имеет конечную длину. В этом случае обычно направление ветра, его скорость и устойчивость атмосферы остаются неизменными за время движения облака. Поэтому его траектория прямолинейна, и протяженность следа приблизительно равна  $L = WT$ , где  $W$  – скорость ветра,  $T$  – время движения облака.

Для вычисления дозы в этом случае необходимо знать значения концентрации в данной точке пространства, проинтегрированной по времени.

В случае продолжительных выбросов (несколько часов, дней и т. д.) метеорологические условия и величина выброса могут изменяться во времени. Когда эти изменения находятся внутри временного интервала, по которому проводилось интегрирование, то расчет можно разделить на несколько периодов, в каждом из которых метеоусловия можно считать постоянными. Для каждого из этих периодов концентрация и плотность загрязнения почвы могут быть определены по формулам (9.16) и (9.17) при постоянных метеоусловиях, а общий конечный результат получается путем суперпозиции расчетных значений для всего периода осреднения.

Для оценки последствий радиационной аварии необходимо рассматривать сценарии протекания аварийных процессов. Эта задача является очень сложной и обычно характеризуется неполнотой исходной информации. Поэтому прогноз последствий радиационных аварий может быть сделан только с определенной степенью достоверности на основе имеющейся информации и экспертных оценок неизвестных параметров.

При разработке технико-экономического обоснования проектов строительства атомных электростанций необходимо дать оценку радиационного состояния региона не только в условиях нормальной эксплуатации АС или другого объекта, но и для случая проектных и запроектных радиационных аварий. Прогноз радиационной обстановки осуществляется на основе математических моделей атмосферной диффузии радиоактивных выбросов и принятого сценария аварии.

**Проектной** называется авария, этапы которой в основном предусмотрены технической документацией проекта, и поэтому оперативно могут быть приняты меры, обеспечивающие безопасность как самой станции, так и окружающих населения и природной среды. Различают еще максимальную проектную аварию (МПА) – это аналогичная проектная авария, но с тяжелыми последствиями.

Для аварий этого класса проект станции должен иметь систему



Табл. 10.11. Пределы ожидаемых эквивалентных доз  $H^c$  в случае максимальной и запроектной аварии [132]

Орган или ткань	$H^c$ , Зв(бэр)		
	Максимальная авария	Запроектная авария	
		Уровень А	Уровень Б
Щитовидная железа детей	0.30 (30)	0.25 (25)	2.5 (250)
Другие органы	0.10 (10)	—	—
Все тело	0.10 (10)	0.25 (25)	0.75 (75)

локализации радиоактивных выбросов с тем, чтобы обеспечить дозу облучения населения, не превышающую уровней, приведенных в табл. 10.11. Заметим, что эти уровни лишь в два раза превосходят предельно допустимые дозы, установленные для персонала станции за 1 год нормальной эксплуатации АЭС.

**Запроектной** называется авария с тяжелыми последствиями, которая сопровождается последовательностью событий, не предусмотренных сценарием проектных аварий. Ее причиной могут быть ошибочные действия персонала или другие непредвиденные маловероятные причины. Уменьшение ее последствий достигается реализацией ряда мероприятий по защите от облучения персонала и населения. В случае запроектных аварий в зависимости от ожидаемых эквивалентных доз вводятся критерии для принятия соответствующих решений (см. табл. 10.11). Они представлены двумя уровнями, охватывающими диапазоны аварийных ожидаемых доз, состоящих из трех областей, различающихся стратегией принятия решений. Так, если облучение не превосходит уровень А, то нет необходимости принимать экстренные меры, связанные с временным нарушением нормальной жизнедеятельности населения. Если облучение превосходит уровень А, но не достигает уровня Б, то рекомендуется принимать решения с учетом конкретной обстановки и местных условий. Если облучение (доза) достигает или превосходит уровень Б, рекомендуется принимать экстренные меры, обеспечивающие радиационную защиту населения. К числу таких мер относятся: немедленное укрытие населения в помещения; ограничение пребывания населения на открытой местности; организованная эвакуация; йодная профилактика; ограничение или исключение употребления загрязненных продуктов питания и т. д. Заметим, что приведенные в табл. 10.11 уровни доз относятся к ожидаемым дозам за всю жизнь человека.

При крупных радиационных авариях, типа Чернобыльской, ис-

ключительное значение имеет стратегия оценки радиационной обстановки и принятия решений в условиях острого дефицита времени. В международных и национальных организациях ведутся работы по выработке рекомендаций к процедуре принятия решений в условиях крупных аварий. В работе [70] приведен один из возможных вариантов схемы принятия решений при крупной радиационной аварии. В общем случае при аварии условно могут быть выделены три ее стадии, отличающиеся целями и стратегией принятия решений.

**Первая стадия** начинается с момента начала аварии и продолжается до момента развертывания аварийной системы контроля загрязнения атмосферного воздуха и начала разведки радиационной обстановки на местности. Это наиболее ответственная стадия, во время которой в условиях дефицита времени и неполной информации оценивается вероятный масштаб аварии и приводится в действие аварийный план.

**Вторая стадия** продолжается до момента окончания аварийного выброса и формирования радиоактивной обстановки на местности, включая определение направления и динамики движения радиоактивного облака в глобальном масштабе. На этой стадии осуществляется оперативное слежение за радиационной ситуацией как инструментальными средствами, так и расчетными методами. Устанавливаются контакты с соответствующими международными центрами. Параллельно устраняются имеющиеся неопределенности и противоречия в различных оценках событий и ситуаций, составляются прогнозы радиационной обстановки и возможных последствий аварии. Производится коррекция проводимых защитных мероприятий.

**Третья стадия** предусматривает долговременные меры, которые зависят от масштаба аварии. Они отличаются большой продолжительностью и разнообразием мероприятий по обеспечению радиационной безопасности. Третья стадия продолжается до момента снятия всех ограничений, связанных с радиоактивным загрязнением местности. На этой стадии окончательно устанавливаются все детали обстановки.

Более конкретный анализ указанных стадий аварии практически здесь нецелесообразен, так как каждый такой случай по своему уникален и специфичен. Однако некоторые аспекты оценки и прогнозирования радиационной обстановки все же можно рассмотреть.

Наибольшие трудности при принятии чрезвычайных решений возникают на первых двух этапах аварии. Для принятия адекватных защитных мер необходимо знание ожидаемых доз облучения населения в зоне потенциального загрязнения. Площадь загрязнения

зависит от масштаба аварии и метеорологических условий. Задача оценки доз на первых этапах развития аварии является практически очень сложной. Для этого необходимо использовать математическое моделирование и результаты многочисленных измерений. Последние требуют больших затрат времени, связанных не только с измерениями, но и с предварительной обработкой проб. Значительно ускоряет прогноз радиационной обстановки аэрогаммасъемка.

В практических условиях предпочтительно использование экспрессных методов непосредственной оценки ожидаемых доз облучения, пусть и обладающих невысокой точностью, но дающих выигрыш во времени. К их числу относится способ инструментальной оценки доз на основе измерения таких характеристик, как мощность экспозиционной дозы, поток заряженных частиц и фотонов на местности, поверхностная активность почвы, удельная активность травы, листьев и т. п., объемная активность воздуха и воды.

Как правило, все дозы и любые измерения ионизирующего излучения на местности в полевых условиях пропорциональны поверхностному загрязнению местности  $A_s$ , Бк/м<sup>2</sup> (Ки/км<sup>2</sup>). Поэтому при расчете доз облучения населения по различным путям воздействия целесообразно базироваться на этой характеристике.

Пусть  $H^c$  – интересующая нас доза по какому-либо пути облучения, а  $C(t)$  – некоторая обобщенная дозиметрическая характеристика, измеряемая на местности через время  $t$  после выпадения радионуклидов. Это может быть мощность экспозиционной дозы на открытой местности, плотность потока заряженных частиц от поверхности почвы, суммарная удельная активность проб листьев, травы, продуктов питания и т. д. В качестве таковых могут рассматриваться показания любого, реагирующего на излучение прибора, типа различных счетчиков, дозиметров, индикаторов. Для них будут иметь место общие соотношения пропорциональности

$$H^c \sim A_s \quad \text{и} \quad C(t) \sim A_s. \quad (10.63)$$

Откуда, деля одно на другое, имеем:

$$H^c/C(t) = \text{const} \quad \text{или} \quad H^c = \text{const} \cdot C(t), \quad (10.64)$$

т.е. оказывается, что искомые дозы облучения пропорциональны результатам измерений на местности. Соотношение вида (10.64), найденное для условий конкретной аварии, дает возможность оперативно получить оценки ожидаемых доз облучения по результатам несложных измерений, проводимых непосредственно в полевых условиях. Однако установление константы в зависимости (10.64) является

непростой задачей. Рассмотрим этот вопрос поподробнее. В общем виде для смеси радионуклидов можно написать следующее выражение:

$$H^c = A_s \sum_i B_{sH,i} \cdot \eta_i, \quad (10.65)$$

где  $A_s$  – суммарная поверхностная активность смеси в момент выпадения, Бк/м<sup>2</sup>;  $\eta_i$  – доля  $i$ -го нуклида в полной активности смеси, %;  $B_{sH,i}$  – обобщенный дозовый коэффициент, отнесенный к единичной поверхностной активности  $i$ -го нуклида смеси, Зв·м<sup>2</sup>/Бк. Выражение для измеряемой реперной характеристики, на основе которой предполагается оценивать ожидаемые дозы облучения, в обобщенном виде можно записать в форме

$$C(t) = A_s \sum_i F_{c,i}(t) \eta_i, \quad (10.66)$$

где  $C(t)$  – рассматриваемая обобщенная дозиметрическая характеристика с размерностью мР/ч, имп/мин, част/(м<sup>2</sup>·мин), Бк/кг и т. п. через время  $t$  после выпадения активности;  $F_{c,i}(t)$  – функционал, связывающий единицу поверхностной активности  $i$ -го нуклида в момент выпадения с рассматриваемой характеристикой. Разделив выражение (10.65) на (10.66), получим искомый коэффициент пропорциональности ( $P_c$ ), отнесенный к единице какой-либо допустимой для простых измерений характеристике

$$P_c = \sum_i B_{sH,i} \cdot \eta_i / \sum_i F_{c,i}(t) \eta_i. \quad (10.67)$$

Зная этот коэффициент, ожидаемые дозы облучения вычисляют путем умножения его значения на результат измерения характеристики  $C(t)$  через время  $t$  после выпадения, т. е.

$$H_c = C(t) P_c(t). \quad (10.68)$$

Это выражение и может служить основой экспрессной оценки ожидаемых доз по результатам полевых измерений на первых этапах аварии. Такой подход, основанный на измерении мощности экспозиционной дозы  $\dot{X}$ , Р/ч, на местности использован при оценке доз в случае аварии на Чернобыльской АЭС [70].

## 10.11. Некоторые аспекты аварии на Чернобыльской АЭС

Авария на 4-м блоке Чернобыльской АЭС (реактор РБМК-1000), произошедшая в г. Припять (Чернобыльский район, Украина) 26

апреля 1986 года, относится к числу наиболее тяжелых по своим последствиям техногенным катастрофам за всю историю человечества. При этом произошло разрушение реакторной установки и части здания, где она размещалась. В результате аварии значительное количество радиоактивных веществ, накопившихся в реакторе за время его работы, выброшено в атмосферу. Радиоактивные продукты из аварийного реактора поступили в атмосферу в два этапа: залповый выброс, образовавшийся в результате разрушения реактора, и последующий непрерывный выброс, в котором высокая температура поддерживалась горением графита и радиоактивным распадом осколочных продуктов. Аварийный выброс и горение реактора продолжались почти 11 суток. Высота выброса газоаэрозольных радиоактивных веществ 27 апреля превышала 1200 м на расстоянии 30 км от атомной станции. В последующие дни направление ветра менялось, а эта высота уменьшалась до 200 ÷ 400 м, при этом уровень радиации на высоте 200 м и расстоянии 5 ÷ 10 км от места аварии 27 апреля достигал 1000, а 28 апреля – 500 мР/ч [52].

Сложные метеорологические условия, имевшие место во время аварии (26 апреля по 6 мая 1986 года), предопределили характер и основные направления переноса радиоактивных выбросов ветровыми потоками.

В первые дни после аварии район ЧАЭС находился в малоградиентном барическом поле. Вследствие этого направление и скорость ветра в нижней тропосфере резко изменялись во времени. Выброшенные в момент аварии радиоактивные продукты распространились в западном от АЭС направлении, создав узкую вытянутую полосу повышенного радиоактивного загрязнения местности. 27 апреля радиоактивные вещества распространялись в виде струи сначала в юго-западном, а затем в северо-западном направлении. 28–29 апреля преобладал их перенос на северо-восток, а 30 апреля – на юго-восток и юг от АЭС. Выброшенные из реактора радиоактивные вещества в твердой и газоаэрозольной форме оседали на поверхность земли и в первые 4 ÷ 5 суток определили основное загрязнение ближней зоны ЧАЭС.

В первые 1 ÷ 2 месяца после аварии основными дозообразующими радионуклидами по внешнему  $\gamma$ -облучению были смеси изотопов  $Kr$ ,  $Xe$ , и  $I$ , находящихся в радиоактивном облаке выброса, и смеси продуктов деления, осевших на почву. Внутреннее облучение в этот период в основном определялось  $^{131}I$ , поступающим в организм как с вдыхаемым воздухом, так и через некоторые продукты питания. В последующий период основную роль во внешнем облучении играли смеси средне- и долгоживущих радионуклидов, выпавших на

почву:  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{137\text{m}}\text{Ba}$ ,  $^{134}\text{Cs}$ ,  $^{90}\text{Sr}$ . Спустя 1.5 года, они практически определяли радиоактивную обстановку.

В результате аварии в окружающую среду за пределы промплощадки ЧАЭС по разным оценкам было выброшено  $3 \pm 0.5$  % активности радиоизотопов, наработанных в реакторе, что составило примерно  $50 \div 90$  миллионов Кюри [44]. При этом значительная часть территорий Украины, Белоруссии и России оказались подвергнуты радиоактивному загрязнению. Последствия аварии обнаружены и в странах Западной Европы, что вызвало сложное и негативное отношение мировой общественности к атомной энергетике в целом.

После аварии в районе ЧАЭС была создана специальная зона отчуждения, где по настоящее время проводится комплекс научно-исследовательских работ, связанных в основном с минимизацией последствий ядерной катастрофы и изучением влияния радиации на биосферу и человека.

Как отмечалось выше, радиоактивное облако и струя в зависимости от интенсивности выбросов и метеоусловий распространялись в разных направлениях, оставляя на местности так называемые радиоактивные следы. Эти следы простираются на большие расстояния, обнаруживаясь в виде радиоактивных пятен на отдельных участках поверхности земли с разной степенью загрязнения. Измерения плотности загрязнения почвы в направлении основных радиоактивных следов за 1994 г. приведены в табл. 10.12 [44].

По мере распада изотопов их суммарная радиоактивность со временем уменьшалась. К 1995 году суммарная активность (без объекта “Укрытие”, внутри которого осталось  $96 \div 97$  % активности), по оценке специалистов составляла примерно  $1.5 \div 2$  миллиона кюри. При этом активность определяется основными радиологически значимыми нуклидами – цезием-137, стронцием-90 и изотопами плутония – 238, 239, 240. Многолетние наблюдения за прошедшие после аварии годы показали [44], что содержание водорастворимых и обменных форм  $^{90}\text{Sr}$  и  $^{137}\text{Cs}$  претерпевали значительное изменение, переходя из частиц топлива в водную и обменную (подвижную) формы. Наибольшее содержание подвижных форм  $^{137}\text{Cs}$  наблюдалось через 3 года после аварии, а затем пошло их постепенное снижение. Максимальное содержание подвижного  $^{90}\text{Sr}$  наблюдалось через  $6 \div 8$  лет после аварии.

Плотность загрязнения почвы радионуклидами ( $\text{Ки}/\text{км}^2$ ) в районе населенных пунктов Чернобыльской зоны, согласно [44], в 1995 году характеризовалась данными, представленными в табл. 10.13, а мощность дозы гамма-излучения ( $\text{мР}/\text{ч}$ ) по отдельным постам представлена в табл. 10.14. Контроль за изменением радиационной об-

Табл. 10.12. Плотность загрязнения почвы в направлении основных радиоактивных следов в зоне ЧАЭС, 1994 г., Ки/км<sup>2</sup> [44]

Место обследования (Радиоактивные следы)	<sup>137</sup> Cs	<sup>90</sup> Sr	<sup>238,239,240</sup> Pu	<sup>241</sup> Am
Северо-восточный				
3.3 км – 57 град	238	150	4.4	2.4
12.8 км – 23 град	330	35	1.1	0.7
Северо-западный				
6.6 км – 316 град	138	109	2.9	1.5
13 км – 324 град	80	52	1.4	0.78
Западный				
7.3 км – 267 град	730	280	7.4	3.6
27.5 км – 272 град	117	42	1.0	0.59
Юго-западный				
8.1 км – 256 град	137	78	2.0	1.1
28 км – 255 град	28	4.1	0.15	0.08
Южный				
4.7 км – 189 град	77	39	1.2	0.7
28.5 км – 187 град	4.1	2.6	0.073	0.04

становки осуществляется с помощью системы АСКРО [44].

В зоне отчуждения ЧАЭС также контролировалось радиоактивное загрязнение воздуха. Содержание характерных радиоактивных аэрозолей в приземном слое воздуха для трех населенных пунктов (Чернобыль, Зеленый мыс, Припять) и двух характерных точек вблизи промышленной зоны АЭС (береговая насосная станция пруда-охладителя БНС и распределительное устройство РУ) представлены в табл. 10.15. Там же приведены допустимые концентрации для каждого радионуклида для населения группы Б (ДКБ). Результаты измерений 1995 года даны в сравнении с предыдущим 1994 годом. Из таблицы видно, что к этому времени превышения ДКБ радионуклидов в воздухе не наблюдается.

Особенно интенсивно дезактивизационные работы и измерения велись в радиусе 5 км около взорвавшегося блока ЧАЭС. Данные интервальных оценок за 1992 – 1994 гг. загрязнения грунтов в 5-километровой реперной зоне приведены в табл. 10.16. Они представляют значительный интерес не только сами по себе, но и могут служить хорошей базой для верификаций различных теоретических моделей атмосферной диффузии. При проведении измерений радио-

Табл. 10.13. Плотность загрязнения почвы радионуклидами в населенных пунктах ближней зоны ЧАЭС в 1995 году, Ки/км<sup>2</sup> [44]

Населенный пункт	<sup>137</sup> Cs	<sup>90</sup> Sr
Опачичи	5.8±1.6	3.6±0.7
Стечанка	1.3±0.3	0.6±0.2
Куповатое	2.9±0.6	1.2±0.4
Ильинцы	1.8±0.3	0.9±0.3
Оташев	9.7±3.2	5.1±1.7
Копачи	35±12	21±8
Зеленый Мыс	1.1±0.2	0.14±0.03
Чистогаловка	250±80	135±70
Буряковка	130±25	75±18
Залесье	11±2.2	5.6±1.4
Дитятки	3.9±0.6	1.4±0.5
Р. Ильинецкая	3.5±0.7	1.9±0.6
Ст. Шепеличи	12.9±3.2	7.8±2.3
Корогод	5.5±1.1	3.1±1.3

активного загрязнения почвы в зоне отчуждения, опубликованных в [44], подчеркивается значительный разброс фиксируемых данных. Даже пробы грунта, отобранные в нескольких метрах одна от другой, дают значения активности, которые иногда на порядок величины отличаются друг от друга. Причина этого явления объясняется особенностью Чернобыльских выпадений, связанных с выбросом частиц ядерного топлива, а также тем, что поверхностный слой почвы часто оказывался нарушенным в результате дезактивационных работ и других воздействий человека и природы.

С целью обобщения опыта запроектных аварий следует отметить следующие практические решения по радиационной безопасности, которые были приняты в первые дни после Чернобыльской аварии руководством Госкомгидромета СССР [85].

1. Районирование территории по критерию измеренной мощности экспозиционной дозы  $\dot{X}$ , мР/ч.
  - при  $\dot{X} > 20$  мР/ч – зона отчуждения;
  - при  $\dot{X} = 5 \div 20$  мР/ч – зона временного отселения;
  - при  $\dot{X} = 2 \div 5$  мР/ч – зона радиационного контроля (временный вывоз детей).



Табл. 10.14. Мощность дозы гамма-излучения в 1994 и 1995 гг. по данным постов АСКРО, мР/ч [44]

Месторасположение пункта измерения	1995 г.	1994 г.
АБК-1 (ЧАЭС)	0.34±0.07	0.35±0.07
Припять	0.07±0.02	0.07±0.02
Ст. Шепеличи	0.05±0.01	0.05±0.01
Чистоголовка	0.1±0.02	0.1±0.02
Копачи	0.1±0.02	0.1±0.02
Кривая гора	0.05±0.02	0.06±0.02
Староселье	0.03±0.01	0.03±0.01
Машево	0.09±0.02	0.09±0.02
Усов	0.24±0.07	0.23±0.07
Буряковка	0.35±0.08	0.34±0.08
Красное	0.09±0.02	0.08±0.02
Беневка	0.03±0.01	0.03±0.01
Зимовище	0.09±0.02	0.09±0.02
Чернобыль	0.05±0.02	0.04±0.02
Чернобыль-2	0.06±0.02	0.06±0.02
Дитятки	0.02±0.01	0.02±0.01
Стечанка	0.02±0.01	0.02±0.01
Корогод	0.03±0.01	0.03±0.01
Иловница	0.03±0.01	0.03±0.01
Зеленый Мыс	0.02±0.01	0.02±0.01
Славутич	0.02±0.01	0.02±0.01

2. Районирование территории по критерию плотности загрязненности почвы долгоживущими радионуклидами,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{90}\text{Sr}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ .
3. Установление ВДУ на продукты питания. Например, допустимая концентрация  $^{137}\text{Cs}$  в молоке принята равной 370 Бк/л ( $1.0 \cdot 10^{-8}$  Ки/л), в мясе 1850 Бк/кг ( $5 \cdot 10^{-8}$  Ки/кг).

## 10.12. Способ оценки предельно допустимых радиоактивных выбросов в атмосферу и их нормирование

Введение представления о предельно допустимых выбросах (ПДВ) позволяет осуществить контроль и управление технологией

Табл. 10.15. Содержание радиоактивных аэрозолей в приземном слое воздуха, Ки/л [44]

Пункт контроля	Гра- дация зна- чений	$^{137}Cs \cdot 10^{18}$ (ДК <sub>Б</sub> = $4.9 \times 10^{-13}$ )		$^{90}Sr \cdot 10^{19}$ (ДК <sub>Б</sub> = $4 \times 10^{-14}$ )		$^{238-240}Pu \cdot 10^{20}$ (ДК <sub>Б</sub> = $3 \times 10^{-17}$ )	
		1995	1994	1995	1994	1995	1994
Черно- быль	макс.	4.4	5.8	19	130	5.4	27
	мин.	0.26	0.18	0.88	0.61	0.61	0.19
	средн.	1.9	2.1	9.9	32	2.7	5.0
Зеле- ный Мыс	макс.	1.4	3.6	13		5.6	
	мин.	0.078	0.059	0.14	0.37	0.043	0.15
	средн.	0.51	0.73	1.4		0.5	
При- пять	макс.	49.0	82	340	360	90	
	мин.	0.44	0.64	0.68	2.9	0.108	14
	средн.	11.2	14	66.9	14	19.5	
БНС	макс.	86	130	97	180	9.7	
	мин.	5.3	2.2	5.8	5.4	0.83	24
	средн.	23	40	32.2	84	5.4	
РУ- 750	макс.	520	490	3400	1300	720	
	мин.	15	17	40	210	11.8	220
	средн.	93.4	220	498	730	115	

производства и создает предпосылки для организации промышленного производства, экологически безопасного для окружающей среды и населения. Введение ПДВ для АЭС позволяет подвергнуть автоматическому контролю количество радиоактивных выбросов и способствует оперативному принятию соответствующих решений по их нормированию [74].

Последняя редакция Санитарных правил проектирования и эксплуатации атомных станций СП АС-88 требует рассчитать для каждой АЭС предельно допустимый выброс (ПДВ<sup>АЭС</sup>) радионуклидов в атмосферу. Расчет должен быть сделан с учетом всех возможных путей воздействия радионуклидов выброса на человека – внешнего облучения от облака выбросов, внешнего  $\beta$ -облучения от загрязненного воздуха, фотонного облучения от осевших на почву радионуклидов, внутреннего облучения от вдыхания загрязненного воздуха, внутреннего облучения при заглатывании радионуклидов с водой и пищей. При этом следует учесть вклад в ПДВ<sup>АЭС</sup> различных радионуклидов по рекомендуемым квотам.

Табл. 10.16. Интервальные оценки за 1992 – 1994 гг. плотности загрязнения почвы в 5-километровой реперной зоне ЧАЭС, Ки/км<sup>2</sup> [44]

Место отбора проб	<sup>137</sup> Cs	<sup>90</sup> Sr	<sup>238,239,240</sup> Pu
1 км – 0 град	20 ÷ 310	12 ÷ 59	0.2 ÷ 3.4
1 км – 90 град	27 ÷ 60	11 ÷ 40	0.36 ÷ 2.2
1 км – 135 град	96 ÷ 130	40 ÷ 470	0.9 ÷ 14.2
1 км – 180 град	230 ÷ 390	105 ÷ 120	2.1 ÷ 4.0
1 км – 225 град	33 ÷ 58	23 ÷ 300	0.7 ÷ 6.7
1 км – 270 град	61 ÷ 100	48 ÷ 180	0.8 ÷ 4.0
1 км – 315 град	3.3 ÷ 26	1.3 ÷ 9.4	0.38 ÷ 0.5
3 км – 0 град	23 ÷ 450	30 ÷ 440	0.68 ÷ 9.9
3 км – 45 град	200 ÷ 600	100 ÷ 240	2.25 ÷ 8.0
3 км – 135 град	150 ÷ 200	17 ÷ 160	0.49 ÷ 3.4
3 км – 225 град	4.5 ÷ 180	4.7 ÷ 70	0.2 ÷ 2.8
3 км – 270 град	2.7 ÷ 85	1.8 ÷ 48	0.04 ÷ 2.4
3 км – 315 град	22 ÷ 60	13 ÷ 21	0.3 ÷ 1.0
5 км – 0 град	110 ÷ 180	63 ÷ 97	1.45 ÷ 3.1
5 км – 45 град	16 ÷ 66	10 ÷ 60	0.5 ÷ 1.3
5 км – 90 град	1.5 ÷ 78	3.2 ÷ 21	0.03 ÷ 0.6
5 км – 135 град	165 ÷ 240	50 ÷ 150	1.6 ÷ 3.3
5 км – 225 град	15 ÷ 23	8 ÷ 14	0.22 ÷ 0.47
5 км – 270 град	3.5 ÷ 34	9.6 ÷ 63	0.22 ÷ 0.51
5 км – 315 град	13 ÷ 120	1.6 ÷ 48	0.03 ÷ 1.0

В соответствии с полученной выше аналитической зависимостью между концентрацией, дозой и мощностью выброса процедура расчета ПДВ<sup>АЭС</sup> фактически представляет собой обратную задачу по отношению к задаче расчета дозовой нагрузки на человека. Если дозовая нагрузка определяется по заданной известной мощности  $M$  выбросов АЭС, то ПДВ<sup>АЭС</sup> следует определять по заданному допустимому радиационному воздействию, т.е. по эквивалентной дозе  $H_0$ . Следовательно, в основу расчета ПДВ<sup>АЭС</sup> должен быть заложен принцип непревышения дозовых квот в следующем виде:

$$H_0 < D_{\max}, \quad (10.69)$$

где  $D_{\max}$  – дозовая квота облучения населения;  $H_0$  – эффективная индивидуальная доза облучения для критической группы.

Допуская, что годовая эквивалентная доза  $H_0$  облучения критических органов человека является функцией среднегодовой концен-

трации активности в атмосферном воздухе на уровне одного метра от земли, расчет величины ПДВ<sup>АЭС</sup> может быть выполнен на основе математической зависимости между величиной мощности выброса  $M$  и эквивалентной дозой облучения человека  $H_0$ , т.е. с помощью соотношения

$$H_0 = MF(x, y), \quad (10.70)$$

где  $M$  – мощность годового выброса радиоактивности в атмосферу;  $H_0$  – годовая эффективная доза облучения человека, живущего и потребляющего продукты, выращенные в точке  $(x, y)$ ,  $F(x, y)$  – пока неизвестный среднегодовой метеорологический фактор рассеивания, связывающий мощность выброса с дозой.

Для простоты рассмотрим сначала случай одного источника, одного радионуклида, одного пути облучения. Тогда, полагая  $H_0 = D_{\max}$  и  $M = \text{ПДВ}^{\text{АЭС}}$ , из (10.70) получаем

$$D_{\max} = \text{ПДВ}^{\text{АЭС}} F(x^{\max}, y^{\max}), \quad (10.71)$$

где  $D_{\max}$  – дозовая квота облучения для данного источника;  $x^{\max}$ ,  $y^{\max}$  – координаты точки на местности, где реализуется максимум значения метеорологического фактора рассеивания  $F(x^{\max}, y^{\max})$ .

Теперь рассмотрим случай одного источника, одного нуклида и нескольких путей облучения  $j$ . В этом случае формула (10.71) примет вид

$$D_{\max} = \text{ПДВ}_1^{\text{АЭС}} \sum_j F_j(x_j^{\max}, y_j^{\max}). \quad (10.72)$$

При расчете доз, как обычно в подобных случаях, будем исходить из наиболее консервативного варианта, когда рассматривается человек, проживающий в самой неблагоприятной зоне и потребляющий самые загрязненные продукты. Этот подход позволяет получить верхнюю оценку наиболее опасной ситуации.

Рассмотрим далее один источник, несколько нуклидов и несколько путей облучения. Тогда для  $r$  нуклидов формула вида (10.72) запишется в форме

$$D_{\max} = \sum_r \text{ПДВ}_r^{\text{АЭС}} \sum_j F_{rj}(x_{rj}^{\max}, y_{rj}^{\max}), \quad (10.73)$$

где  $\text{ПДВ}_r^{\text{АЭС}}$  – предельно допустимый выброс для  $r$ -го нуклида. Обозначим через  $\text{ПДВ}_\Sigma^{\text{АЭС}}$  суммарный предельно допустимый выброс. Тогда вклад  $\varepsilon_r$  от  $r$ -го нуклида определится соотношением

$$\varepsilon_r = \text{ПДВ}_r^{\text{АЭС}} / \text{ПДВ}_\Sigma^{\text{АЭС}}. \quad (10.74)$$

Учитывая (10.74), из выражения (10.73) получаем следующую оценку для суммарного предельно допустимого выброса:

$$\text{ПДВ}_{\Sigma}^{\text{АЭС}} = \frac{D_{\max}}{\sum_r \varepsilon_r \sum_j F_{rj}(x_{rj}^{\max}, y_{rj}^{\max})}. \quad (10.75)$$

Аналогичные рассуждения можно продолжить и для случая нескольких источников. Таким образом, суммарный предельно допустимый выброс  $\text{ПДВ}_{\Sigma}^{\text{АЭС}}$  можно рассчитать по формуле (10.75), если известен метеорологический фактор рассеивания  $F_{rj}$  для  $r$ -го нуклида и  $j$ -го пути облучения.

Рассмотрим подробнее способ определения метеорологического фактора рассеивания  $F_{rj}(x_{rj}^{\max}, y_{rj}^{\max})$ . Напомним, что индекс  $j$  характеризует путь облучения. Выше были рассмотрены пять основных путей облучения ( $j = \overline{1, 5}$ ). В качестве примера рассмотрим первый из них, который связан с облучением от радиоактивного облака. При рассмотрении этого случая для эквивалентной дозы  $H_{\text{о}}$  от радиоактивного облака получена формула (10.15), которая с учетом (9.2) записывается в виде

$$H_{\text{о}} = MG_{\Sigma} B_{\alpha\gamma} t, \quad (10.76)$$

где функция рассеивания  $G_{\Sigma}$  определена выражением (9.13), при этом  $G_T$  с учетом поправки на радиоактивный распад и вымывание осадками имеет вид

$$G_T = \frac{0.2\tilde{C}_{m0}[1 + \exp(-2H^2/\sigma_0^2)]^{-1}}{\pi W_{\Sigma_y} \Sigma_z} \times \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\Sigma_y^2} - \frac{[-H + w_g(x - x_0)/W]^2}{2\Sigma_z^2} - (\lambda + \Lambda)t \right\}. \quad (10.77)$$

Сравнивая соотношения (10.76) и (10.70) в случае  $r$ -го радионуклида для среднегодового метеорологического фактора рассеивания  $F_{r1}$ , связанного с облучением от радиоактивного облака, имеем

$$F_{r1}(x, y) = G_{\Sigma} B_{\alpha\gamma} t. \quad (10.78)$$

Следовательно, для расчета  $\text{ПДВ}_1^{\text{АЭС}}$ , например для смеси ИРГ в соответствии с (10.75) имеем

$$\text{ПДВ}_1^{\text{АЭС}} = \frac{D_{\max}^1}{k_{\text{о}} \varepsilon_1 \sum_r F_{r1}(x_{r1}^{\max}, y_{r1}^{\max})} = \frac{D_{\max}^1}{k_{\text{о}} \varepsilon_1 G_{\Sigma} B_{\alpha\gamma} t}, \quad (10.79)$$

где  $D_{\max}^1$  – дозовая квота облучения от ИРГ, которая согласно [119] составляет  $((0.5 \div 0.6) D_{\max})$ ;  $k_0$  – коэффициент экранирования;  $\varepsilon_1$  – вклад в ПДВ $_{\Sigma}^{\text{АЭС}}$  от РИГ и от  $^{131}\text{I}$ . Нетрудно заметить, что требуемые для расчета ПДВ $_{\Sigma}^{\text{АЭС}}$  данные – те же самые, что и при расчете поля концентраций, которые подробно обсуждались при рассмотрении струйно-диффузионной модели.

Выполнив соответствующие расчеты по определению функции рассеивания  $G_{\Sigma}$ , получим карту-схему значений  $G_{\Sigma}$  в изолиниях с указанием координат  $x_{\max}$  и  $y_{\max}$ , в которых реализуется максимальное значение  $G_{\Sigma}$  при заданных параметрах выброса и метеорологических условиях. Пусть значение  $G_{\Sigma}(x_{\max}, y_{\max})$  равно  $10^{-8}$  с/м $^3$ . Тогда, принимая предел годовой дозы  $D_{\max} = 0.2$  мЗв, коэффициент экранирования  $k_0 = 0.4$ , дозовый коэффициент  $B_{a\gamma} = 10^{-13}$  (Зв/с)/(Бк/м $^3$ ), вклад от РИГ в ПДВ $_{\Sigma}^{\text{АЭС}}$   $\varepsilon_1 = 0.6 + 0.3 = 0.9$  и дозовую квоту  $D_{\max}^1 = 0.6 D_{\max}$  для ПДВ $_1^{\text{АЭС}}$  от смеси газов, находим

$$\begin{aligned} \text{ПДВ}_1^{\text{АЭС}} &= \frac{0.2 \text{ мЗв} \cdot 0.6}{0.4 \cdot 0.9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{с}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-13} \frac{\text{Зв} \cdot \text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Бк}} \cdot 1 \text{ год}} \approx \\ &\approx 3.3 \cdot 10^{17} \frac{\text{Бк}}{\text{год}} \approx 0.9 \cdot 10^7 \frac{\text{Ки}}{\text{год}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй путь облучения, обусловленный внешним  $\beta$ -излучением. Выше показано, что эквивалентная доза  $H_{\beta}$  от  $\beta$ -частиц загрязненного воздуха на незащищенную одеждой биологическую ткань рассчитывается по аналогичной (10.76) формуле

$$H_{\beta} = A_V B_{\alpha\beta} t = M G_{\Sigma} B_{\alpha\beta} t, \quad (10.80)$$

где  $A_V$  – объемная активность в воздухе, Бк/м $^3$ ;  $B_{\alpha\beta}$  – дозовый коэффициент внешнего  $\beta$ -излучения, Зв·м $^3$ /(с·Бк);  $t$  – время. Следуя той же схеме, что и в предыдущем случае, легко показать, что среднегодовой предельно допустимый выброс в рассматриваемом случае определится выражением

$$\text{ПДВ}_2^{\text{АЭС}} = \frac{D_{\max}^2}{k \varepsilon_2 G_{\Sigma} B_{\alpha\beta} t}, \quad (10.81)$$

где  $k$  – коэффициент качества, Зв/Гр;  $B_{\alpha\beta}$  – дозовый коэффициент в базальном слое кожи, Зв·м $^3$ /(год·Бк);  $\varepsilon_2$  – вклад от  $\beta$ -излучения.

Рассмотрим третий путь внешнего облучения, связанный с радиоактивным загрязнением почвы. Согласно выражению (10.24),

эквивалентная доза от радионуклидов, осевших на почву, рассчитывается по формуле

$$H_{\Pi} = A_V (w_{ef} + \Lambda H_z^{\max}) B_{s\gamma} \tau_{ef} = M G_{\Sigma} (w_{ef} + \Lambda H_z^{\max}) B_{s\gamma} \tau_{ef}, \quad (10.82)$$

где  $B_{s\gamma}$  – дозовый коэффициент;  $\tau_{ef}$  – эффективный период, учитывающий распад и выведение нуклидов из почвы, который определяется по формуле (9.24). Сравнивая (10.81) с общим соотношением (10.70) по аналогии с предыдущим для среднегодового предельно допустимого выброса ПДВ<sub>3</sub><sup>АЭС</sup>, связанного с загрязнением почвы, находим

$$\text{ПДВ}_3^{\text{АЭС}} = \frac{D_{\max}^3}{G_{\Sigma} B_{s\gamma} \tau_{ef}}. \quad (10.83)$$

Теперь рассмотрим четвертый внутренний путь облучения. Согласно выражения (10.39), эквивалентная годовая доза от внутреннего облучения ингаляционным путем рассчитывается по формуле

$$H_{ih} = A_V B_{ih} V = M G_{\Sigma} B_{ih} V t, \quad (10.84)$$

где  $B_{ih}$  – дозовый коэффициент, Зв/Бк;  $V$  – объем воздуха, потребляемый организмом, м<sup>3</sup>/год. Отсюда, следуя тем же рассуждениям, для предельно допустимого выброса ПДВ<sub>4</sub><sup>АЭС</sup>, связанного с ингаляционным путем поступления радионуклидов в организм человека, находим:

$$\text{ПДВ}_4^{\text{АЭС}} = \frac{D_{\max}^4}{G_{\Sigma} B_{ih} V t}. \quad (10.85)$$

Наконец рассмотрим пятый внутренний путь облучения, связанный с употреблением загрязненных пищевых продуктов. Согласно выражения (10.40), эквивалентная годовая доза от внутреннего облучения пероральным путем рассчитывается по формуле

$$H_{ig} = A_V B_{ig} V t = B_{ig} A_m \mathcal{M} t = M G_{\Sigma} B_{ig} t, \quad (10.86)$$

где  $B_{ig}$  – дозовый коэффициент;  $V$  – объем воды или молока, потребляемый организмом в год, м<sup>3</sup>;  $\mathcal{M}$  – масса потребляемых продуктов питания в год, кг;  $A_m$  – удельная активность потребляемой пищи, Бк/кг. Отсюда, сравнивая формулу (10.86) с (10.70) и учитывая (10.75) для предельно допустимого выброса ПДВ<sub>5</sub><sup>АЭС</sup>, связанного с пероральным путем поступления радионуклидов в организм, находим

$$\text{ПДВ}_5^{\text{АЭС}} = \frac{D_{\max}^5}{G_{\Sigma} B_{ig} V t}. \quad (10.87)$$

В соответствии с вышеизложенным практическая схема установления ПДВ для любого предприятия ядерного топливного цикла, расположенного в указанном климатическом регионе, сводится к следующему:

- составление репрезентативного нуклидного состава выбросов источника в атмосферу;
- установление дозовых квот понуклидно и по группам;
- выделение вкладов отдельных нуклидов или групп в общий ПДВ<sub>Σ</sub>;
- наличие статистики метеорологических условий для данного климатического региона;
- расчет карты-схемы значений функции рассеивания  $G_{\Sigma}$ ;
- определение среднегодового предельно допустимого выброса понуклидно, по всем путям облучения и в целом.

Таким образом, изложенный подход к расчету среднегодового допустимого выброса (ПДВ) базируется на основе непревышения дозовых квот и учитывает все основные пути как внешнего, так и внутреннего облучения. Эта концепция позволяет рассчитывать ПДВ для всех предприятий ядерного топливного цикла. При этом под предельно допустимым выбросом (ПДВ) понимается годовой выброс радиоактивных веществ в атмосферу, при котором человек получит годовую дозу, не превышающую принятой дозовой квоты.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Абрамович Г. Н.* О деформации поперечного сечения прямоугольной турбулентной струи // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа.– 1983.– N 1.– С. 54–63.
- [2] *Абрамович Г. Н.* Теория турбулентных струй.– М.: Физматгиз, 1960.– 715 с.
- [3] *Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др.* Теория турбулентных струй / Под ред. Г. Н. Абрамовича.– М.: Наука, 1984.– 715 с.
- [4] *Акименко В. В.* Математическое моделирование экологического состояния пограничного слоя атмосферы региона.– Луганск: Изд-во Вост.-Укр. гос. ун-та, 1998.– 192 с.
- [5] *Адлер Д., Барон А.* Расчет трехмерного течения круглой струи в поперечном потоке // Ракет. техника и космонавтика.– 1979.– 17, N 2.– С. 53–60.
- [6] *Акатнов Н. И.* Круглая турбулентная струи в поперечном потоке // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа.– 1969.– N 6.– С. 11–19.
- [7] *Андреев П. И.* Рассеяние в воздухе газов выбрасываемых промышленными предприятиями.– М.: Госстройиздат, 1952.– 215 с.
- [8] *Арутюнян Р. В., Большов Л. А., Решетин В. П.* К расчету мощности дозы внешнего  $\gamma$ -облучения // ДАН СССР. Техн. физика.– 1991.– 319, N 3.– С. 608–611.
- [9] *Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / Под ред. Ф. Т. М. Ньистада и Х. ван Дона, пер. под ред. А. М. Яглома.– Л.: Гидрометеиздат, 1985.– 352 с.*
- [10] *Бадяев В. В., Егоров Ю. А., Казаков С. В.* Охрана окружающей среды при эксплуатации АЭС.– М.: Энергоиздат, 1990.– 224 с.
- [11] *Бай-Ши-И.* Турбулентное течение жидкостей и газов: Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1962.– 344 с.
- [12] *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности. Ч. 1, 2.– М.: Высш. шк., 1982.– 327 с., 304 с.

- [13] Бергельсон Б. Р., Зориков Г. А. Справочник по защите от излучений протяженных источников.– М.: Атомиздат, 1965.– 175 с.
- [14] Берлянд М. Е. Влияние рельефа на распространение примесей от источника // Тр. ГГО.– 1968.– Вып. 234.– С. 28–44.
- [15] Берлянд М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы.– Л.: Гидрометеиздат, 1975.– 448 с.
- [16] Богомолов Е. Н. Искривление плоской струи в ограниченном сносящем потоке при наличии застойной зоны // Изв. вузов. Авиац. техника.– 1978.– N 1.– С. 22–30.
- [17] Богомолов Е.Н. Расчет эффективности газовой завесы за перфорированным участком поверхности, омываемой турбулентным потоком // Изв. вузов. Энергетика.– 1979.– N 1.– С. 23–89.
- [18] Братсерт У. Х. Испарение в атмосфере / Пер. под ред. А. С. Дубова.– Л.: Гидрометеиздат, 1985.– 351 с.
- [19] Бруцкий Е. В. Интегральный метод расчета начального участка плоской струи в сносящем потоке // Прикл. механика.– 1978.– 14, N 3.– С. 114–120.
- [20] Бруцкий Е. В. Исследование начального участка влоских плавающих струй в сносящем потоке // Прикл. механика.– 1981.– 17, N 10.– С. 128–132.
- [21] Бруцкий Е. В. О расчете плоских плавающих турбулентных струй, истекающих вертикально // Прикл. механика.– 1980.– 16, N 9.– С. 121–128.
- [22] Бруцкий Е. В. Основные интегральные соотношения для струи в сносящем потоке // Гидромеханика.– 1979.– Вып. 39.– С. 14–21.
- [23] Бруцкий Е. В. Плоская турбулентная струя в неоднородном сносящем потоке // Механика турбулентных потоков.– М.: Наука, 1980.– С. 272–279.
- [24] Бруцкий Е. В. Приближенный метод расчета основного участка плоской плоской турбулентной струи в сносящем потоке // Гидромеханика.– 1978.– Вып. 38.– С. 20–28.

- [25] Бруяцкий Е. В. Расчет границ водоворотной области при внезапном плановом расширении турбулентного потока // Гидромеханика.– 1976.– Вып. 34.– С. 93–100.
- [26] Бруяцкий Е. В. Расчет параметров плоских турбулентных струй, распространяющихся в сносящем потоке // Гидромеханика.– 1981.– Вып. 43.– С. 58–66.
- [27] Бруяцкий Е. В. Турбулентные стратифицированные струйные течения.– Киев: Наук. думка, 1986.– 296 с.
- [28] Бруяцкий Е. В. Учет сложной подстилающей поверхности в струйно-диффузионной модели рассеивания выбросов // Гидромеханика.– 1997.– Вып. 71.– С. 3–13.
- [29] Бруяцкий Е. В., Гаев Е. А. Деформация турбулентной струи в сносящем потоке // Прикл. механика.– 1976.– 12, N 6.– С. 116–122.
- [30] Бруяцкий Е. В., Гаев Е. А., Сигети А. И. Метод расчета процессов рассеивания вентиляционных выбросов в атмосфере // Радиационная безопасность и защита АЭС.– 1982.– Вып. 7.– С. 134–143.
- [31] Бруяцкий Е. В., Егоров Ю. А., Иванов Е. А. и др. Применение струйно-диффузионного метода к расчету распространения радионуклидов АЭС в атмосфере // Радиационная безопасность и защита АЭС.– 1982.– Вып. 7.– С. 120–134.
- [32] Бруяцкий Е. В., Кузьменко В. Г. Моделирование турбулентной струи в поперечном потоке на основе взаимодействия вихревых структур // Гидромеханика.– 1994.– Вып. 68.– С. 97–105.
- [33] Бруяцкий Е. В., Кузьменко В. Г. Модель отрывного обтекания струи сносящим боковым потоком // Гидромеханика.– 1986.– Вып. 53.– С. 24–29.
- [34] Бруяцкий Е. В., Кузьменко В. Г. Расчет формы поперечного сечения струи в сносящем боковом потоке // Гидромеханика.– 1991.– Вып. 63.– С. 15–20.
- [35] Бруяцкий Е. В., Проходько В. П. Расчет вертикальных осесимметричных плавучих струй интегральным и численным методом // Гидромеханика.– 1986.– Вып. 54.– С. 48–54.

- [36] Бруяцкий Е. В., Проходько В. П. Расчет плоских плавучих турбулентных струй интегральным и численным методом // Прикл. механика.- 1984.- **34**, N 6.- С. 99-106.
- [37] Бруяцкий Е. В., Соколов А. М., Тришин В. В. Распространение выброса радиоактивных аэрозолей из объекта "Укрытие" в штатных и аварийных условиях // Тез. докл. Межд. конф. "Укрытие-98".- 25-27 нояб. 1998, Славутич: Укратомиздат.- С. 139.
- [38] Булдаков Л. А., Гусев Д. И., Гусев Н. Г. и др. Радиационная безопасность в атомной энергетике.- М.: Атомиздат, 1981.- 118 с.
- [39] Бызова Н. Л. Методическое пособие по расчету рассеивания примесей в пограничном слое атмосферы по метеорологическим данным.- М.: Гидрометеиздат, 1973.- 46 с.
- [40] Бызова Н. Л. Рассеивание примесей в пограничном слое атмосферы.- М.: Гидрометеиздат, 1974.- 190 с.
- [41] Бызова Н. Л., Гаргер Е. К., Иванов В. Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси.- Л.: Гидрометеиздат, 1991.- 278 с.
- [42] Бызова Н. Л., Кротова И. А., Натанзон Г. А. О граничном условии в задачах рассеяния примеси в атмосфере // Метеорология и гидрология.- 1980.- N 2.- С. 14-20.
- [43] Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности.- М.: ИЛ, 1955.- 198 с.
- [44] Бюллетень экологического состояния зоны отчуждения за первое полугодие 1995 года. Чернобыль.- 1995. Вып. 5. 40 с.
- [45] Васильев О. Ф., Квон В. И., Лыткин Ю. М., Розовский И. Л. Стратифицированные течения // Итоги науки и техники / ВИНТИ. Сер. Гидромеханика.- 1974.- **8**.- С. 74-131.
- [46] Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах.- М.: Наука, 1970.- 672 с.
- [47] Вахламов С. В. Расчет траектории струи в сносящем потоке // Инж.-физ. журн.- 1964.- **7**, N 10.- С. 112-116.
- [48] Визель Я. М., Мостинский И. Л. Искривление струи в сносящем потоке // Инж.-физ. журн.- 1965.- **8**, N 2.- С. 238-242.

- [49] *Висков А. Н., Горелов Ю. А.* О явлении вихреобразования на струях, вытекающих в сносящий поток // Ученые записки ЦАГИ.– 1973.– **4**, N 4.– С. 43–47.
- [50] *Висков А. Н., Горелов Ю. А.* Образование поперечных вихрей на струях в сносящем потоке // Ученые записки ЦАГИ.– 1976.– **7**, N 1.– С. 51–59.
- [51] *Висков А. Н., Горелов Ю. А., Стерлин В. А., Фабер В. А.* К определению эжекционных свойств струи в сносящем потоке // Ученые записки ЦАГИ.– 1977.– **8**, N 3.– С. 127–133.
- [52] *Владимиров А. М., Ляхин Ю. И., Матвеев Л. Т., Орлов В. Г.* Охрана окружающей среды.– Л.: Гидрометеиздат, 1991.– 424 с.
- [53] *Войтович Л. Н., Гиршович Т. А., Коржов Н. П.* Экспериментальное исследование начального участка круглой турбулентной струи в поперечном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1978.– N 5.– С. 151–155.
- [54] *Волков Э. П.* Исследование подъема факела над устьем газоотводящих труб. // Инж.-физ. журнал.– 1979.– **36**, N 4.– С. 700–707.
- [55] *Вулис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости.– М.: Наука, 1965.– 431 с.
- [56] *Вязовский Ю. П., Голубев В. А., Клишкин В. Ф.* Исследование круглой турбулентной струи в сносящем потоке // Инж.-физ. журнал.– 1982.– **42**, N 4.– С. 548–554.
- [57] *Гаргер Е. К.* Интегральные лагранжевы характеристики турбулентности в пограничном и приземном слоях атмосферы // Труды ИЭМ. М.: Гидрометеиздат.– 1988.– Вып. 46 (136).– С. 3–19.
- [58] *Гендриксон В., Эпштейн А.* Экспериментальные исследования неизотермической струи в сносящем потоке // Изв. АН ЭССР. Физика и математика.– 1973.– **22**, N 3.– С. 304–311.
- [59] *Гиневский А. С.* Теория турбулентных струй и следов.– М.: Машиностроение, 1969.– 400 с.
- [60] *Гиршович Т. А.* К расчету параметров плоской турбулентной струи в сносящем потоке // Инж.-физ. журн.– 1973.– **25**, N 5.– С. 907–912.

- [61] *Гиршович Т. А.* О применении метода интегральных соотношений при использовании усложненных моделей турбулентности // Инж.-физ. журн.– 1979.– **36**, N 3.– С. 517–521.
- [62] *Гиршович Т. А.* О турбулентной струе в сносящем потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1966.– N 1.– С. 151–153.
- [63] *Гиршович Т. А.* Теоретическое и экспериментальное исследование плоской турбулентной струи в сносящем потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1966.– N 5.– С. 121–126.
- [64] *Гиршович Т. А.* Турбулентные струи в поперечном потоке.– М.: Машиностроение, 1993.– 256 с.
- [65] *Годунов С. К., Рябенкий В. С.* Разностные схемы. Введение в теорию.– М.: Наука, 1973.– 400 с.
- [66] *Голубев В. А.* Расчет турбулентных струй газа // Инж.-физ. журн.– 1982.– **42**, N 3.– С. 395–402.
- [67] *Голубев В. А., Клишкин В. Ф., Макаров И. С.* Траектория одиночных струй различной плотности, распространяющихся в сносящем потоке // Инж.-физ. журн.– 1978.– **34**, N 4.– С. 594–599.
- [68] *Горелов Ю. А., Висков А. Н., Филиппов Н. М.* Расчет поля скоростей и давлений, индуцируемых струей в сносящем потоке // Тр. ЦАГИ.– 1972.– Вып. 1412.– С. 3–25.
- [69] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд.– М.: Физматгиз, 1971.– 1108 с.
- [70] *Гусев Н. Г., Беляев В. А.* Радиоактивные выбросы в биосфере. Справочник. 2-е изд., перераб. и дополн.– М.: Энергоиздат, 1991.– 256 с.
- [71] *Гусев Н. Г., Дмитриев П. П.* Радиоактивные цепочки. Справочник.– М.: Энергоатомиздат, 1988.– 112 с.
- [72] *Динамическая метеорология.*– Л.: Гидрометеоиздат, 1976.– 607 с.
- [73] *Довгий С. А., Прусов В. А., Копейка О. В.* Использование геоинформационных технологий в системах охраны окружающей среды и исследования природных ресурсов.– К.: Наук. думка, 2000.– 284 с.

- [74] *Допустимые выбросы радиоактивных и химических веществ в атмосферу* / Е. Н. Теверовский, Н. Е. Артемова, А. А. Бондарев и др. Под ред. Е. Н. Теверовского, И. А. Терновского. 2-е изд., перераб. и дополн.– М.: Энергоиздат, 1985.– 216 с.
- [75] *Дубов А. С., Быкова Л. П., Марунич С. В. Турбулентность в растительном покрове.*– Л.: Гидрометеоиздат, 1978.– 18 с.
- [76] *Егоров Ю. А. Основы радиационной безопасности атомных электростанций. Учеб. пособие для вузов* / Под ред. Н. А. Доллежала.– М.: Энергоиздат, 1982.– 272 с.
- [77] *Ершин Ш. А., Ярин Л. П. К расчету турбулентного диффузионного факела // Сб. Теория и практика сжигания газа. Т. 2.*– Л.: Недра, 1964.– С. 123–138.
- [78] *Защита от ионизирующих излучений. В 2-х томах. Т. 1. Физические основы защиты от излучений. Учебник для вузов* / Н. Г. Гусев, В. А. Климанов, В. П. Машкович, А. П. Суворов. Под ред. Н. Г. Гусева. 3-е изд., перераб. и дополн.– М.: Энергоатомиздат, 1988.– 509 с.
- [79] *Защита от ионизирующих излучений. В 2-х томах. Т. 2. Защита от излучений ядерно-технических установок. Учебник для вузов* / Н. Г. Гусев, Е. Е. Ковалев, В. П. Машкович, А. П. Суворов. Под ред. Н. Г. Гусева. 3-е изд., перераб. и дополн.– М.: Энергоатомиздат, 1990.– 352 с.
- [80] *Зельдович Б. Я. Предельные законы свободно-конвективных потоков // Журн. эксперим. и техн. физики.*– 1937.– 7, N 12.– С. 1463–1465.
- [81] *Зилитинкевич С. С. Динамика пограничного слоя.*– Л.: Гидрометеоиздат, 1970.– 291 с.
- [82] *Злобин В. В. Исследование перемешивания системы струй с поперечным потоком в канале // Инж.-физ. журн.*– 1972.– 23, N 3.– С. 541–544.
- [83] *Иванов Ю. В. Некоторые закономерности свободной круглой струи, развивающейся во внешнем поперечном потоке // Изв. АН СССР. Сер. техн. наук.*– 1954.– N 8.– С. 588–595.
- [84] *Иванов Ю. В. Эффективное сжигание надслойных горючих газов в потоках.*– Таллин: Эстонгосиздат, 1959.– 328 с.

- [85] *Израэль Ю.А.* Чернобыль: прошлое и прогноз на будущее // Правда, 1989, 20 марта.
- [86] *Ионизирующее излучение: источники и биологические эффекты.*– Доклад НК ДАР ООН. Нью-Йорк, 1982.
- [87] *Каплан С. М.* Определение параметра устойчивости по стандартным метеонаблюдениям и сравнение его с некоторыми другими параметрами стратификации. Распространение примесей от промышленных источников // Тр. ЛГМИ.– 1975.– Вып. 52.– С. 38–48.
- [88] *Камотани Ю., Гребер И.* Экспериментальное исследование турбулентной струи, вдуваемой в сносящий поток // Ракет. техника и космонавтика.– 1972.– **10**, N 11.– С. 43–49.
- [89] *Кароль И. Л.* О влиянии турбулентной диффузии в направлении ветра на распределение концентрации субстанции, диффундирующей в атмосфере // ДАН СССР.– 1960.– **131**, N 6.– С. 1283–1286.
- [90] *Кашафутдинов С. Т.* Влияние поперечного потока на истечение из осесимметричного сопла // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.– 1974.– Вып. 3, N 13.– С. 51–58.
- [91] *Козлов В. Ф.* Справочник по радиационной безопасности. 4-е изд., перераб. и дополн.– М.: Энергоиздат, 1991.– 352 с.
- [92] *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР.– 1941.– **30**, N 4.– С. 299–303.
- [93] *Костерин В. А., Мотылинский И. П.* О распространении боковых струй в сносящем потоке // Тр. Куйбыш. авиац. ин-та.– 1968.– Вып. 98.– С. 67–77.
- [94] *Костерин В. А., Ржевский Е. В.* О расчете траектории и дальности веерных и парных плоских струй в ограниченном поперечном потоке // Изв. вузов. Авиац. техника.– 1964.– N 1.– С. 112–121.
- [95] *Костерин В. А., Ржевский Е. В.* Экспериментальное исследование распространения веерных и парных плоских струй в поперечном потоке // Изв. вузов. Авиац. техника.– 1964.– N 2.– С. 68–80.



- [96] Краб Д., Дюрао Д. Ф., Уайтло Г. Г. Истечение круглой струи в поперечный поток // Теор. основы инж. расчетов. Сер. Д.– 1981.– **101**, N 1.– С. 192–203.
- [97] Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы.– Л.: Гидрометеиздат, 1961.– 253 с.
- [98] Ламли Дж., Пановский Г. Структура атмосферной турбулентности.– М.: Мир, 1966.– 264 с.
- [99] Ле Гриве Е. Процесс перемешивания, вызванный завихренностью, связанной с вдувом струи в поперечный поток // Тр. амер. общ-ва инженеров-механиков. Энергет. машины и установки.– 1978.– **100**, N 3.– С. 74–84.
- [100] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1955.– 504 с.
- [101] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1970.– 904 с.
- [102] Лыков А. В. Тепломассообмен. Справочник.– М.: Энергия, 1972.– 560 с.
- [103] Марчук Г. И. Методы расщепления.– М.: Наука, 1988.– 264 с.
- [104] Матвеев Л. Г. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы.– Л.: Гидрометеиздат, 1976.– 640 с.
- [105] Махонько К. П., Дмитриева Г. В. Способность различных типов осадков к вымыванию продуктов деления из атмосферы и характеристики вымывания // Изв. АН СССР. ФАО.– 1966.– **2**, N 3.– С. 297–304.
- [106] Машкович В. П. Защита от ионизирующих излучений. Справочник. 3-е изд.– М.: Энергоиздат, 1982.– 296 с.
- [107] Метеорологические аспекты загрязнения атмосферы (итоги сотрудничества соцстран) / Под. ред. М. Е. Берлянда.– Л.: Гидрометеиздат, 1988.– 250 с.
- [108] Метеорология и атомная энергия / Пер. с англ. под ред. Д. Слейда.– Л.: Гидрометеиздат, 1971.– 648 с. с.
- [109] Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. ОНД-86. Госкомгидромет.– Л.: Гидрометеиздат, 1987.– 91 с.

- [110] *Методы* расчета распространения радиоактивных веществ с АЭС и облучения окружающего населения. НТД стран – членов СЭВ.– М.: Энергоиздат, 1984.– 186 с.
- [111] *Мигдал А. А.* Вихревая динамика и турбулентность // Вопросы кибернетики.– 1987.– N 107.– С. 122–146.
- [112] *Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.– М.: Наука, 1965.– 383 с.
- [113] *Монин А. С.* О лагранжевых характеристиках турбулентности // ДАН СССР.– 1960.– **134**, N 2.– С. 304–307.
- [114] *Монин А. С., Обухов А. М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофиз. ин-та АН СССР.– 1954.– N 24.– С. 163–187.
- [115] *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности.– Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992.– 694 с.
- [116] *Никитин В. С.* Проветривание промышленных площадок и прилегающих к ним территорий.– М.: Стройиздат, 1980.– 200 с.
- [117] *Никитин И. К.* Сложные турбулентные течения и процессы тепломассопереноса.– Киев: Наук. думка, 1980.– 240 с.
- [118] *Никифорович Е. И., Бруяцкий Е. В.* Моделирование и расчет высоты подъема аварийного выброса при штилевых условиях // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 78–87.
- [119] *Нормы* радиационной безопасности НРБ-76/87 и основные санитарные правила работы с радиоактивными веществами и другими источниками ионизирующих излучений ОСП-72/87. 3-е изд.– М.: Энергоатомиздат, 1988.– 160 с.
- [120] *Обухов А. М.* Турбулентность и динамика атмосферы.– Л.: Гидрометеиздат, 1988.– 413 с.
- [121] *Общие* положения обеспечения безопасности атомных станций (ОПБ-88) ПК АЭ Г-1-0П-89.– М.: Энергоиздат, 1990.– 48 с.
- [122] *Озмидов Р. В.* Диффузия примесей в океане.– Л.: Гидрометеиздат, 1986.– 280 с.

- [123] *Олейник А. Я., Фридман В. М., Бруацкий Е. В., Галин В. В.* Оптимизация процесса смешения при струйной подаче реагента в смеситель // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1982.– Н 9.– С. 29–32.
- [124] *Палатник И. В., Темирбаев Д. Л.* Закономерности распространения осесимметричной воздушной струи в сносящем однородном потоке // Пробл. теплофизики и прикл. теплофизики.– 1967.– Вып. 4.– С. 196–216.
- [125] *Палатник И. В., Темирбаев Д. Л.* К расчету траектории осесимметричной струи в сносящем потоке // Теор. и практ. сжигания газа.– 1968.– Н 4.– С. 40–51.
- [126] *Патанкар С. В., Басю Д. К., Альпей С. А.* Численный расчет трехмерного поля скорости искривленной турбулентной струи // Теорет. основы инж. расчетов. Сер. Д.– 1977.– 99, Н 4.– С. 268–273.
- [127] *Пененко В. В., Алоян А. Е.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды.– Новосибирск: Наука, 1985.– 256 с.
- [128] *Пристли С. Х. Б.* Турбулентный перенос в приземном слое атмосферы.– Л.: Гидрометеиздат, 1964.– 122 с.
- [129] *Процессы переноса в турбулентных течениях со сдвигом:* Теплофизика. Таллин, 1973.– 103 с. (Препринт / АН ЭССР. Ин-т термодинамики и электрофизики; N 1).
- [130] *Радиационные характеристики облученного ядерного топлива.* Справочник / В. М. Колобашкин, П. М. Рубцов, П. А. Ружанский и др.– М.: Энергоатомиздат, 1983.– 382 с.
- [131] *Радиационные характеристики продуктов деления:* Справочник / Н. Г. Гусев, П. М. Рубцов, В. В. Коваленко, В. М. Колобашкин.– М.: Атомиздат, 1974.– 224 с.
- [132] *Санитарные правила проектирования и эксплуатации атомных электростанций СП АЭС-79.*– М.: Энергоиздат, 1981.– 40 с.
- [133] *Сборник правил и норм по радиационной безопасности в атомной энергетике. III.*– М.: Министерство здравоохранения СССР, 1989.– 422 с.
- [134] *Себиси Т., Брэдшоу П.* Конвективный теплообмен, пер. с англ.– М.: Мир, 1987.– 592 с.

- [135] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2.– М.: Наука, 1976.– 536 с., 576 с.
- [136] *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1966.– 443 с.
- [137] *Сыркин А. Н., Ляховский Д. Н.* Аэродинамика элементарного факела // Сообщение ЦКТИ.– Л., 1936.– С. 10–21.
- [138] *Сэттон О. Г.* Микрометеорология.– Л.: Гидрометеоиздат, 1958.– 355 с.
- [139] *Темирбаев Д. Ж., Исмаилов Т. М.* К расчету траектории сносящих струй // Изв. вузов. Энергетика.– 1983.– N 8.– С. 78–82.
- [140] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. 6-е изд.– М.: Наука, 1984.– 715 с.
- [141] *Тищенко Н. Ф.* Охрана атмосферного воздуха. Расчет содержания вредных веществ и их распределение в воздухе. Справ. изд.– М.: Химия, 1991.– 368 с.
- [142] *Турбулентные сдвиговые течения* / Под ред. А. С. Гиневского. Ч. 2.– М.: Машиностроение, 1980.– 422 с.
- [143] *Туркус В. А.* Структура воздушного приточного факела, выходящего из прямоугольного отверстия // Отопление и вентиляция.– 1933.– N 5.– С. 11–19.
- [144] *Указания по расчету рассеивания вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий.* СН 369-74.– М.: Стройиздат, 1975.– 44 с.
- [145] *Учет дисперсионных параметров атмосферы при выборе площадок атомных электростанций.* Серия изданий безопасности N 50-SG-53.– Вена: МАГАТЭ, 1982.– 106 с.
- [146] *Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1973.– 256 с.
- [147] *Фиерн Р., Уэстон Р.* Исследование завихренности при обтекании струи боковым потоком // Ракет. техника и космонавтика.– 1974.– 12, N 12.– С. 61–69.
- [148] *Хинце И. О.* Турбулентность.– М.: Физматгиз, 1963.– 680 с.

- [149] Холдмен И. Д., Уолкер Р. Е. Смещение ряда струй с поперечным потоком, ограниченным стенками // Ракет. техника и космонавтика.– 1977.– **15**, N 2.– С. 138.
- [150] Шандоров Г. С. Истечение из канала в неподвижную и движущуюся среду // Журн. техн. физики.– 1957.– **27**, вып. 1.– С. 156–179.
- [151] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1969.– 742 с.
- [152] Эпштейн А. М. О возможности расчета параметров струи в поперечном потоке на основе приближения пограничного слоя и вихревой пары // Изв. АН ЭССР. Сер. физика и математика.– 1975.– **24**, N 1.– С. 81–91.
- [153] Эпштейн А. М. О форме оси турбулентной струи в неограниченном горизонтальном поперечном потоке // Инж.-физ. журн.– 1965.– **9**, N 4.– С. 451–456.
- [154] Эпштейн А. М., Емельянов В. О. О расчете турбулентной струи в сносящем потоке // Изв. АН ЭССР. Сер. физика и математика.– 1978.– **20**, N 4.– С. 453–460.
- [155] Яглом А. М. Модели турбулентной диффузии, опирающейся на стохастические дифференциальные уравнения ланжевеновского типа // Метеорологические аспекты загрязнения атмосферы. Т. 2.– М., 1981.– С. 178–183.
- [156] *Atmospheric dispersion in nuclear power plant siting.*– Safety ser. N 50-SG-53: Vienna, IAEA.– 1980 с.106
- [157] *Atmospheric Dispersion Models for Application in Relation to Radionuclide Releases.*– IAEA-TECDOC-379.– Vienna, 1986.
- [158] *Batchelor G. K. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II. The relative motion of particles* // Proc. Cambridge Phil. Soc.– 1952.– **48**.– P. 345–362.
- [159] *Bosanquet C., et. al. Dust deposition from chimney stacks* // Proc. Inst. Mech. Eng.– 1950.– **162**.– P. 335–367.
- [160] *Brayant P. M. Methods of estimation of the dispersion of wind-borne material and date of assist in their application.*– British report ANSB (RP), R-42, 1964.

- [161] *Briggs G. A.* Diffusion estimation for small emissions.- Environmental Research Laboratories, Air Resources Atmosphere Turbulence and Diffusion Laboratory (NOAA).- Annual Report, USAEC Report ATDL-106, 1973.
- [162] *Briggs G. A.* Plume rise.- USA EC Division of tech. information extension (TID-25075), 1969.
- [163] *Briggs G. A., McDonald K. R.* Prairie Grass revisited: Optimum indicators of vertical spread // Proc. 9-th NATO-CCMS Int. Tech. Symp. on Air Pollution Modelling and its Applications.- Toronto, 1978, NATO Rep. N 103.- P. 209-220.
- [164] *Bringfelt B.* Plume rise measurements of industrial chimneys // Atmos. Environ.- 1968.- **2**.- P. 575-598.
- [165] *Bultynck H., Malet K., Sharma L., van Der Parren J.* Atmospheric dilution factors and calculation of doses in the environment of SCK/CEN. Mol for short and long duration stack discharges.- BLG 446, SCK/CEN, June, 1970.
- [166] *Cheng-Lu H.* Aufrallung eines zylindrischen strahles durch querwind. Doctoral thesis.- University of Goettingen, 1942.
- [167] *Clamp B. G.* Smoke abatement in coal field metallurgical furnaces. Ph. D. Thesis.- University of Sheffield. England, 1959.
- [168] *Coelho S. L. V., Hunt J. S. R.* The dynamics of near field of strong jets in crossflow // J. Fluid Mech.- 1989.- **200**.- P. 95-120.
- [169] *Corrsin S.* On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence // J. Appl. Phys.- 1951.- **22**.- P. 469.
- [170] *Csanady G.* Some observation on smoke plumes // Int. J. Air. Wat. Pollut.- 1961.- **4**.- P. 47-51.
- [171] *Csanady G.* Turbulent diffusion in the Environment.- D. Reidal Publ. Co., 1973.- 205 p.
- [172] *Desiato F.* A long range dispersion model evaluation study with Chernobyl date // Atmos. Environ.- 1992.- **26a**.- P. 2805-2820.
- [173] *Draxler R. R.* Determination of atmospheric diffusion parameters // Atmos. Environ.- 1976.- **10**.- P. 99-105.
- [174] *Erbrink J. J.* A practical model for the calculation of  $\sigma_y$  and  $\sigma_z$  for use in an on-linegaussian dispersionmodel for tall stacks, based on wind fluctuations // Atmos. Environ.- 1991.- **25a**.- P. 277-283.

- [175] *Fox O. G.* Forced plume in stratified fluid // *J. Geogr. Res.*– 1970.– **75**, N 33.– P. 6818–6835.
- [176] *Generic Models and Parameters for Assessing the Environmental Transfer of Radionuclides from Routine Releases. Exposures of critical groups.* IAEA Safety Series N 57.– Vienna: IAEA, 1982.
- [177] *Gifford F.* A simultaneous Lagrangian-Eulerian turbulence experiment // *Monthly Weather Rev.*– 1955.– **83**.– P. 293.
- [178] *Gifford F.* Atmospheric transport and dispersion over cities // *Nucl. Saf.*– 1972.– **13**, N 5.– P. 391.
- [179] *Gifford F.* Horizontal diffusion in the atmosphere. A Lagrangian dynamical theory.– Los Alamos: Los Alamos Scient. Lab, 1981.– 19 p.
- [180] *Gifford F.* Statistical properties of a fluctuation plume model // *Adv. Geophys.*– 1959.– **6**.– P. 117.
- [181] *Gifford F.* Use of routine meteorological observations for estimating atmospheric dispersion // *Nuclear Saf.*– 1961.– **2**, N 4.– P. 47.
- [182] *Hanna S. R., Briggs G. A., Deardorff J., Egan B. A., Gifford F. A., Pasquill F.* AMS Workshop on Stability Classification Schemes and Sigma Curves-Summary of Recommendations // *Bull. Amer. Meteor. Soc.*– 1977.– **58**.– P. 1305–1309.
- [183] *Hanna S. R., Chang T. C.* Hybrid plume dispersion model (HPDM) improvements and testing at three field sites // *Atmos. Environ.*– 1993.– **27a**, N 9.– P. 1491–1508.
- [184] *Harrison R. M., McCartney N. A.* A comparison of the predictions of a simple Gaussian plume dispersion model with measurements of pollutant concentration at ground-level and aloft // *Atmos. Environ.*– 1980.– **14**.– P. 589–596.
- [185] *Huht T. C., Mulhearen P. T.* Turbulent dispersion from sources near two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.*– 1973.– **61**, N 2.– P. 245–287.
- [186] *Huq P.* Observations of jets in density stratified crossflows // *Atmos. Environ.*– 1997.– **31**, N 13.– P. 2011–2022.
- [187] *Intercomparison of Advanced Practical Short-Range Atmospheric Dispersion Models (proc. of the workshop) / Ed. C. Cuvelier.* 30 August–3 September, 1994. Manno, Switzerland.

- [188] *Irwin J. S.* A theoretical variation of the wind profile power low exponent as a function of surface roughness and stability // *Atmos. Environ.*– 1981.– **13**.– P. 191–194.
- [189] *Irwin J. S.* A teoretical variation of the wind profile power low exponent as a function of surface roughness and stability // *Atmos. Environ.*– 1979.– **13**.– P. 191–194.
- [190] *Kampe de Feriet J.* Les fonctions aleatoires stationnaires et la theorie statistique de la turbulence homogene // *Ann. soc. sci. Bruxelles. Ser. 1.*– 1939.– **59**.– P. 145–194.
- [191] *Keffer J. F.* The physical nature of the subsonic jet in crosstream // *NASA Rep. SP-218.*– 1969.– Sept.– P. 54.
- [192] *Keffer J. F., Baines W. D.* The round turbulent jet in a crossflow // *J. Fluid Mech.*– 1963.– **15**, pt. 4.– P. 481–496.
- [193] *Kestin J., Richardson P. D.* Heat transfer across turbulent incompressible boundary layers // *Int. J. Heat Mass Transfer.*– 1963.– **6**, N2.– P. 147–189.
- [194] *Klug W.* Ein Verfahren zur Bestimmung der Ausbreitungen Bedingungen aus Sinoptischen Beobachtungen // *Staub-Reinhalt. Luft.*– 1962.– Bd. 29.– S. 143.
- [195] *Krausche D., Fearn R., Weston R.* Round jet in a crossflow: influence of injection angle on vortex properties // *AIAA J.*– 1978.– **16**, June.– P. 636–637.
- [196] *Kush E., Schetz J.* Liquid jet injection into a supersonic flow // *AIAA J.*– 1973.– **11**, Sept.– P. 1223–1224.
- [197] *Legg B. J. Raupach M. R.* Markov chain simulation of particle dispersion in inhomogeneous flow: the mean drift velocity induced by a gradient in Eulerian velocity variance // *Boundary-Layer Meteorology.*– 1982.– **24**.– P. 3–13.
- [198] *Li W. W., Meroney R. N.* Estimation of Lagrangian time scales from laboratory measurements of lateral dispersion // *Atmos. Environ.*– 1984.– **18**.– P. 1601–1611.
- [199] *Lucas D, et. al.* The rise of hot plumes from chimney // *Int. J. Air Wat. Poll.*– 1963.– **7**, N 6-7.



- [200] *Luna R. E., Church H. W.* A comparison of Turbulent Intensity and Stability Ratio Measurements to Pasquill Stability Classes // *J. Appl. Meteorol.*– 1972.– **11**, N 4.– P. 663–669.
- [201] *Margason R. J.* Analytical description of jet-wake cross sections for a jet normal to a subsonic free stream // *NASA Rep. SP-218.*– 1969.– Sept.– P. 131–139.
- [202] *Masters T. A.* Some Applications in Physics of the  $p$ -function // *J. Chem. Phys.*– 1955.– **23**, N 10.
- [203] *McElroy J. L.* A comparative study of urban and rural dispersion // *J. Appl. Meteorol.*– 1969.– **8**, N 12.– P. 19.
- [204] *Monssiopoulos N., Flassak T., Knittel G.* A refined diagnostic wind field model // *Environ. software.*– 1988.– N 3.– P. 85–94.
- [205] *Morton B. R.* The accent of turbulent forced plumes in a calm atmosphere // *Int. J. Air. Wat. Poll.*– 1959.– **1**.
- [206] *Nienwstadt F. T. M., van Ulden A. P.* A numerical study on the vertical dispersion of passive contaminants from a continuous source in the atmospheric surface layer // *Atmos. Environ.*– 1978.– **12**.– P. 2119–2124.
- [207] *Ohba R., Okabayashi K., Okamoto H.* Prediction of gas diffusion in complicated terrain by a potential flow model // *Atmos. Environ.*– 1989.– **23**, N 1.– P. 71–80.
- [208] *Pasquill F.* Atmospheric diffusion. 2-nd ed.– NJ: John Wiley and Sons, 1975.– 298 p.
- [209] *Pasquill F.* The estimation of the dispersion of windborne material // *Meteorol. Mag.*– 1961.– **9**.– P. 33–49.
- [210] *Philips P., Panofsky H. A.* A re-examination of lateral diffusion from continuous source // *Atmos. Environ.*– 1982.– **16**, N 8.– P. 1851–1859.
- [211] *Pratte B. D., Baines W. D.* Profiles of the Round Turbulent Jet in a Cross Flow // *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. Hydraul. Div.*– 1967.– Nov.– P. 56–63.
- [212] *Priestley C. H. B.* The isotropic limit and the microscale of turbulence // *Adv. in Geophysics.*– 1959.– **6**.– P. 97 (см. перевод в сб. “Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха”.– М.: ИЛ.– 1962.– С. 120).

- [213] *Roberts O. F. T.* The theoretical scattering of smoke in a turbulent atmosphere // Proc. Roy. Soc.- 1923.- **A104**, N 728.- P. 640-654.
- [214] *Sedefian L., Bennett E.* A comparison turbulence classification schemes // Atmos. Environ.- 1980.- **14**.- P. 741-750.
- [215] *Shwartzman M.* An integral model of plume rise // Atmos. Environ.- 1979.- **13**.- P. 721-731.
- [216] *Shwartz J., Tulin M.* Chimney plumes in natural and stable surrounding // Atmos. Environ.- 1972.- **6**, Jan.- P. 19-35.
- [217] *Smith M. E.* Recommendent Guide for the Prediction of the Dispersion of Airborn Effluents.- NY: American Society of Mechanical Engineers, 1968.
- [218] *Sourses Effects and Risks of Ionizing Radiation*.- Report of General Assembly.- 1988.- N 4.
- [219] *Stoy R. L., Ben Haim Y.* Turbulent jets in a confined crossflow // J. Fluids Engineering.- 1973.- **95**, Dec.- P. 551-556.
- [220] *Strauber M.* Bereshnung von strahlkonturen mit hilfr eines wirbelring models // Zeitschrift fur Flugwissenschaften.- 1975.- **23**, Nov.- S. 394-400.
- [221] *Sucec J., Bowley W.* Predictions of the trajectiry of a turbulent jet injected into a cross flowing stream // Trans. ASME I: J. Fluid Eng.- 1976.- **98**, Dec.- P. 667-673.
- [222] *Taylor G. I.* Diffusion by continuous movement // Proc. London. Math. Soc. Ser. 2.- 1921.- **20**.- P. 196-202.
- [223] *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence // Proc. Roy. Soc.- 1935.- **A151**.- P. 421-478.
- [224] *Techniques and decision making in the assessment of off site consequences of an accident in a nuclear facility*.- Safety series N 86.- Vienna: IAEA, 1987.
- [225] *Trupel T.* Über die Einwirkung eines Luftstrahles auf die umgebende Luft // Z. gesamte Turbinenwes.- 1915.- N 5/6.- S. 10-27.
- [226] *Tulin M. P., Shwartz J.* The motion of turbulent vortex pairs inhomogeneous and density stratified media.- Tech. Rep. 231-15. Hydronautics.- Inc. Laurel. Md. t.- 1971, April.

- [227] *Turner D. B.* Workbook of atmospheric dispersion estimate USEPA Office of Air Programmes.— Research Triangle Park. North Carolina, 1970.
- [228] *Uhlig S.* Bestimmung der Stabilitätsgrade der Luft an Hand von Wetterdienstes // Mitteilungen des Deutschen Wetterdienstes.— 1965.— Bd. 6, N 35.— S. 1–12.
- [229] *Venkatram A.* Estimating the Monin-Obukhov length in the stable boundary layer for dispersion calculations // Boundary-Layer Meteorol.— 1980.— 19.— P. 481–485.
- [230] *Vogt K. J.* Dispersion of radioactive material on small, mezo- and global scales // Proc. IAEA/WHD Symposium on Physical Behaviour of Radioactive Contaminants in the Atmosphere.— Vienna: IAEA, 1974.— P. 19.
- [231] *Vogt K. J.* Empirical investigation of the diffusion of waste air plume in the atmosphere // Nucl. technol.— 1977.— **34**.— P. 43.
- [232] *Wooler P. T., Burghart G. H., Gallegher J. T.* Pressure distributions on a rectangular wing with a jet exhausting normally into an airstream // J. Aircraft.— 1967.— **4**.— P. 537–543.
- [233] *Wyganski B. J., Fiedler H. E.* Some measurements in the self-preserving jet // J. Fluid Mech.— 1969.— **38**, pt. 3.— P. 577–612.
- [234] *Zimm W.* Über die Strömungsvorgänge in freier Luftstrahl // Forsch. Gebiete Ing.— 1921.— N 234.— S. 51–62.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Національна академія наук України  
Інститут гідромеханіки

Євген Васильович Бруцький  
Теорія атмосферної дифузії  
радіоактивних викидів

(російською мовою)

Підп. до друку 20.06.2000.  
Формат 135 × 195 мм. Друк трафаретний (різографія)  
Гарн. Computer Modern Roman. Обл.-вид. арк. 27.59.  
Тираж 400 примірів.

Оригінал-макет підготовлено  
в Інституті гідромеханіки НАН України  
С. Є. Бруцькою та В. Н. Олійником

Надруковано в Інституті гідромеханіки НАН України,  
03680, Київ-180, МСП, вул. Желябова, 8/4.